中級自学自然科学丛书

# 无理方程的解法

馬　明　楊佩祥　編著

江苏人民出版社

# 无理方程的解法

[illegible]

# 无理方程的解法

馬　明　楊佩祥　編著

*

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号

江苏人民出版社出版

南京湖南路十三号

江苏省新华书店发行　南京印刷厂印刷

*

开本787×1092耗1/32　印張 2 3/4　字数 63,000

一九六一年四月第一版

一九六一年四月南京第一次印刷

印数 1—5,400 册

統一书号．13100·133

定　价．(6)二角四分

# 序　言

这本书主要是讲述关于无理方程的一些同解理論和解法，就內容来讲，它是紧接着二次方程的，只要具备解一次方程、一次不等式和二次方程的初步知識，就可以閱讀这本小册子，从而掌握各种类型无理方程的解法。解无理方程的基本方法是把方程的两边同次乘方，使成为有理方程，但是經过这样的变形，不一定同解。在这本书中，明确驗根是解无理方程的組成部分，尽量簡化驗根的手續，并列举各种不同的解法。在編写的順序上，首先闡明无理方程的意义和解方程的基本知識，以便自学；然后由实际应用問題导出无理方程的存在及其解法，并建立方程两边同次乘方的同解定理，以便簡化驗根手續。在列举各种不同的解法时，由浅入深，由簡及繁，循序漸进。在編写时，虽然力求这本书对讀者的自学有所帮助，但是由于作者的能力有限，經驗不够，书中可能还存在不少缺点，希望讀者指正。

# 目　　录

## §1. 无理方程的意义与方程未知数的允許值集合

什么叫做方程？含有未知数的等式，叫做方程。使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做方程的解，含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根。所謂解方程，就是确定方程有沒有解，如果有，把所有的解都找出来。这些問題，我們在学习一次方程和二次方程时都是知道的。

什么叫做无理方程呢？被开方数里含有未知数的方程就叫做无理方程。

例如，方程$\sqrt{3x-5}=5-x$，$x+\sqrt{25-x^2}=7$，$\sqrt{x+5}+\sqrt{x+1}=1$，$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$，$\frac{21}{\sqrt{2x+1}}-2\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}$，$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$等等都是无理方程。又例如，$\sqrt{x}+2=3$是无理方程，而$\sqrt{2}+x=3$因为被开方数里不含有未知数，所以不是无理方程。

为了解无理方程，必須首先明确偶次根式的値，现在我們先來討論根式的值。

如果一个数的$n$次幂等于$a$，那末这个数就叫做$a$的$n$次方根。也就是說，如果$x^n=a$，那末$x$就是$a$的$n$次方根，我們用符号$\sqrt[n]{a}$来表示，叫做根式。例如，$2^3=8$，$(-3)^3=-27$，那末$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-27}=-3$。

在实数集合內，我們按照根指数是奇数或者是偶数来分別研究根式的性質：

1. **奇次根式的性質**：因为正数的奇次羃是正数，負数的奇次羃是負数，零的奇次羃是零；所以，在实数集合內，正数的奇次方根，必是正数，而且是唯一的；負数的奇次方根，必是負数，也是唯一的；零的奇次方根有唯一的值，就是零，因而奇次根式具有唯一的值。

2. **偶次根式的性質**：因为正数和負数的偶次羃都是正数，零的偶次羃是零；所以，在实数集合內，正数的偶次方根是两个絕对值相等而符号相反的数，而且不能多于两个；零的偶次方根有唯一的值，就是零；至于負数的偶次方根，沒有意义，因而$\sqrt{-4}$、$\sqrt[4]{-16}$等都不是根式。

根据上面的討論，我們知道，正数的偶次方根有两个，所以我們规定，在$a$是正数，$n$是偶数的时候，根式$\sqrt[n]{a}$表示两个方根里正的一个，叫做**算术根**；也就是說，正数的正的方根，叫做算术根。例如，$\sqrt{16}=4$，$\sqrt[4]{81}=3$，$-\sqrt{16}=-4$等等。

我們对于偶次根式的值，都应該理解为是它的算术值，这一点，对于根式的演算和解无理方程时，都很重要。

现在，我們来研究无理方程的未知数的允許值。

根式$\sqrt[n]{a}$，当$n$是奇数的时候，$a$可以是任何实数；当$n$是偶数的时候，$a$只能是任何正实数或者零；也就是說，在偶次根式內的式子的值，必須是正数或零的时候，这个偶次根式才有意义。

