初中生数学能力的培养与评估

主编　倪政勇
副主编　尹旺忠　黄坤振

华中师范大学出版社

初中生数学能力的
培养与评估

主编 倪政勇

副主编 尹旺忠 黄坤振

华 中 师 范 大 学 出 版 社

内 容 提 要

《初中生数学能力的培养与评估》一书，是《高中数学能力的培养与评估》的姊妹篇，结合现行教学大纲和教材内容，对初中学生学习数学所必需的能力作了系统、深刻的阐述，揭示了初中学生数学能力的内涵及培养过程，并精心编拟了能力评估系列，全面地覆盖了初中内容，突出了主要的数学思想、方法和技巧，特别注意从一般学习水平的要求出发，辅导学习上有困难的同学掌握学数学的钥匙，并兼顾尖子学生高水平的要求，充分展现了全国各地教学要求的不同风格。

相信这本书能使广大初中学生开卷有益，并有助于数学教师提高教学水平。

目　录

二 初中生数学能力评估系列

一　初中生数学能力的培养

（一）学习数学需要能力，数学能力可以培养

学好数学，是每一个同学的愿望，但有不少同学反映数学难学，究竟是什么原因呢？原因可以从以下几方面来检查：是否对学数学的兴趣不大？是否基础知识不牢固？是否计算容易出错？是否基本技能不熟练？等等。我们这本书，主要谈谈数学能力问题。学习数学需要能力吗？什么是数学能力？数学能力怎样培养？请同学们看下面几个例子：

【例 1】在初一学习了完全平方公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

你能灵活运用这个公式吗？请运用这一公式解以下各题：

（1）计算$(100\frac{1}{2})^2$；

（2）展开$(C+D+E)(E+C+D)$；

（3）求$S_n=1+2+3+\cdots+n$（n是自然数）。

解题思路

（1）将$100\frac{1}{2}$写成两数之和$100+\frac{1}{2}$，再应用公式得

$$100^2+2\times100\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2=10100\frac{1}{4}.$$

（2）注意到两个括号内的式子是相同的，先将其中任二数之和（如$C+D$）看成一个数，写成$[(C+D)+E]^2$，

利用公式展开为$(C+D)^2+2(C+D)\cdot E+E^2$，然后再用公式展开$(C+D)^2$即可，结果为

$$C^2+D^2+E^2+2CD+2CE+2DE.$$

（3）根据公式，有$(k+1)^2=k^2+2k+1$，令$k=1$，2，3，…，n，则有以下n个等式：

$$\begin{aligned}
(1+1)^2&=1^2+2\cdot 1+1\\
(2+1)^2&=2^2+2\cdot 2+1\\
(3+1)^2&=3^2+2\cdot 3+1\\
(4+1)^2&=4^2+2\cdot 4+1\\
&\cdots\cdots\\
n^2&=(n-1)^2+2(n-1)+1\\
(n+1)^2&=n^2+2\cdot n+1
\end{aligned}$$

以上n个等式相加，前一个等式的左边与后一个等式的右边第一项相同，则有

$$(n+1)^2=1+2(1+2+\cdots+n)+n,$$

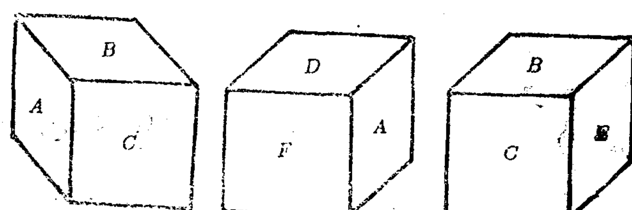
即 $(n+1)^2=1+2S_n+n$.

$$\therefore\quad S_n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

讲评 以上三问，对数学能力的要求是不相同的。第（1）问，只需将原数拆成两个易于算出平方数的数100和$\frac{1}{2}$，归于运用公式的具体形式$(100+\frac{1}{2})^2$后求出。这是一种使数学材料形式化的简单能力。第（2）问，是一种概括数学材料的能力：在运用$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$展开$(C+D+E)(E+C+D)$的具体问题中，先利用加法交换律变形为$(C+D+F)^2$，然后将$C+D$概括为一个数再利用公式，最后再运用公式展开$(C+D)^2$。如果我们没有通过展开（1+

