

模糊理论与工程系列丛书



全国
优秀出版社
武汉大学出版社

模糊集理论与近似推理

■ Etienne E. Kerre[比]

黄崇福

阮达[比]

著



模糊理论与工程系列丛书

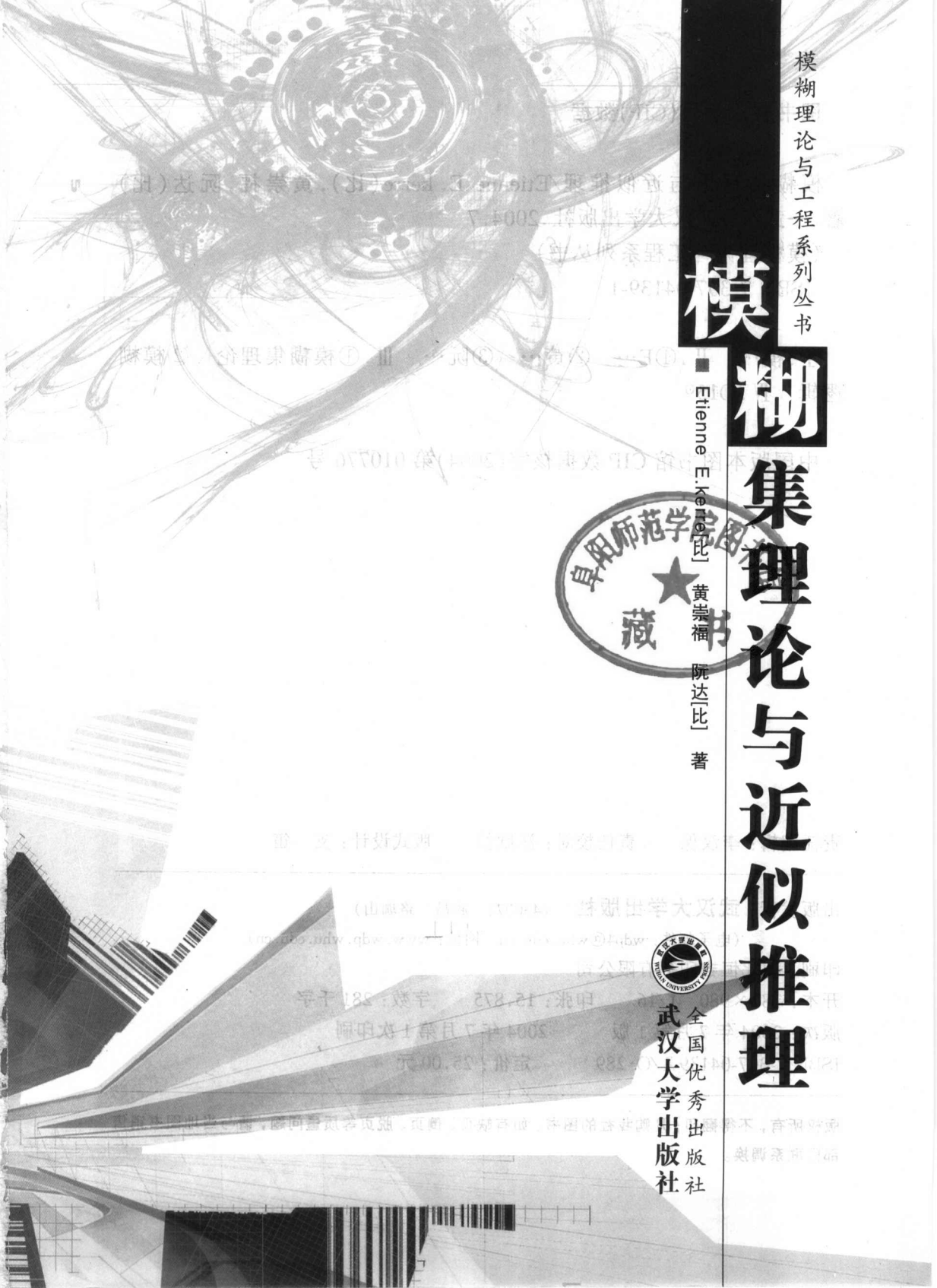
模糊集理论与近似推理

■ Etienne E. Kerf [比]