现在我們来确定无理方程未知数的允許值集合。

**例一**：　方程$\sqrt{2x-6}=5$

在偶次根式內的式子，只有在$2x-6\geqslant 0$时才有意义，也就是$2x\geqslant 6$，即$x\geqslant 3$的一些数，才能是原方程的根。未知数允許值的集合在数軸上的表示如图1。

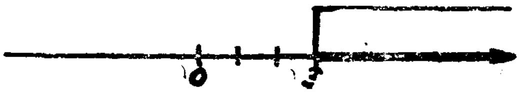


图1

**例二：** 方程$\sqrt{5-x}=4$

只有在$5-x\geqslant 0$时才有意义。

也就是$x\leqslant 5$。

未知数允許值的集合在数軸上的表示如图2。

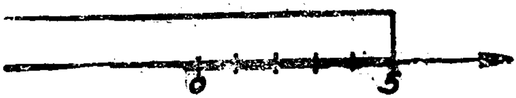


图2

**例三：** 方程$\sqrt{5-x}+2\sqrt{x+3}=6$

的根，必須适合下列条件

$$5-x\geqslant 0 \quad 且 \quad x+3\geqslant 0$$

即 $\quad x\leqslant 5 \quad 且 \quad x\geqslant -3$

即 $\quad -3\leqslant x\leqslant 5$

未知数允許值的集合在数軸上的表示如图3。

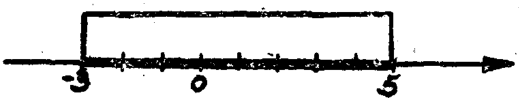


图3

例四：　方程$\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}=6$
的根，必須适合下列条件

$$x-5\geqslant 0 \quad 且 \quad 3-x\geqslant 0$$

即　$$x\geqslant 5 \quad 且 \quad x\leqslant 3$$

但这不可能（图4）。

∴　这个方程沒有根。

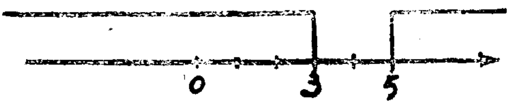

图4

明确无理方程未知数的允許値集合，可以帮助我們在解无理方程时，确定根的范围或者沒有根。例如：

| | |
|---|---|
| $\sqrt{x-9}+\sqrt{x}=9$ | $x\geqslant 9$ |
| $\sqrt{18-x}-\sqrt{11-x}=1$ | $x\leqslant 11$ |
| $\sqrt{5-x}+2\sqrt{x}=5$ | $0\leqslant x\leqslant 5$ |
| $\sqrt{x+2}+\sqrt{-5-x}=6$ | 沒有根 |

## §2.　解方程的基本知識

我們解方程，必須首先明确在什么数的集合內来解方程。在实数（有理数和无理数总称实数）集合內有解的方程，在有理数（正負整数、零、正負分数这些能用既約分数形式表示的数叫做有理数）集合內不一定有解；在有理数集合內有解的方程，在整数（包括自然数、零及与自然数相反的数）集合內不一定有解；在整数集合內有解的方程，在自然数（即正整数）集合內不一定有解。

**例一**：在自然数集合內，方程$x+2=5$，$x-3=4$有解，它們的解分别是$x=3$，$x=7$；但方程$x+2=1$，$x+2=2$沒有解。

**例二**：在整数集合內，方程$x+2=1$，$x+2=2$，$2x+5=1$，$x^2-4=0$有解，它們的解分别是$x=-1$，$x=0$，$x=-2$，$x=\pm 2$；但方程$2x+1=4$，$2x+5=4$沒有解。

**例三**：在有理数集合內，方程$2x+1=4$，$2x+5=4$，$4x^2-4x+1=0$有解，它們的解分别是$x=1\frac{1}{2}$，$x=-\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{2}$；但方程$x^2-2=0$，$2x^2-3=0$沒有解。

**例四**：在实数集合內，上述所举的方程都有解，如$x^2-2=0$，$x=\pm\sqrt{2}$；$2x^2-3=0$，$x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$；但方程$x^2+2=0$，$2x^2+3=0$，$\sqrt{x}=-1$等沒有解。

