新世紀叢書

不可思議的數字魔力

有趣的數學遊戲

譯　者：林苑明　　審定者：周東川

銀禾文化事業有限公司

新世紀

087
新世紀叢書

有趣的數學

銀禾文化事業公司 印行

新世紀

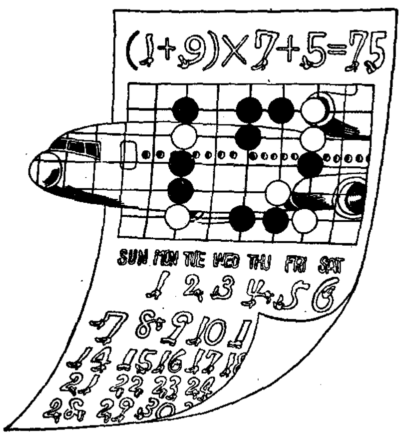
087
新世紀叢書

有趣的數學遊戲

主　編：新世紀編輯小組
審定者：周東川
譯　者：林苑明
出版者：銀禾文化事業有限公司
發行人：陳俊安
地　址：台北市和平東路２段96巷3-1號
電　話：7335575・7335576
郵　撥：0736622-3
定　價：新台幣80元
新聞局登記證局版台業字第3292號
1987年９月初版

目　　錄

第一章　數字在跳
——1975年的世界



含有年數的難題的魅力

將那一年的西元年數作爲題材而做難題，是最近特別盛行的。不只是做的人多了，而題材也富於多樣性。

這種難題的優點是，無論如何每年可以不勞而獲新鮮的材料。而且，比較的容易親近，以及不管作品的好壞，而能夠期待一定的效果，都可以算做優點。還有，這雖然是著者的想法，一直到現在很少有創作難題的人，想自做時，最初要處理，這種難題是不是最適合呢？

那麼，從現在開始，介紹幾個以 1975 所做的「含有年數的難題」，說明其做法。作品當中沒有特別言明的，都是著者的作品。

不可思議的方形

這是像圖 1 那樣，外觀與後面會出現的「方陣（魔方陣）相似，然而是相當奇妙有趣的。有①，②兩個，以①爲例說明一下。首先由這方形中選出喜歡的數字。這個數字假定爲 14。將這 14圈一下，由縱橫看，與14同行或同列的數字消掉。13，21，22，4，7，11全消失。

①成爲 50 的方形

3	13	6	10
4	14	7	11
11	21	14	18
12	22	15	19

②成爲 1975 的方形

386	288	482	192	577
401	303	497	207	592
396	298	492	202	587
391	293	487	197	582
406	308	502	212	597

圖 1　不可思議的方形

其次，由剩下來的數字選第 2 個數字。就假設爲 3 吧！與前面一樣將 3 圈一下，消掉同行及同列的數字。再選第三個數字，而最後剩下來的數字當做第四個數字，設依順是 14 ， 3 ， 18 ， 15 。將這些數字加起來的話

$$14 + 3 + 18 + 15 = 50$$

是 50 。這並不是偶然變成這樣，只要照現在這樣做，無論選任何數字都一定會變成 50 。另一方面，②的方形是，選出來的五個數字的和一定會變成 1975 。我認爲這是很有趣而有效果的。然而，這個概念，很遺憾的並不是著者的創作，而是選自『Mathematic Teacher（數學老師）』（ 1968 年 1 月號）的作品。

然而做法，其實很簡單。在 6 × 6 的框的方形，做做看總和會變成 1976 的。首先將 1976 任意分爲 12 個數字。選數字的方法完全沒有限制，只要 12 個數字

的總和是 1976 就可以 。所以，假定選了下面的 12 個數字。

1，9，7，6，28，530，0，351，45，162，613 及 224。將這些分爲 2 組，寫在 6 × 6 的方格的方形欄外（參照圖 2）。其次，在方格內記入與

	1	9	7	6	28	530
0	1	9	7	6	28	530
351	352	360	358	357	379	881
45	46	54	52	51	73	575
162	163	171	169	168	190	692
613	614	622	620	619	641	1143
224	225	233	231	230	252	754

圖 2　不可思議的方形的做法

其同行及同列的欄外的 2 個數字的和。例如，欄外數字 7 與 45 的交點的方格內記入其和 52。這樣全部方格填滿的話，「不可思議的方形」就完成了。最後，爲了不要讓人家看破做法，將欄外的數字擦掉。