黄崇禧 阮达比 著



全国优秀出版社
武汉大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

模糊集理论与近似推理/Etienne E. kerre(比),黄崇福,阮达(比)
著. —武汉:武汉大学出版社,2004.7
(模糊理论与工程系列丛书)
ISBN 7-307-04139-1

I.模… II.①E… ②黄… ③阮… III.①模糊集理论 ②模糊
逻辑 IV.O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 010776 号

责任编辑:李汉保 责任校对:汪欣怡 版式设计:支 笛

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.whu.edu.cn)

印刷:湖北恒吉印务有限公司

开本:787×980 1/16 印张:15.875 字数:281千字

版次:2004年7月第1版 2004年7月第1次印刷

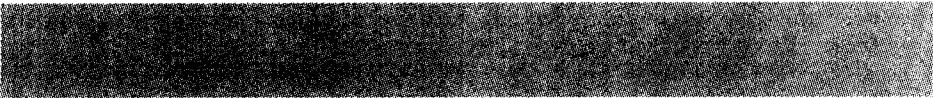
ISBN 7-307-04139-1/O·289 定价:25.00元

版权所有,不得翻印;凡购我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售
部门联系调换。



开瑞尔(Etienne E. Kerre),教授,比利时 Zele 市人。1967 年获得根特大学数学专业硕士学位,1968 年获得教师资格,1970 年获得关于低能电子衍射方面的博士学位,并发表了一些有关方面的论文。自 1978 年开瑞尔开始从事模糊集理论方面的研究,到目前为止,在国际期刊和国际会议论文集上发表了 180 多篇关于模糊集理论的基础性和应用性方面的论文。开瑞尔的研究兴趣包括:模糊拓扑、模糊代数结构、特殊的模糊关系微积分、模糊推理、可能性理论和可靠性理论。1991 年,他出版了一本题为《模糊集理论的基本原理及其部分应用简介》的著作,该著作在 1993 年修订后进行了再版。开瑞尔已指导了 12 位模糊集理论方向的博士研究生,他们来自于比利时、埃及、保加利亚和中国。目前他是根特大学模糊建模和不确定性研究中心主任,为该中心计算机科学专业的本科生教授三门关于数学分析方面的课程,还为数学和计算机科学专业的研究生教授四门关于模糊集理论方面的课程。同时他也在美国内布拉斯加州大学开设了几门关于模糊集理论和近似推理方面的课程。目前他是模糊集领域里 20 多个国际期刊的审稿人,以及许多国际期刊编委。通信地址:Etienne E. Kerre, Fuzziness and Uncertainty Modelling Research Unit, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Ghent University, Krijgslaan 281-S 9, 9000 Gent, Belgium。

黄崇福,教授,现任北京师范大学资源学院资源技术与工程研究所副所长。1982 年 7 月在云南大学数学系获学士学位,1985 年 11 月在国家地震局工程力学研究所获硕士学位,1993 年 5 月在北京师范大学数学系获博士学位,1995 年 3 月从北京航空航天大学管理学院博士后出站。曾在前南斯拉夫参加联合国教科文组织举办的工程地震培训班,



在香港中文大学、日本东京理科大学、美国内布拉斯加州大学从事合作研究;曾在比利时根特大学讲学,在德国多特蒙德大学任 Mercator 讲座教授。曾应邀在法国巴黎第 6 大学、德国汉堡大学、日本 Honda 公司欧洲研究和发展部作专场演讲。主要从事自然灾害风险分析和模糊信息优化处理的教学和研究工作。已发表学术论文 84 篇,出版著作 7 部,主持各种科学研究基金项目 9 项。通信地址:北京新外大街 19 号,北京师范大学资源学院(邮政编码:100875)。