因此，方程的无解，是指在指定的数的集合內沒有解，如上例$2x^2-3=0$，在有理数集合內无解，但在实数集合內有解；又例如方程$\sqrt{x}=-1$和$|x|=-1$，在实数集合內便是无解的方程，因为对于未知数的任何值，方程的左边都不是負数。

我們解无理方程，都是在实数集合內来解的。

现在註我們进一步来研究方程的基本性質。

如果两个方程的解完全相同，也就是說，如果第一个方程的解都是第二个方程的解，并且第二个方程的解也都是第一个方程的解，那末这两个方程就叫做同解方程。

例如方程 $\sqrt{x+1}=2$ ………(1)

和方程 $x+1=4$ ………(2)

方程(1)的唯一解 $x=3$ 是方程(2)的解，并且方程(2)的唯一解 $x=3$ 也是方程(1)的解，所以方程(1)和方程(2)是同解方程。

又例如方程 $\sqrt{2x+3}=x$ ………(3)

和方程 $2x+3=x^2$ ………(4)

方程(3)的解 $x=3$ 是方程(4)的解，但是方程(4)的另一个解 $x=-1$ 不是方程(3)的解，所以方程(3)和方程(4)不是同解方程。

在解方程的时候，我們需要把已知方程逐步变为比較簡单的或是比較容易解的方程。在变形的时候，我們可以用一个同解方程来代替原来的方程，因为只有在这样的替换下，原方程的解才能保持不变，也就是說，在进行变形的时候，要保証既沒有失去任何的解，也沒有增加任何的解，必須这样，才能保証最后所得方程的解和原方程的解完全相同。

由于把一个方程变形而增加的解，叫做这个方程的增根。如上述方程(3)变形成为方程(4)，原来方程(3)的解 $x=3$ 虽然沒有失去，但是增加一个新的解 $x=-1$，这个解就叫做原方程(3)的增根。

关于方程的变形，有下面几个重要定理：

**定理一： 如果方程的两边都加上相同的一个数或者整式，那末所得的方程和原方程是同解方程。也就是說，方程中的任何一項都可以把它的符号改变后，由方程的一边移到另一边。**

这里应該特别注意的，是加上相同的数或者整式，这是很重要的。例如在方程 $x+3=4$ ……(1)的两边都加上分式

$\frac{1}{x-1}$，所得到的方程 $x+3+\frac{1}{x-1}=4+\frac{1}{x-1}$ ……（2）和原方程就不是同解方程，因为方程（1）的根 $x=1$ 代入方程（2）就沒有意义，因而不是方程（2）的根。

又例如在方程（1）的两边都加上根式 $\sqrt{x-2}$，所得到的方程 $x+3+\sqrt{x-2}=4+\sqrt{x-2}$ ……（3）和原方程也不是同解方程，因为原方程（1）的根 $x=1$ 代入方程（3）使得偶次根式內的式子成为負数，在实数集合內沒有意义，因而不是方程（3）的根。

**定理二：　如果方程的兩边都乘以不等于零的相同的一个数，那末所得的方程和原方程是同解方程。**

应該特別注意的，是同乘以不等于零的数，这也是很重要的。例如在方程 $x+3=4$ ……（1）的两边同乘以整式 $x$，所得到的方程 $(x+3)x=4x$ ……（2）和原方程就不是同解方程，因为方程（1）只有根 $x=1$，而方程（2）有两个根 $x_1=1$，$x_2=0$，显然方程（2）产生了增根。

又例如在方程（1）的两边同乘以分式 $\frac{1}{x-1}$，所得到的方程 $(x+3)\frac{1}{x-1}=4\times\frac{1}{x-1}$ ……（3）和原方程也不是同解方程，因为方程（1）的根 $x=1$ 代入方程（3）就沒有意义，因而不是方程（3）的根。又例如在方程 $x+3=0$ 的两边同乘以分式 $\frac{x+2}{x+3}$ 得到方程 $(x+3)\frac{x+2}{x+3}=0$，显然失去了原方程 $x=-3$ 的根，而且又增加了 $x=-2$ 的根。失根的原因是因为未知数的允許值集合縮小了，因而有可能失去了根，增根的原因是因为在原方程的两边同乘以含未知数的整式 $x+2$