$\frac{1}{2}a^3b^2)^2$、$(-5x+0.6xy^2)^2$、$(3x-6y)^2$、$(m+x+b)^2$、$(4x+y^2-a)^2$、51^2等的中间练习，学了公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$就立即能展开$(C+D+E)(E+C+D)$，那就说明自己有较强的数学材料的概括能力。第（3）问，对我们的思维能力的要求更高了，具有相当的灵活性。先运用公式得到一个基本关系式：$(k+1)^2=k^2+2k+1$，将k看成是变化的自然数，它依次从1取到n，右边的第二项由$2\cdot1$变化到$2\cdot n$，这样出现的$2\cdot1$，$2\cdot2$，$2\cdot3$，$2\cdot4$，…，$2\cdot n$，若相加则有$2\cdot(1+2+\cdots+n)=2S_n$，有我们需要的$S_n$。再根据相加后许多项合并为零，就顺利地求出结果。

【例2】 如图1，一个封闭的立方体放成下面三个不同位置时，所看见的表面上的字母已标明。它六个表面上各标出一个字母，试问看不见的那些面上的字母，在（甲）、（乙）、（丙）图中各是什么？

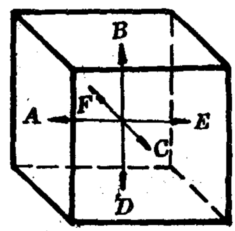


（甲） （乙） （丙）

（图1）

解题思路 观察（甲）、（丙）两图可知，A和E是相对的两面；将（乙）图的A面置于（甲）图位置，F面调到背后，D面调到下面，故可知B、D面相对，C、F面也相对。如图2所示，图1中看不见的字母即可标出。

讲评 这一问题是对我们空间想象能力的考查。立方体是我们熟知的几何体，它是粉笔盒、方木块、魔方玩具等具体物体的抽象，如果完全不借助于具体模型，在头脑里能根据图形想象出这个立方体，并能依据逻辑推理作出正确决断，这就是数学能力强的表现。



（图2）

数学能力是每一个人学习数学（研究现实世界空间形式和数量关系的科学）的一种个性心理特点。如果两个同学具有相同的数学知识并掌握了相同的数学技能，他们的数学能力很可能不同，能力的强弱会影响他们今后的学习。

数学能力大致表现在哪些方面呢？苏联著名心理学家克鲁切茨基在《中小学生数学能力心理学》一书中，提到了以下几点：

（1）使数学材料形式化的能力．如例1中计算$\left(100\frac{1}{2}\right)^2$，能变形为$\left(100+\frac{1}{2}\right)^2$，然后利用乘法公式计算；又如有一应用题："有含盐15%的盐水20公斤，要使此盐水只含盐10%，需加水多少公斤？"若能从给定的已知数学材料中抽出形式（关系或联系）。"加水前的含盐量＝加水后的含盐量"，这就是一种使数学材料形式化的能力。

（2）概括数学材料的能力。如有一个问题："四条直线最多将平面分成多少个部分"？可以在纸上逐一画出四条直线，然后一个一个地数出被划分的部分，得到答案11。如

果再问五条、六条、七条直线又最多能将平面分成多少个部分，就难以一一数出来了，这种就事论事，不注意从一些外表不同的数学材料中看出共同点的思维方法，是概括能力不强的表现。如果我们从二条与一条、三条与二条、四条与三条、……等相邻两条最多划分平面部分的关系来研究，概括出“每增加一条，若与前面的k条直线有k个交点(不共点)，这k个交点就将被增加的直线分成$k+1$段，其中每一段将原平面部分一分为二，即增加了$k+1$个平面部分”，那么问题就好解决多了。力求概括是数学能力强的同学的突出心理特点，事实上我们可以回答更一般的问题：“n条直线最多将平面分成多少个部分？”，有以下推理过程：设$F(k)$表示k条直线最多将平面划分的部分数，$k=1, 2, 3, \cdots, n$。根据上面的概括，有

$$F(k+1)=F(k)+(k+1).$$

则

$$\begin{aligned}
F(1)&=2\\
F(2)&=F(1)+2\\
F(3)&=F(2)+3\\
&\cdots\cdots\\
F(n-1)&=F(n-2)+n-1\\
F(n)&=F(n-1)+n.
\end{aligned}$$

以上n个等式相加，则有

$$\begin{aligned}
F(n)&=2+2+3+4+\cdots+(n-1)+n\\
&=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}.
\end{aligned}$$