這一次所做的作品是，上面含有西曆年數，而更巧妙，只要知道秘訣，就能夠很容易的放入任何的年數。

連續數

經常想試將年數用任何連續數表示。這一年著者所發現的有

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50$$
$$3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$$
$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2$$
$$= 1975 + 50$$

要發現這樣的東西，並沒有特別的方法。50 可不可以用連續數的和來表示？同樣的可否用連續二乘數的和來表示？什麼是接近 1975 的平方數，用這能不能發現有趣的事情？就是這樣把構想順次確認下去。有時候，觀看「乘算表」或「平方表」等等當中，會發現有趣的關係。還有，有時候，處理數學難題的經驗或整數論的知識會發生效用。

於昭和 45 年，鹿間郁夫氏將

$$45 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$
$$45^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$

這樣的連續數記載在他自己的賀年卡。實際上，這第 2

個是利用下面的等式的。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$$
$$=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2$$

於1975年，除了著者以外，數字難題的老前輩安部元章氏發表了下面絕妙的作品。

$$202^2-201^2+200^2-199^2+198^2$$
$$-197^2+196^2-195^2+194^2-193^2$$
$$=1975=193+194+195+196+197$$
$$+198+199+200+201+202$$

小町算

將由1至9的數字全部使用來表示數字，在日本稱爲「小町算」。將年數以小町算來表示是向來就令人喜歡的。

$$1\times2\times34\times5\times6-7\times8-9$$
$$=1975-1+2+345\times6-7-89$$
$$=1975$$
$$9+8-7+654\times3+2+1=1975$$

像這樣，將1至9的數字按照增加的順序或減少的

順序排列，中間放入適當的運算符號（通常是＋、－、×、÷四種），表示年數。

然而最近，矢部寬氏將表示自1951至2000範圍的數字的小町算用電腦查詢，將其結果發表於『數藝難題』（第84號，1975年5月、6月號）。只要有這個表，今後就能輕易地將該年的小町算得到手，可是，不能得到新發現的喜悅是不得已的。我想由該表將1976以後的各舉1個例子。括弧內的數字是在＋、－、×、÷的範圍內所得到的解答的個數：

$$1976 = 1 + 2 + 34 \times 56 + 78 - 9 \quad (\text{解}5)$$

$$= —— \quad (0)$$

$$1977 = 1 + 2 + 345 \times 6 - 7 - 89 \quad (\text{解}6)$$

$$= 9 - 8 - 7 + 654 \times 3 + 21 \quad (\text{解}4)$$

$$1978 = 1 \times 2 - 3 + 45 \times 6 \times 7 + 89 \quad (\text{解}1)$$

$$= 98 \div 7 + 654 \times 3 + 2 \div 1 \quad (\text{解}4)$$

$$1979 = 12 \times 3 \div 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 89 \quad (\text{解}7)$$

$$= 98 \times 7 + 6 \times 5 \times 43 + 2 + 1 \quad (\text{解}2)$$

$$1980 = -1 - 2 + 34 \times 56 + 7 + 8 \times 9 \quad (\text{解}4)$$

$= 987 + 6 \times 54 \times 3 + 21$ （解 1 ）

$1981 = 12 + 34 \times 56 + 7 \times 8 + 9$（解 8 ）

$= 98 + 7 \times 65 \times 4 + 3 \times 21$（解 2 ）

$1982 = 1 - 2 + 34 \times 56 + 7 + 8 \times 9$

$=$——（0） （解 2 ）

$1983 = 12 \div 3 + 45 \times 6 \times 7 + 89$（解 4 ）

$= 9 + 8 + 7 + 654 \times 3 - 2 - 1$

（解 1 ）

$1984 = 1 \times 2 + 3 + 45 \times 6 \times 7 + 89$

（解 6 ）

$= 9 + 8 + 7 + 654 \times 3 - 2 \div 1$

（解 2 ）

$1985 = 1 \times 23 + 45 \times 6 \times 7 + 8 \times 9$

（解 8 ）

$= - 98 - 76 + 5 \times 432 - 1$（解 2 ）

另一方面，自 0 至 100 的小町算表，於 1973 年由大矢建正氏用電腦作表，由鈴木昭雄氏以自家版刊行。表示昭和年數的小町算，可以由這個表求出。只因昭和年數的「解」很多，沒有像西曆年數那樣有趣。在這裡