的緣故。

**定理三： 如果方程的两边都同次乘方，那末所得的方程在一般情况下和原方程不是同解方程，但新方程所有的根必定包含了原方程所有的根，也就是説，有产生增根的可能。**

例如把方程$\sqrt{2x+3}=x$的两边平方，所得到的新方程$2x+3=x^2$和原方程不是同解方程，因为原方程只有根$x=3$，而新方程有两个根$x_1=3$，$x_2=-1$。新方程的根除了包含原方程的根以外，还产生了增根，其实，这是因为未知数的允許值集合扩大了，因而有可能产生增根。

一般地説，在方程的两边施行某一种运算，而这种运算的逆运算不是唯一确定的时候，所得的方程和原方程就不是同解方程。当我們解无理方程时，应該特别注意：方程的两边都同次乘方时，有产生增根的可能。

现在，我們来研究怎样在补充条件下解方程。

我們曾討論过方程未知数的允許值，就是要在指定的数的集合內，使得方程的两边，对于未知数的每一个允許值都有意义，然而我們时常需要对于未知数的允許值附加补充条件，这些附加的补充条件，随問題的性質而不同，可以是自然数、整数、有理数、实数或是滿足某些不等式等等。

当我們列出方程来解应用問題时，通常要按照問題的意义和条件对于未知数的允許值附加补充条件，例如，未知数表示人数，則它的允許值是自然数；若未知数表示綫段的长度或角的度数，則它的允許值是正数；若未知数表示十进位制某一数位的数碼，則它的允許值是0，1，2，3，……9；又例如我們在解无理方程时，偶次根式內的式子，必須是非負值，因而要滿足偶次根式內的式子大于或等于零这个不等式等等。

方程里未知数的允許值，可能比問題的意义和条件所确定的未知数的允許值广闊些，如果抛开这些条件，那末未知数的

允許值集合扩大了，我們可以将扩大了允許值集合的方程解出，而将抛开的条件看作是补充条件，这时，扩大了允許值集合的方程的所有解，包含了滿足补充条件的一切解，我們便可以在所有解当中，选取滿足补充条件的解。