阮达,高级研究员,比利时籍华人。上海复旦大学数学系学士(1983),比利时根特(Gent)大学应用数学与计算机系理学博士(1990)。先后 2 期于比利时国家核能研究中心(SCK·CEN)获博士后(1991~1993,1994~1995)。分别从事石油勘探中的有限元计算机软件包开发研制和核反应堆上的智能控制研究。自 1996 年任 SCK·CEN 高级研究员及项目负责人,主办应用智能系统(FLINS)国际系列会议(自 1994 年每 2 年一次)。获中国核动力研究院名誉博士(1995)。自 2000 年任成都西南交大顾问教授,2001~2002 年兼任挪威国家能源技术研究所客座研究员。自 2003 年任墨西哥国家核能研究所高级技术顾问。主要从事数学建模、智能计算、智能信息处理、智能决策与控制及其在信息管理、机器人、核反应堆有关安全工程等应用领域的研究。先后发表学术论文 100 余篇,在 Kluwer、Springer 等出版书 17 部,任 10 多个 SCI/EI 检索的国际杂志专集特邀编辑,国际杂志 Fuzzy sets and systems 编委,Soft computing & Automation 欧洲地区主编,及 FLINS 国际会议论文集主编(该论文集自 1998 年被 ISTIP 检索)。通讯地址:Da Ruan, Belgian Nuclear Research Centre (SCK·CEN), Boeretang 200, B - 2400 Mol, Belgium。

序

1965年,美国计算机与控制论专家 L. A. Zadeh 教授提出了 Fuzzy 集概念,创造了研究模糊性或不确定性问题的理论方法,迄今已成为一个较为完善的数学分支。

近四十年来,模糊理论与技术得到了迅猛发展,国内外学者在这个领域做了大量卓有成效的工作,其中许多探索是具有突破性的。模糊理论与技术一个突出的优点就是能较好地描述与仿效人的思维方式,总结和反映人的体会与经验,对复杂事物和系统可进行模糊度量、模糊识别、模糊推理、模糊控制与模糊决策。尤其是模糊理论与人工智能在神经网络和专家系统等方面相互结合的研究已涉及到计算机、多媒体、自动控制以及信息采集与处理等一系列高新技术的开发与利用,有力地推动了应用科学、决策科学、管理科学与社会科学的进步,这种学术理论体系不断完善的新成果正在迅速地转变成生产力促进社会物质文明水平的不断提高。

为了系统地归纳总结模糊理论与技术的学术成就,系统地向广大读者介绍、普及模糊数学的基础理论与基本知识,进一步推动该学科的发展,使之有利于为社会经济建设服务,我们经过多年的酝酿、策划与探索,决定组织出版“模糊理论与工程系列丛书”。这套系列丛书中的大部分既可作为理工类本科生、硕士生的教材,也可作为高等院校教师、相关科技工作者与模糊理论爱好者的参考读本。

“模糊理论与工程系列丛书”能够顺利出版主要得益于两方面的大力支持:

其一,得益于我国模糊数学界广大专家、学者的支持。2002年11月全国第11届模糊数学年会在厦门集美大学召开,我们为组织该丛书的出版广泛征求了意见,得到了广大与会者的大力支持,不少学者表示愿承担该系列丛书的撰写工作。尤其是王国俊教授、吴从炘教授、应明生教授、张文修教授、罗懋康教授、韩立岩教授等,在表示支持组织出版该丛书的同时,对该丛书的理论构架、选题定位以及一些具体操作细节提出了许多宝贵的指导性意见。特别值得提及的是,厦门会议以后,得到了刘应明院士以及广大专家、学者的大力支持,组成了以刘应明院士为名誉主编的本系列丛书编委会。组织这个编委会的目的一是对该丛书的指导思想、选题思路以及今后的趋势将经常听取编委们的意见;二是对本系

列丛书中拟将出版的每一本书都要由相关编委审核把关,尔后付梓,以确保丛书质量。

其二,得益于武汉大学出版社的大力支持,武汉大学出版社是被中共中央宣传部,国家新闻出版署联合授予的全国优秀出版社之一。该社以出书严谨著称,建社二十多年来,所出版的一大批专著、教材曾荣获“中国图书奖”、“国家图书奖”、“五个一工程奖”等国家级奖励。武汉大学出版社社长、总编与相关编辑对本系列丛书的出版给予了大力支持,多年来他们做了许多深入细致的工作,使这套系列丛书的第一批作品得以顺利出版。

