高中数学解题技巧

陈汝作　郑又宣　编著

知识出版社·上海

封面设计　林　紫

ISBN 7-5015-5509-5/G·89

定　　价：　4.10 元

高中数学解题技巧

陈汝作　郑又宣　编著

知　识　出

上　海

(沪)新登字 402 号

高中数学解题技巧
陈汝作 郑又宣 编著

知 识 出 版 社 出 版 发 行
(沪 版)
(上海古北路 650 号 邮政编码 200335)
新华书店上海发行所经销 常熟市新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 11 字数 230,000
1992 年 10 月 第 1 版 1992 年 10 月 第 1 次印刷
印数：1-10,000
ISBN 7-5015-5509-5/G·89
定价：4.10 元

内容提要

解决数学问题，除必须掌握有关数学内容的基本知识外，还必须掌握一定的解题技巧。本书着重介绍高中数学解题的基本思路和技巧，除适合面较广的数学归纳法、反证法、构造法及怎样解选择题等均单独设篇介绍外，根据各有关数学问题的特性，具体地分门别类地介绍了各种解题方法和技巧，内容涉及集合、复数、极值、不等式、数列、排列组合、三角函数、立体几何、解析几何等，能使读者收到触类旁通的作用。

前　言

学会解题是学习数学的一个重要方面。熟练掌握数学的基础知识和基本技能是能否顺利解题的基础，深刻理解数学的基本方法、基本思路是能否顺利解题的关键。很难设想，对基本概念模模糊糊、对基本运算陌陌生生，或者对一些常见的数学方法、解题思路都不掌握的人能顺利地解题。因此一个人解题能力的强弱从某种程度上说也确实是比较客观地反映了他掌握基础知识和基本技能的水平，反映了他理解、掌握和熟练应用知识的能力，反映了他分析问题、解决问题的能力。正是这一点，到目前为止的各类及格考试、选拔考试乃至数学竞赛都仍然以应试者解题的成绩来衡量其所具数学水平的高低。

我们编著这本书的目的，就是希望它能为广大读者在灵活运用基础知识，开拓解题思路，提高解题能力方面提供某些帮助和启发，为广大青少年成才尽我们的绵薄之力。对于数学教师，尤其是高中毕业班的任课教师来说，希望这本小册子也能为他们的教学研究提供一些素材和帮助，为开设课外讲座提供一些方便。

本书在编写时采用了专题的形式，每一专题都独立成文、自成一篇。因此读者可根据自己的需要，选择其中某几篇先读。为了帮助读者能加深理解文内的某些解题思路和解题方法，每篇后都备有习题若干，以供练习之用。各专题的选材基

本上以国家教委颁布的高中数学教学大纲的要求为限，虽然个别地方也略有“出格”之处，但仍以高中生可接受为原则。例题中还选用了一些近年来高考的试题。凡与中学数学无关的知识、方法都一律不予介绍。初中数学内容也几无涉及。

由于作者水平有限，编著时虽斟酌再三，恐仍有不少疏漏之处，敬请广大读者予以指正。

作　者

1991.5

目　录

一、怎样解集合的综合题

集合是现代数学中最基本的概念之一，也是中学数学最重要的内容之一。解集合的综合题主要是根据集合相等，子集，并集，交集，补集等概念，并把它们转化为方程、不等式、三角、几何等问题，然后利用有关知识去解。

（一）解集合综合题的常用方法

1. 将所给集合用列举法表示

集合通常可用列举法和描述法来表示。用描述法来表示一个集合，它的优点是比较简洁，能充分反映集合中元素所具有的本质属性。这种表示方法尤其适用于无限集。但是它也有缺点，就是不直观。而列举法表示却比较直观，对有限集、特别是集合中元素较少的更适合。由于集合中的元素比较明确，常会给解题带来方便。因此，将一个用描述法给出的集合改用列举法来表示是最常用的方法。

例 1 设集合$A=\{(x,y)\mid x+y<3, x\in Z, -2<x<2, y\in N\}$，$B=\{0,1,2\}$，$f:(x,y)\to x+y$ 是A到B的对应关系，试判断f是不是从A到B的映射。

分析 要判断f是不是从A到B的映射，就是要判断对于集合A中任意一个元素，根据f这样的对应关系，集合B中是否有唯一确定的元素与之对应。但是集合A是用描述法给出的，它究竟含有哪些元素并不清楚，这样f是不是从A到

B的映射就不易判断了。为此，可先将集合A用列举法来表示。

解 $\because$ $x\in Z$，且$-2<x<2$。 $\therefore$ $x=-1,0,1$

又$\because$ $x+y<3$，$y\in N$

所以$A=\{(-1,1),(-1,2),(-1,3),(0,1),(0,2),(1,1)\}$

因为$f:(x,y)\to x+y$。所以A中任何一个元素，根据f这样的对应关系，都能在B中找到唯一确定的元素与之对应。所以f是从A到B的映射。

例 2 已知$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x|x=\frac{a}{b}, a,b\in A\}$求$B$的子集的个数。