这样就得到一个公式 $F(n)=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

（3）运用数字和其他符号进行运算的能力．数学运算

在数学学习中占有重要位置，运算能力是相当重要的能力。

（4）连续而有节奏的逻辑推理能力，其重要性也无需赘言。

（5）缩短推理过程的能力。实际上我们所学的数学公式、定理等即是缩短了推理过程的结果。做一道数学题，有的同学左转右拐，花很多篇幅才解出来，但也有的同学简明扼要就能解答出来。他们两人都做对了，但能力显然是有差别的，如“已知a、b、c是正数，$a>c$，比较$\frac{b}{a}$与$\frac{ab}{a^2-c^2}$的大小”，一般同学按下列推理过程来解：

$$\frac{ab}{a^2-c^2}-\frac{b}{a}=\frac{a^2b-b(a^2-c^2)}{a(a^2-c^2)}$$

$$=\frac{a^2b-a^2b+bc^2}{a(a^2-c^2)}=\frac{bc^2}{a(a^2-c^2)}$$

$\because$ $a>0$，$b>0$，$c>0$，又$a>c$，

$\therefore$ $\frac{bc^2}{a(a^2-c^2)}>0$。

则$\frac{ab}{a^2-c^2}-\frac{b}{a}>0$，故$\frac{ab}{a^2-c^2}>\frac{b}{a}$。

但有的同学这样考虑：

$\because$ $a^2>a^2-c^2>0$，$ab>0$，

$\therefore$ $\frac{ab}{a^2-c^2}>\frac{ab}{a^2}=\frac{b}{a}$。

显然，后一种解法体现了推理过程的缩短。

又如“已知$x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，$y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$，求$x^2-xy+y^2$的值”，若按一般解法，是将$x$、$y$的值代入所求代数式中进行运算，是否可以使运算过程缩短一些呢？

回答是肯定的：$x^2-xy+y^2=(x-y)^2+xy$，易知$x-y=\sqrt{5}$，$xy=\frac{1}{2}$，故$x^2-xy+y^2=5+\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}$。

一道平面几何题，往往有多种解法，其中就会有缩短推理过程的简洁解法。善于选取简洁解法的同学，表现了缩短思维过程的强烈倾向。

（6）逆转心理过程的能力。我们学习数学，有正方向的思维活动，也有逆方向的思维活动。加和减、乘和除、乘方和开方、正和负、增加和减少等都是互逆的问题；原命题和逆命题也是我们时常遇到的互逆问题。具备了逆转心理过程的能力，将有效地提高我们的数学成绩。

（7）灵活地运用知识的能力。《中小学生数学能力心理学》一书中介绍了苏联一个七年级的学生在看到题目"直角三角形的一直角边的长为7cm，求另外两条边的长，它们都是整数。"后，口述思考过程的录音：

"用一个边组成一个三角形？太可笑了……。真的，一个角是已知的——一个直角，但还是不可能的……（画图）。哎呀，这一个条件是清楚的——已知的边和直角是不变的，那么可以做很多个不同的三角形。大概这个问题还缺少什么条件？（主试者回答：不缺条件，这个问题能解。）不可思议……（画图）。对，完全明白了，有无数个解（画图）。与其说我是在解题还不如说我在试图证明问题不能解……。或许有很多解，但这些解都是用分数表示的（又读题目条件）。或许只有一种情况，这个解是用整数表示的（停了七秒钟）。也许是这样——先不谈问题的条件，条件已经知道了……。那么必须设法证明……。如果斜边是a，并且未知的一个直角边是b，那么$a^2=49+b^2$，根据勾股定理。有49

$=a^2-b^2$，……。好，下面该是什么？$a+b=\dfrac{49}{a-b}$。我知道应该得什么了。……，如果a、b是整数，那么它们的和也是一个整数，现在完全清楚了：那就意味着49能被$a-b$整除而没有余数。可是49只能被 7 整除……。但$a-b$不能等于 7，若等于 7 就不能组成三角形了（因为斜边小于一条直角边——两边之和等于第三边）……。不知道这个解是什么，我还未看出来……，但49不仅仅只能被 7 整除，而且也能被 1 和49整除，现在我有一个答案了，因为其中任何一条边都不能是49——而斜边应当大于每一条直角边。因此当$a-b=1$，则$a+b=49$，所以我们得到了斜边是25cm，另一个直角边是24cm。”