在此我代表本系列丛书的全体作者,对各位专家、学者,武汉大学出版社的领导与编辑表示由衷的感谢!真诚地希望广大专家、学者对本系列丛书提出宝贵的意见,使之日臻完善;热诚地欢迎广大专家、学者积极参与本丛书的编撰工作,使之日渐丰富。组织出版这套系列丛书本身就是一项系统工程。需要各位专家、学者以及方方面面的鼎力相助。倘若这套系列丛书能对广大读者有所裨益,能在浩瀚的书海中泛起一片闪光的涟漪,作为本系列丛书的主编,我就喜出望外了。谨此为序。

欧阳绵

2004年4月于武汉大学

前 言

在过去的 30 年里,计算机技术的迅速发展带动着我们的社会从工业化向信息化迈进。当代计算机处理数据能力的极大增长导致大批新的应用领域涌现,诸如对于复杂工业和控制过程的模拟以及庞大数据库的建立。近年来计算机的另一重要应用发挥在知识工程领域(Zadeh, 1984)。智能系统的设计是人工智能所感兴趣的主要课题之一。广泛的观点认为这里我们所关注的不仅仅只限于对信息按语法逐字逐句地传输,而更多地从它的语义角度考虑(Zadeh, 1978)。一个好的智能系统需要尽可能地接近专家本人的知识和资料处理的方式。大多数按照经典方式设计的智能系统基于二元逻辑和经典集合论。因此这些智能系统事先假定已定义好的概念、推断和规则以及事实间的关系为真。不幸的是,专家们所用的事实和 if-then 规则不总适合那些分明的准则。广泛被接受的观点是:人们运用语言值和近似推理来处理不精确性和不确定性,而不是采用精确的数值和一阶逻辑的方法。因此,寻求形式模型来表示和处理不精确和不确定的信息得到广泛认可。当罗素(Russell, 1923)在文献中写道:“所有二值逻辑都习惯上假定使用精确符号……因此它仅适用于虚幻的存在,而不适用于现实生活……逻辑比其他学科使我们更接近天堂”时早已认识到二值逻辑的不足。

一般地,不精确性和不确定性是信息不完备的两个内在的特征。一个信息条目能够用下面的四元组来表述:

(属性、对象、值、置信度)

一个命题被认为是不确定的只要它的真假不能被判定,信息的这方面特征由置信度来表示,即,由四元组的第四个元素表达。传统上处理不确定性有两个途径:概率理论和误差分析。正如扎德(Zadeh, 1986)的文章曾深入探讨过,科学界中用经典概率论处理任何不确定性的一贯传统应当受到质疑。经典概率理论由于其表达不够充分因而不能充当一种不确定性的描述语言用在人工智能中。传统概率理论无法描述模糊谓词诸如年轻、小、大得多;或者模糊量词诸如大多数、许多、一些、大约 25;或者模糊可能性诸如很可能、不大可能;或者模糊真值诸如绝对真、差不多假;或者模糊修饰词诸如非常、差不多,等等。另一方面,一个命题被认为是不精确的当它包含了未精确定义的推断。信息的这方面特征由

四元组的第三个元素表达。论域 X 上的任意一个普通子集 A 将该论域分割成不相交的两部分:一部分由论域中属于 A 的元素或者满足描述 A 中元素特征或推断的元素组成;另一部分由不属于 A 或不满足相关特性的元素组成。这种分明的划分是作为经典集合论基础的二值逻辑的一个直接结果。更明确地,这种界限分明的划分依赖的法则是排中律,即,对于每一个公式 P , P 或 $\text{NOT } P$ 二者必居其一。然而,这种划分方法可以被视为是纯数学所特有的。事实上,大多数的概念不可能通过这么明确的方式解决。比如 16^{16} 是一个大数,这朵花是红色的,失业率很高,等等。验证一个断言,如 16^{16} 是一个大数,要事先假设存在一个由大数组成的集合,它能够用来检验 16^{16} 是否属于其中。对于显而易见的情况,这样的处理不会引起任何问题,但是对于剩余情况,所谓的边界情况,就会带来严重疑问。为了定义大数所组成的集合,我们总会遇到如下的难题:边界应该选在什么地方?即如何确定这样一个数使得所有大于它的数都被看做是大数,而其余的不是大数。