分析 B的子集的个数与B中元素的个数有关。因此可先用列举法来表示集合B，进而再求出它的子集。

解 因为$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\left\{x\middle|x=\frac{a}{b}, a, b\in A\right\}$，

所以集合$B=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, 3, \frac{3}{2}\right\}$

所以集合B的子集个数为

$$C_7^0+C_7^1+C_7^2+\cdots+C_7^7=2^7=128$$

例 3 已知集合$A=\{x|x^2-mx+m^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$，且$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$。求$m$的值。

分析 题目所给出的三个集合都是用描述法表示的。事实上这三个集合都是某个方程的解集，因此只要解出这些方程就可以用列举法来表示这些集合了，然后再根据集合交的概念求出m。

解　由 $\log_2(x^2-5x+8)=1$，解得 $x=2$，$x=3$。所以 $B=\{2,3\}$

由 $x^2+2x-8=0$，可解得 $x=2$，$x=-4$。所以 $C=\{2,-4\}$

因为 $A\cap B\neq\varnothing$，所以2 或 3 中至少有一个是集合 A 的元素。又因为 $A\cap C=\varnothing$，所以 2 不能是集合 A 的元素。故 3 是集合 A 的元素。

因为 3 是集合 A 的元素，所以 3 是方程 $x^2-mx+m^2-19=0$ 的根，

$$3^2-3m+m^2-19=0$$

解这个方程可得 $m_1=5$，$m_2=-2$

当 $m_1=5$ 时，$x^2-mx+m^2-19=x^2-5x+6=0$，它的解是 2，3。此时，$A=\{2,3\}$，因为不符合 $A\cap C=\varnothing$ 的条件，所以 $m_1=5$ 应舍去。

当 $m=-2$ 时，方程 $x^2-mx+m^2-19=x^2+2x-15=0$，它的解是 -5，3。此时 $A=\{-5,3\}$，它符合题意。

所以所求 m 为 -2。

2．数形结合借用几何图形来解

中学数学中所研究的集合不少是数集，或有序实数对集。这些集合的几何意义是数轴上某一线段、某一射线或直角坐标平面上某一条曲线。借助于这些图形来解题，常可使解题方法直观、简捷。

例 4　已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-7x+10\leqslant0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+ax+b<0\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cup B=\{x\,|\,x-3<4\leqslant2x\}$，写出集合 $S=\{x\,|\,x=a+b\}$。

分析　集合 A，B，$A\cup B$ 都是不等式的解集，所以它们都是某个实数集的子集，可以用数轴来表示。在数轴上表示以

后，再求 a,b 就要方便得多。从而$S=\{x|x=a+b\}$也就容易求得。

解 解不等式 $x^2-7x+10\leqslant 0$，得解为 $2\leqslant x\leqslant 5$。所以集合$A=\{x|x^2-7x+10\leqslant 0\}=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$

解不等式 $x-3<4\leqslant 2x$，得解为 $2\leqslant x<7$。所以集合$A\cup B=\{x|x-3<4\leqslant 2x\}=\{x|2\leqslant x<7\}$

将集合$A,A\cup B$用数轴上的点来表示

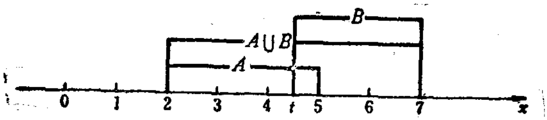

图 1-1

因为 $A\cap B\neq\varnothing, A\cup B=\{x|2\leqslant x<7\}$，所以 $B=\{t|t\leqslant x<7$，且$2\leqslant t\leqslant 5\}$。

由 $x^2+ax+b=(x-t)(x-7)=x^2-(t+7)x+7t$，

所以
$$a+b=-(t+7)+7t=6t-7。$$

$\because$ $2\leqslant t\leqslant 5$， $\therefore$ $5\leqslant a+b=6t-7\leqslant 23$

所以 $S=\{x|x=a+b\}=\{x|5\leqslant x\leqslant 23\}$

例 5 已知集合$M=\{(x,y)|y\geqslant x^2\}$，集合$N=\{(x,y)|x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$。求使 $M\cap N=N$ 成立的 a 的值。

分析 集合M、集合N的元素都是有序实数对，直角坐标平面上以这些有序数对为坐标的点所组成的点集就是集合M、N的几何意义。由此可见，集合M在直角坐标平面中所表示的是抛物线 $y=x^2$ 的内部，集合N所表示的是以$(0,a)$为圆心、1 为半径的圆面。要使$M\cap N=N$成立，就是要使圆全部落在抛物线内(至多只有若干个公共点)。这道题的几何意