舉 50 的幾個例子吧！這變成 50 的小町算也可以得到，增加的順序 237 種，減少的順序 314 種。

$$12-3+45+6+7-8-9=50$$
$$1\times 23\times 4+5+6\times 7-89=50$$
$$98+7-65+4+3+2+1=50$$
$$98-76+5+4\times 3\times 2-1=50$$

年數迷路

上面一直談數字難題，現在爲了改變氣氛，介紹幾個數字難題以外的事情。圖 3 是迷路的數字版。稱爲「1975 迷路」。由右上角進入。沿 1 → 9 → 7 → 5 → 1 → 9 → 7 → 5 →……，想從左下角出來，不可以斜行，也不可以將同一格通過 2 次。

	1	9	5	7	9	1	←
	9	1	7	9	1	9	
	5	7	9	1	5	7	
	9	1	7	9	9	5	
	9	5	9	7	5	1	
	7	9	1	9	1	9	
←	5	1	5	7	9	7	

圖 3　1975 迷路

這個問題直接處理 1975 ，然而，由出發點至終點所通過的格的合計會變成該年的年數來選過程的問題等，也可以考慮另外的形態的迷路。

收拾碁石

收拾碁石是，將碁石排成一形態，按規則收拾碁石，收拾到 1 個都不留的遊戲。該規則是，

1.可以由任何地方開始收拾
2.可以縱、橫收拾，可是，不可以斜行。還有，途上的碁石一定要收拾。
3.不可以直接後退。
4.如果在同一線上，雖然離開也可以收拾

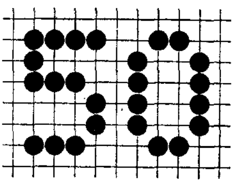


圖 4　收拾 50

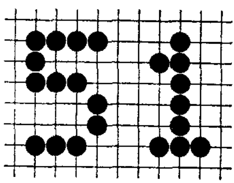


圖 5　收拾 51

那麼，圖 4 所示的是「收拾 50」，是要將排成 50 字形的碁石收拾。又如像圖 5 ，將 0 改變爲 1 ，就變成「收拾 51」。以問題來說，這「收拾 51」較好。無論那一個問題，5 的字本身就可以收拾，可是，0 或 1 是

不能夠完全收拾。成爲 50 或 51的字形才可以完全收拾。這是這些問題的要點。

要解答這個問題，我認爲首先以準備活動，只收拾 5 較好。做好以後，才收拾 50 或 51 就可以。還有，解答刊載在本章的後面。關於收拾碁石將在這本書的第12章再詳細檢討。

星　陣

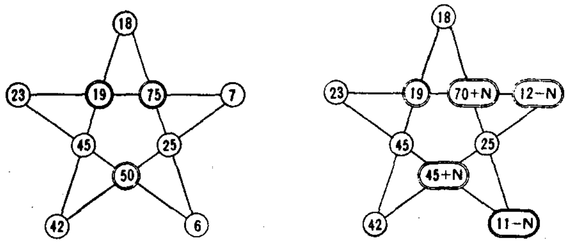


圖 6　含有年數的星陣

所謂「星陣」是，將數字配於星形，使各邊的數字的和爲一定的。圖 6 的左圖是將西曆年數 1975 與昭和年數 50 包含在裡面的星陣，各邊的和是 124。將這自 1970 年至 1980年之間隨時都可以使用的，就是圖 6 的右圖。N 是表示西曆年數的單位數。還有，以$N=10$ 就可以作成 1980 年用。

方　陣（魔方陣）

所謂「方陣」是，將數字排在四角，使縱、橫及斜（對角線），任何一列的數字的和一定。圖 7 是含有年數的方陣的一個例子，可以看到左上是 1975 ，中央是 50 。這個方陣的和是 91 。

19	7	5	60
45	20	12	14
17	9	50	15
10	55	24	2

圖 7　含有年數的方陣

那麼，這樣含有年數的方法的做法的最簡單的是，利用像圖 8 的右圖那樣的萬能方陣。這是，因為無論文字上面充當任何數字都會成立方陣，所以，稱為「萬能方陣」。可以成立的理由是，一目了然。取縱、橫及斜的任何一列都各含有 A 、B 、C 及 D 各 1 個，所以，當然其和是 $A+B+C+D$ 。所以，設 $A=1$ ；$B=9$ ；$C=7$ ；$D=5$ ，馬上就可以做成編有 1975 的方陣。

可是，如果這樣太單純而沒有興趣的話，利用像圖 8 的右圖那樣的萬能方陣就好。這可以成立為方陣的理