传统上存在两种解决方法。一种方法是一些学者(Gentilhomme, 1968)将论域分割成互不相交的三个区域:由一定满足论断“大”的那些元素所组成的确定区域;由一定不满足论断的元素所组成的否定区域;以及边界区域,称为 Flou^① 区域。这就表明,潜在的逻辑是三元的而不是二元的。另一类学者声称边界情况的消除一定得通过定义相关概念来决定明确的边界。以“红色”这个推断为例,可以定义为:在波长为 $580.27\text{m}\mu$ 和 $702.35\text{m}\mu$ 之间的单色光照射下,从均匀的反射面上,一个红色物体是不可以识别的。这种方式的精确包含很多人为的因素并且不实用。

在过去的 30 年里,许多新的解决不精确和不确定的模型已经发展起来,这些模型包括:模糊集、Flou 集、直觉集、粗集、半定集、二重模糊集、灰色理论、置信理论等,毫无疑问其中最成熟的是模糊集理论。该理论最初由扎德(Zadeh, 1965)首次提出。扎德教授没有尝试将论域划分成两部分(二元逻辑)或三部分(三元逻辑),而是提出开创性的方法来表示模糊推断如高、低、大、小等。他引进从非隶属到隶属的逐渐过渡来取代一个分明边界或一个有明确边界情形的集合,允许部分程度的隶属。某对象当它满足一个模糊推断如“高”时,相当于它在潜在的论域(自然数集合)上建立了一个模糊集合,从而从非隶属到隶属的过渡是渐渐地,不是突然地。这使得某个元素比另一个元素更属于分类“高”的断言变得有意义。

自 1965 年以来,模糊集理论几乎已经渗入到基于经典集合理论的纯数学的

① Flou 一词来自法语,翻译成英文为“Fuzzy”,即中文的“模糊”。

所有分支中:拓扑、代数结构、几何、算术、测度论、概率论、范畴论等,更引人注目的是这一新理论应用领域的广泛性:近似推理模型、专家系统、语言学、定理证明技术以及逻辑编程、学习系统、信息检索、数据库、病理诊断、模式识别、聚类与分类技术、图像处理与计算机视觉、控制论与系统论、决策与偏好结构、可靠性理论、心理学、社会学等。最后,值得一提的是从20世纪80年代末到90年代初的10年里,日本研究人员在模糊集理论的实际应用方面独领风骚,让整个模糊学界为之惊叹。这些创新成果包括:节能空调——能够使人更舒适;模糊监控电梯——能够使平均等待时间降低20%;模糊洗衣机——能够根据衣物的不洁程度选择最佳的清洁剂用量;模糊起重机——可以模拟人的操作;模糊摄像机——可以估计焦距和照明情况,等等。

本书旨在为模糊集理论的进一步推广作出贡献。

模糊集理论中的核心概念是序。由于在基础数学理论中我们更关注映射的算术运算和各方面的性质如连续性、可微性等,很少关注序关系,因此在本书的第一章我们就给出序论中常用的一些基本概念,如:偏序集、格(被当做序结构及代数结构)、布尔代数和基于单位区间的 Morgan 或 Kleene 代数等。