例如：　某人民公社需要在旱田中开出一块面积25亩的长方形的水田，如果这块水田的长比宽多20丈，那末这块水田的长和宽各是多少丈？

解：　設这块水田的宽是$x$丈，那末长是（$x+20$）丈，面积25亩就是（$60\times25$）平方丈，按照問題的条件列出方程：

$$x(x+20)=60\times25$$

按照問題的意义，未知数应該滿足的补充条件是正数。

先不管补充条件而解二次方程。

整理：　$x^2+20x-1500=0$

解之：　$x_1=30$，　$x_2=-50$。

它們都是原方程的解，但是其中30是正数，滿足补充条件；而$-50$不能滿足补充条件，把它舍去。

$$x+20=30+20=50$$

答：这块水田的长是50丈，宽是30丈。

由此，我們可以得到在补充条件下解方程的法則。

**法則　要在补充条件下解方程，只須抛开这些条件而解原方程，然后在所得到的一切解中选取滿足补充条件的解。**

这个法則，对于解无理方程是很重要的。例如：

解无理方程　$\sqrt{A(x)}=B(x)$

我們可以在补充条件$B(x)\geqslant0$之下，将方程两边平方，

得新方程：　$A(x)=B^2(x)$

然后在新方程的一切解中选取滿足补充条件的解。

例：解方程　$\sqrt{2x+3}=x$

方程的左边是一个偶次根式，对于偶次根式的值，指的是它的算术根，因此，应該滿足的补充条件是$x \geqslant 0$。

先不管补充条件，将方程两边同时平方。

得新方程：　　　$2x+3=x^2$

整理：　　　$x^2-2x-3=0$

解之：　　　$x_1=3$，　$x_2=-1$。

它們都是新方程的根，但是其中$x_1=3$滿足补充条件；而$x_2=-1$不能滿足补充条件，把它舍去，所以原方程的根是$x=3$。

## §3. 含有二次根式的无理方程的解法举例(一)

无理方程是由实际应用問題中产生的，在实际应用上常常碰到，玆举数例如下：

**例一**：等腰三角形的周长为16尺，底边上的高为4尺，求这个等腰三角形各边的长。

設底边长为$2x$尺，则腰长为$\sqrt{x^2+4^2}$尺。

$$2x+2\sqrt{x^2+4^2}=16$$

即　$\sqrt{x^2+4^2}=8-x$

两边平方　$x^2+16=64-16x+x^2$

$16x=48$

$x=3$　（驗算正确）

$2x=6$　　$\sqrt{x^2+4^2}=5$

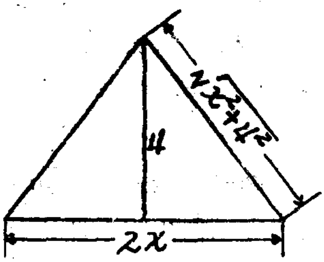

图 5

答：这个等腰三角形底边的长为6尺，腰长为5尺。

**例二**：一矩形的周长及与之等积的正方形的周长共为54寸，已知矩形的相邻二边相差9寸，求矩形的长和宽。

設矩形的宽为$x$寸，则长为$(x+9)$寸。

与之等积的正方形一边的长为$\sqrt{x(x+9)}$寸。

$$2(x+x+9)+4\sqrt{x(x+9)}=54$$

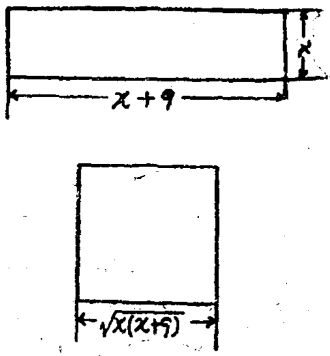


图 6

即 $\quad 4\sqrt{x(x+9)}=36-4x$

即 $\quad \sqrt{x(x+9)}=9-x$

两边平方 $\quad x^2+9x=81-18x+x^2$

$27x=81$

$x=3$ （驗算正确）

$x+9=12$

答：矩形的长为12寸，

宽为3寸。

**例三**：自二点$C$，$D$到直綫$AB$的距离$CA$，$DB$分别为12尺、24尺，$AB$长为12尺，在直綫上一点$E$到$C$的距离比到$D$的距离少12尺，求$E$点的位置。

設$AE=x$尺，则$BE=(12-x)$尺。

$$EC=\sqrt{12^2+x^2}\text{ 尺，}\quad ED=\sqrt{24^2+(12-x)^2}\text{ 尺。}$$

$$\sqrt{12^2+x^2}+12=\sqrt{24^2+(12-x)^2}$$

两边平方 $\quad 144+x^2+24\sqrt{12^2+x^2}+144$

$\quad =576+144-24x+x^2$

整理 $\quad \sqrt{12^2+x^2}=18-x$

两边再平方 $\quad 144+x^2=324-36x+x^2$

$36x=180$

$x = 5$ （驗算正确）

$12 - x = 7$

答：$AE$为5尺，$BE$为7尺。

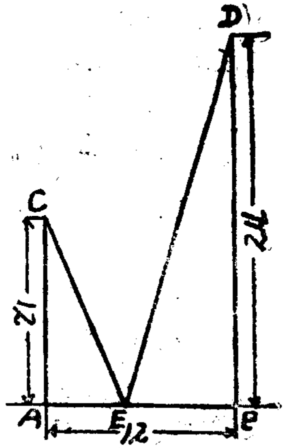


图 7

**例四**：某数与其平方根之和为20，求此数。

設該数为$x$。

$$x + \sqrt{x} = 20$$

即 $\sqrt{x} = 20 - x$

两边平方 $x = 400 - 40x + x^2$

整理 $x^2 - 41x + 400 = 0$

解之 $x_1 = 16$、 $x_2 = 25$。

驗算后知道$x_1 = 16$是原方程的根；$x_2 = 25$是增根，（∵这时$20 - x = 20 - 25 < 0$）把它舍去。

答：該数是16。

**例五**：有一矩形，其对角綫与长边之和等于短边的四倍，巳知长短边相差7寸，求矩形的长和宽。

設矩形的宽为$x$寸，则长为$(x+7)$寸。

对角綫长为

$\sqrt{x^2 + (x+7)^2}$寸。

$$\sqrt{x^2 + (x+7)^2} + x + 7 = 4x$$

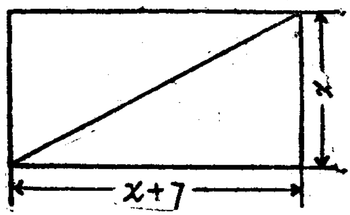


图 8

即 $\sqrt{x^2 + (x+7)^2} = 3x - 7$

两边平方 $x^2 + x^2 + 14x + 49 = 9x^2 - 42x + 49$

整理 $7x^2 - 56x = 0$