义明确后再解就不难了。

解 在直角坐标系中作出与集合M、集合N对应的点集（如图）。

要使$M\cap N=N$成立，即要使圆$x^2+(y-a)^2=1$全部落在抛物线$y=x^2$内。为此方程组

$$\begin{cases}x^2+(y-a)^2=1\\ y=x^2\end{cases}$$

应无解。消元后，可得

$y+(y-a)^2=1$,

整理得

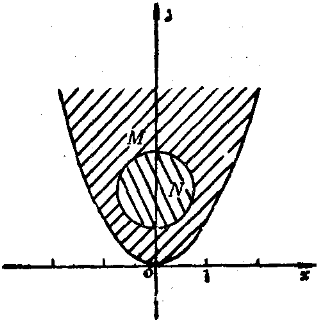

图 1-2

$$y^2-(2a-1)y+a^2-1=0$$

因为方程组无解或有唯一组解，所以判别式

$$\Delta_y=-4a+5\leqslant 0$$

即 $$a\geqslant\frac{5}{4}$$

所以 当 $a\geqslant\frac{5}{4}$时，$M\cap N=N$成立。

例6 设有三个集合：$A=\{(x,y)\,|\,x+ay=1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,ax+y=1\}$，$C=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$，$x$、$y$、$a$都是实数。

(1) 当a为什么值时，集合$(A\cup B)\cap C$的元素为2个；

(2) 当a为什么值时，集合$(A\cup B)\cap C$的元素为3个。

分析 在直角坐标平面上集合A、集合B对应的是两条直线，集合C对应的是单位圆。集合$(A\cup B)\cap C$所对应的就是直线$x+ay=1$与直线$ax+y=1$和单位圆的交点。现在

要求的就是当 a 为什么值时这样的交点有 2 个，a 为什么值时交点有 3 个。几何意义明确后就容易求解了。

解 因集合 $A=\{(x,y)\mid x+ay=1\}$，$B=\{(x,y)\mid ax+y=1\}$，故集合 $A\cup B=\{(x,y)\mid (x+ay-1)(ax+y-1)=0\}$

所以集合 $(A\cup B)\cap C$ 是方程组

$$\begin{cases}(x+ay-1)(ax+y-1)=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

的解集。

解方程组 $\begin{cases}x+ay-1=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

得到解为 $\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\\ y=\dfrac{2a}{1+a^2}\end{cases}$

解方程组 $\begin{cases}ax+y-1=0\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

得到解为 $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x=\dfrac{2a}{1+a^2}\\ y=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\end{cases}$

如果 $(A\cup B)\cap C$ 只有两个元素，则两元素必为 $(0,1)$，$(1,0)$。因此元素 $\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\ \dfrac{2a}{1+a^2}\right)$ 与元素 $(0,1)$ 为同一元素，此时元素 $\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\ \dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$ 与 $(1,0)$ 为同一元素。或者元素 $\left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2},\ \dfrac{2a}{1+a^2}\right)$ 与 $(1,0)$ 相同，则 $\left(\dfrac{2a}{1+a^2},\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)$ 与 $(0,1)$

为同一元素。当元素$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\ \frac{2a}{1+a^2}\right)$与(0,1)相同时，可求得$a=1$；当元素$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\ \frac{2a}{1+a^2}\right)$与(1，0)相同时，可求得$a=0$。所以当$a=0$，或者$a=1$时，集合$(A\cup B)\cap C$的元素为两个。

如果$(A\cup B)\cap C$的元素为三个，则除了元素(0,1)，(1,0)外，元素$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\ \frac{2a}{1+a^2}\right)$与$\left(\frac{2a}{1+a^2},\ \frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$必相同。所以$a=-1+\sqrt{2}$或$a=-1-\sqrt{2}$。即当$a=-1\pm\sqrt{2}$时，集合$(A\cup B)\cap C$的元素为三个。

3．将集合题转化为方程、不等式、排列组合等问题来解

不少集合综合题都可转化为方程等问题来解。这时只要用方程等有关理论就可求得解了。

例 7　如果集合$A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\left\{1,a+1,a^2-2a+2,-\frac{1}{2}(a^2-3a-8),\ a^3+a^2+3a+7\right\}$，且$A\cap B=\{2,5\}$。求实数$a$。

分析　因为$A\cap B=\{2,5\}$，所以5也是A的元素，由此可得$a^3-2a^2-a+7=5$。解这个方程就能求出a的值，然后再判别一下它是否符合题意就能求得所要的a值了。

解　因为$A\cap B=\{2,5\}$，所以$5\in A$，$a^3-2a^2-a+7=5$。解这个方程可得

$$(a+1)(a-1)(a-2)=0$$

所以$a=-1,\ 1,\ 2$。

当$a=-1$时，$a+1=0$，$a^2-2a+2=5$，$-\frac{1}{2}(a^2-3a-8)$