第二章内容覆盖了模糊集理论的基本原理。这一章开头概括介绍扎德在1965年创立的模糊集类的结构:集合论的并和交可以分别一般化为取大和取小运算。理论表明模糊集类构成一个狄摩根代数,即,一个带有伪余运算的完全分配格满足狄摩根律和对合律。这一章详细介绍了模糊集类上的两种可供选择的运算集,接着对于一些可供选择的不确定性模型及其相互间的关系进行刻画:Flou集、L-Flou集、L-Fuzzy集等。特别地,这一章包括著名的 Negoita 和 Ralescu 表示定理:他们证明了对于某些特殊的格 L , 存在于 L -Flow 集类和 L -Fuzzy 集类之间的一个一一对应。由于模糊集合通常是依赖于上下文,并且在同一上下文中还依赖于观察者,因此可以很方便地通过带参数的隶属函数来处理这些依赖性。这些内容的具体介绍参照 §2.9。§2.10 介绍模糊集的卡氏积及其性质。日常交流和所谓近似推理技术的能力在于使用语言而非数值。语言变量是指那些取值如“低”、“高”、“中等”的变量。扎德注意到语言变量的变化范围总是存在类似的结构:由最初的一对反义词开始构造,其他值通过逻辑连接词和语气词来构建。所使用的方法包括逻辑连接和语言修饰方法。这些内容在 §2.11 中作了介绍。在一个映射之下,一个集合的正向映像和逆向映像的经典概念,是发展诸如连续性、可测性这些基本概念的基础。通过扎德的扩张原理,正映像的概念已经拓展到了模糊集, §2.12 将会对这些内容进行简要介绍。接下来的两节将有界性和凸性引入到模糊集中。§2.15 介绍模糊性的指数。至此我们对于模糊集理论的基本概念已经有了一个概观。

不论从理论角度还是从实际操作角度来看,对于关系概念的把握是最基本的。有时科学本身被描述成对事物、状态、结构等之间关系的发现。无法想象数学一旦失去了诸如 $\in$ 、 $\subseteq$ 、 $=$ 、 $\geq$ 等基本关系会是什么样的。从实际观点来看,关系的重要性远比在信息查询、关系数据库、病理诊断和专家系统所展示的要大。基于上述原因,本书专门列一章讨论模糊关系。在这一章当中,我们不仅仅关注模糊关系而且花大量篇幅讲述正向映像和传统关系与模糊关系的合成这两个新引入的概念。更深入的讨论包括:凸模糊关系,模糊关系投影和柱体扩张以及特殊的模糊关系如相似关系和相像关系等。

模糊集理论所关注的一个基本问题是如何将经典集值运算如并、交、补等,一般化到模糊集中来。在第二章中我们已经对一些相关内容做了介绍。许多学者已经对此问题作了基础性的研究工作。在第四章里我们给出一些理论结果,大多是 D. Dubois 和 H. Prade 的研究结果,以及一些实验结果,大多是 H. J. Zimmermann 和其合作伙伴完成的。

第五章讨论了近似推理,介绍了 18 种广泛使用的模糊蕴涵算子及一些模糊推理方法。可以证明,模糊数上推广的算术运算可以比一些现存的流行方法有更好的计算结果。

第六章的开头部分,我们给出了一个理论性的、可协调的模糊数的描述和它们的性质。更进一步地,我们试图把已存在的不同定义连接起来。在这一章的第二部分,我们将给出模糊量的计算机表达式。使用这种式子,我们显示了模糊量上的算术运算,尤其是对模糊数进行的运算,运行效果良好。

第七章介绍了一些模糊测度。我们从使用最广泛的 Sugeno 模糊测度开始。这一测度一般化了概率测度,途径是放弃可加性,而用一个较弱的,即单调性来代替。之后我们陆续介绍:概率测度、可能性测度、必然性测度、 λ -模糊测度、可信函数-信任性测度、协调可信函数、合理性测度等。

最后一章我们给出了基于模糊真值的一个专家系统外壳的描述。这一专家系统外壳是 A. Van Schooten 在 1988 年开发的。首先给出经典专家系统的形式化描述:包含在数据库的一个事实中的不确定性可以由二元真值集上的一个可能性分布来表示。包含在规则库的一条规则中的不确定性可以由二元真值集自身的卡氏积上的一个可能性分布来表示。自然地推理机就可以建立在一个合适的矩阵乘法之上。之后我们将这一方法扩展到模糊专家系统中。最后,我们给出一个基于 Lisp 语言的知识工程软件工具,它已经在 COMMON LISP 开发环境中作为一个软件层被建立起来。