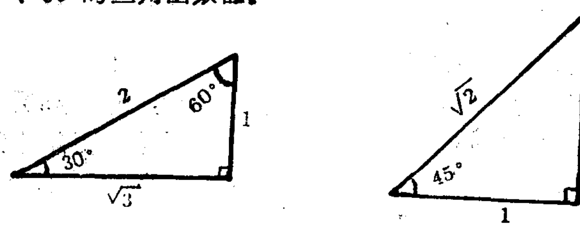
以上共用了 2 分35秒钟。

这位学生经历了这样的心理过程：怀疑题目的正确性和认为缺少条件——认为有无数个解——转入证明——引入字母列得$a+b=\dfrac{49}{a-b}$——只找到49的一个约数 7 并加以否定——进而想到另两个约数 1 或49——否定49得到结论。

以上真实地反映了我们解题时的想法，说明了这位学生（相当于我国初中二年级的学生）具有较强的逆转心理过程和灵活地运用知识的能力，他迅速地摆脱了旧的模式（已知直角三角形的二边的长度，利用勾股定理可求第三边），根据未知的二边是整数的特征，建立了新的思维模式和运算方法。

当然，熟知勾股数的同学，可以更快地求解：$\because 7^2+24^2=25^2$，即 7，24，25是勾股数，所以所求两边长分别是24cm和25cm。

（8）记忆数学材料的能力．有的同学认为学习数学不需要记忆，这是极大的误解．反对死记硬背，并不等于不记忆数学材料．有的同学不仅牢记了数学中的基本概念，主要公理、定理及法则，还记住了一些常用数据、主要方法和典型数学例、习题，这样给解题带来了极大方便．例如已知边长为a的正三角形，它的一些主要元素：外接圆半径$R=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，内切圆半径$r=\frac{\sqrt{3}}{6}a$、高$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$、面积$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$等数值的记忆；又如利用图3来记忆30°、45°、60°的三角函数值．



（图 3）

再如一些公式的变式记忆：

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2},\quad xy=\frac{(x+y)^3-(x^3+y^3)}{3(x+y)},$$

$\triangle ABC$中，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$等．

还有以下结论的记忆：

一元二次方程$ax^2+2bx+c=0$，当判别式$\Delta\geqslant 0$时，两实根为$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$；

一个非零实数a与它的倒数$\frac{1}{a}$的大小比较：

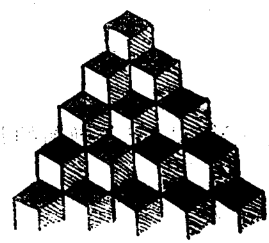
当$|a|=1$时，$a=\frac{1}{a}$；

当$0<a<1$或$a<-1$时，$a<\frac{1}{a}$；

当$-1<a<0$或$a>1$时，$a>\frac{1}{a}$；

……

（9）空间想象能力。如“有一样大小的立方体木块堆在房间的一角，一共垒了10层，这10层看不见的木块共有多少个？”（见图4）。



（图4）

此题需要空间想象能力，实际上可概括以下结论：“每一层看得见的木块数依次为1，2，…，10，也即第n层有n个看得见的木块；每一层看不见的木块数是它上面各层看得见的木块数的总和。”记第n层看不见的木块数为$F(n)$，则有

$F(1)=0$，　$F(2)=1$，　$F(3)=1+2$，

$F(4)=1+2+3$，…，　$F(10)=1+2+\cdots+9$，

故看不见的木块数的总和为

$$0+1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots+(1+2+3+\cdots+9)$$
$$=1+3+6+10+15+21+28+36+45=165.$$

（学了高中数学，我们就会知道n层木块的总个数为$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$，去掉看得见的个数$\frac{n(n+1)}{2}$，则有公式：看不见的总个数$S=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$。当$n=10$时，$S=165$。）

从另一角度思考，第n层看得见的木块下有$n(10-n)$个看不见的木块，故看不见的木块总数为

$$1\times(10-1)+2\times(10-2)+3\times(10-3)+\cdots+9\times(10-9)$$
$$+10\times(10-10)$$
$$=9+2\times8+3\times7+4\times6+5\times5+6\times4+7\times3+8\times2+9$$
$$=165.$$

以上所列举的数学能力的组成，还只是一种假说，其中主要点与我国全日制中学《数学教学大纲》中提到的“培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。”是一致的。

如何培养我们的数学能力？下面将逐一介绍。

（二）把好审题关

【1】概括材料

解题首先要审题，既对题目的数学材料（已知和未知、前提和结论）加以感知和理解。概括数学材料，即从数学对象、关系和运算的结构中抽出类似的、一般的和本质的东西。概括的深刻性、敏捷性和批判性，是概括能力评估的主要标准。

1.怎样培养概括的深刻性？

概括材料的深刻性，是“概括”这一思维活动深度的反映，是概括的敏捷性和批判性的基础。概括材料，首先要掌