作者衷心感谢 Radecki, D. Guinan, D. Holliday, J. Niemann, P. Poulovsky, K. Streicher 和 D. Miller 给本书的有益指点。特别感谢马骏博士翻译、整理了第

五章的内容。还要感谢宗恬对手稿的排版和编辑工作。在此也感谢徐杨教授和陈国青教授为本书的撰著给予的支持和帮助。最后,作者要感谢佛郎芒政府对该书出版提供的资金援助(该项目编号:9706B)。

作者

2003.12.25

目 录

第一章 格论的基本概念	1
§ 1.1 偏序集合	1
§ 1.2 格	2
§ 1.3 布尔代数	5
第二章 模糊集概念及其推广	9
§ 2.1 引言	9
§ 2.2 定义	11
§ 2.3 模糊集的摩根代数	11
§ 2.4 $\mathcal{P}(X)$ 上可选择的运算	15
§ 2.5 以模糊单点集为术语的扎德型运算	18
§ 2.6 弱 α -截集和强 α -截集	20
§ 2.7 Flou 集, n -Flou 集	22
§ 2.8 L-模糊集, L-Flou 集	24
§ 2.9 一些典型的隶属函数	32
§ 2.10 模糊集的卡氏积	34
§ 2.11 模糊集的修饰算子	37
§ 2.12 通常映射下模糊集的映像	45
§ 2.13 $\mathbb{R}^n$ 上的有界模糊集	50
§ 2.14 凸模糊集	52
§ 2.15 模糊性的指数	58
第三章 模糊关系	63
§ 3.1 引言	63
§ 3.2 定义	66
§ 3.3 模糊关系间的运算	68

§ 3.4	模糊关系的合成	70
§ 3.5	模糊关系和凸性	77
§ 3.6	模糊关系的投影和柱体扩张	80
§ 3.7	在一个集合上的特殊二元模糊关系	83
第四章	模糊连接	94
§ 4.1	引言	94
§ 4.2	模糊连接的定义	97
§ 4.3	对偶原理	99
§ 4.4	二元对偶运算表	99
§ 4.5	模糊连接的性质	100
§ 4.6	实验结果	104
第五章	近似推理基础	107
§ 5.1	模糊蕴涵算子	107
§ 5.2	合成推理规则	120
§ 5.3	基于合成推理规则的模糊推理	125
§ 5.4	模糊事例方法	140
第六章	模糊量的计算	150
§ 6.1	引言	150
§ 6.2	定义	150
§ 6.3	对 α -截集增加的性质	151
§ 6.4	某些拓扑考虑	153
§ 6.5	模糊量的一元运算	154
§ 6.6	模糊量的二元运算	156
§ 6.7	模糊量的计算机表达式	159
§ 6.8	实现有限支集分段线性模糊量二元运算的算法	163
§ 6.9	现有方法的比较	165
§ 6.10	模糊专家系统中近似推理技术的应用	167
第七章	不确定性测度-模糊测度	168
§ 7.1	引言	168

§ 7.2 模糊测度	172
§ 7.3 特殊的模糊测度	178
§ 7.4 不精确性表达	191
第八章 基于模糊真值的一个专家系统外壳的描述	195
§ 8.1 经典专家系统的形式化描述	195
§ 8.2 模糊专家系统的形式化描述	199
§ 8.3 FDL 简述	210
§ 8.4 EDL 简述	215
参考文献	223

第一章 格论的基本概念

19 世纪上半叶,乔治布尔试图形式化命题逻辑导致了布尔代数的产生。19 世纪后期,在研究布尔代数公理化的过程中,Charles Peirce 和 Ernst Schröder 发现,引入格的概念是很有用的。虽然有几个数学家,特别是 Edward Huntington,他们早期工作的一些结果非常漂亮,但那些结果并没有引起数学界的重视。对许多数学科目来讲,格论之所以能变得越来越重要并引起关注,应归功于Garrett Birkhoff 在 20 世纪上半叶所做的工作。

§ 1.1 偏序集合

实数集 $\mathbb{R}$ 的算术性质可以用加和乘的术语来表述,因而拓扑的性质即用序关系的术语来表述。这种关系的基本性质是:

P1 $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$, 即 $\leq$ 是自反的;

P2 $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} (a \leq b \text{ 且 } b \leq a \text{ 则 } a = b)$, 即 $\leq$ 是反对称的;

P3 $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 (a \leq b \text{ 且 } b \leq c \text{ 则 } a \leq c)$, 即 $\leq$ 是传递的;

P4 $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 (a \leq b \text{ 或 } b \leq a)$, 即 $\leq$ 是完全的或线性的。

具有性质 P1~P4 的二元关系的例子有许多,而具有性质 P1~P3 的例子则更多。仅这一事实兴许还提不出正当的理由去引入一个新的概念。然而,它已显示出,许多基本的概念和性质实际是依赖于 P1~P3 的。这就使得,任何时候当具有一个满足 P1~P3 的关系时,都有利于我们能够使用这些基本的概念和性质。满足 P1~P3 的关系,称之为偏序关系。具有这种关系的集合,称为偏序集合,简称偏序集。严格地讲,一个偏序集 $(P, \leq)$ 由一个非空集合 P 和一个二元关系“ $\leq$ ”组成,在 P 上的该二元关系满足 P1, P2 和 P3。记 $a \geq b$ 代表 $b \leq a$ 。如果偏序集 $(P, \leq)$ 满足 P4, 则称其为一条链或一个完全的(或线性的)序集。如果 $a \leq b$, 则 a 和 b 被说成是可比较的。让我们回顾偏序集中一些有用的概念。令 $(P, \leq)$ 是一偏序集, $A \subseteq P$ 且 $a \in P$ 。

1.1.1 偏序集子集的上界和下界

a 是 A 的一个上界, 当且仅当 $\forall x \in A, x \leq a$;

a 是 A 的一个下界, 当且仅当 $\forall x \in A, a \leq x$ 。

A 是有上界的, 当且仅当 $\exists a \in P, a$ 是 A 的一个上界;

A 是有下界的, 当且仅当 $\exists a \in P, a$ 是 A 的一个下界;

A 是有界的, 当且仅当 A 既有上界又有下界。

1.1.2 最小上界($l.u.b.$)—最大下界($g.l.b.$)

a 是 A 的最小上界 $\Leftrightarrow a$ 是 A 的一个上界, 并且 $\forall b, b$ 是 A 的一个上界, $a \leq b$;

a 是 A 的最大下界 $\Leftrightarrow a$ 是 A 的一个下界, 并且 $\forall b, b$ 是 A 的一个下界, $b \leq a$ 。

记: $a = \sup A$ 或 $a = l.u.b.(A)$;

$b = \inf A$ 或 $b = g.l.b.(A)$ 。

从反对称性可知, 如果 A 的最小上界存在, 则它是惟一的。

1.1.3 最大元—最小元

a 是 A 的最大元 $\Leftrightarrow a \in A$ 且 a 是 A 的一个上界;

a 是 A 的最小元 $\Leftrightarrow a \in A$ 且 a 是 A 的一个下界。

由反对称性可知, 一个最大元的存在暗示着它的惟一性。

通常, 若 $(P, \leq)$ 的最大元存在, 记此元为 1; 若最小元存在, 记此元为 0。

1.1.4 链中上确界和下确界的性质

从每一个序关系 $\leq$, 可以得出一个严格的序关系 $<$:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \text{ 且 } a \neq b。$$

由这一严格的序之术语, 可以得到下列性质:

$a = \sup A \Leftrightarrow a$ 是 A 的一个上界且 $\forall b \in P, b < a \Rightarrow \exists x \in A, b < x$;

$a = \inf A \Leftrightarrow a$ 是 A 的一个下界且 $\forall b \in P, b > a \Rightarrow \exists x \in A, x < b$ 。

§ 1.2 格

1.2.1 作为一个偏序集的格

定义 1.2.1 一个偏序集 $(L, \leq)$ 称为一个格, 如果 $\sup\{a, b\}$ 和 $\inf\{a, b\}$ 对于所有的 $a, b \in L$ 均存在。