高等教育自学考试

经济管理类专业

JINGJIGUANLILEIZHUANYE

李苹荪 编

高等数学(一)
微积分习题详解

武汉大学出版社

高等数学(一)微积分

（经济管理类专业）

习　题　详　解

李苹荪　编

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)微积分习题详解/李苹荪编著.—武汉：武汉大学出版社，1994.12

高等教育自学考试　经济管理类专业用书

ISBN 7-307-01878-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.李…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ.O13

责任编辑:金丽莉　　　版式设计:支　笛

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件:epd@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu edu.cn)

印刷：湖北省孝感日报社印刷厂

开本：850×1168　1/32　印张：10.625　字数：271 千字

版次：1994 年 12 月第 1 版　　2000 年 11 月第 9 次印刷

ISBN 7-307-01878-0/O·58　　定价：11.40 元

责任编辑　金丽莉
封面设计　何　作

ISBN 7-307-01878-0/O・58　定价:11.40 元

出版前言

目前，全国不少大专院校特别是成人高校经济类大专生的高等数学课程多采用武汉大学出版社出版的全国高等教育自学考试指定教材——《高等数学(一)微积分》作为基本教材。该教材内容适当，通俗易懂，与经济管理业务实践结合紧密。尤其是各章末配备的小结和复习题，便于读者抓住重点，并测试自己对基本内容掌握的程度。但不少师生反映，在自学的过程中最好能有一本与之相配套的习题详解(仅对部分习题附有参考答案是不够的)，这无疑将对教、学双方带来较大的方便。为此，我会特邀请具有丰富教学经验的李苹荪同志(我会常任理事)对该教材全部习题编写了习题解答，经我会部分专家全面审阅，一致认为该书编写的质量较高，既注意到推理的严谨性、知识综合运用的合理性，同时也注意到表述的简捷性和通俗性，它将成为广大读者和教师得力的参考书。

湖北成人高校数学专业委员会

1994年8月

序　言

为了帮助广大自学者及高校学生学习高等数学，我们特编写了这本《习题解答》。本书对武汉大学出版社出版、复旦大学高汝熹主编的高等数学(一)微积分原书中的所有习题一一对应进行了详细解答，希望能对自学者有所裨益。

在解答中，力求推理严谨、数形结合、表述流畅、通俗易懂。此外书后附录给出精心编写的九套按章节配套的自测题及综合自测题，从而使该习题集内容更加丰富、完整。

在编写过程中，自始至终得到了曲维春、王静轩、胡昌博等同志的大力支持，他们分别对1～3章，4～6章，7～9章进行了认真查对、修改、补充，特别是吴兴宝同志对全书进行了全面的审查，提出许多宝贵意见。在此一并表示衷心感谢。

由于本人水平有限，本书不妥之处望广大读者批评指正。

编者　1994年8月

目　　录

第一章　函数及其图形

§1.1　集合·习题1.1 …… (1)

§1.2　映射·习题1.2 …… (3)

§1.3　函数·习题1.3 …… (3)

§1.4　经济学中的常用函数·习题1.4 …… (10)

复习题 …… (12)

第二章　极限与连续

§2.1　数列的极限·习题2.1 …… (18)

§2.2　函数的极限·习题2.2 …… (21)

§2.3　极限的运算法则·习题2.3 …… (23)

§2.4　两个重要极限·习题2.4 …… (29)

§2.5　函数的连续性·习题2.5 …… (31)

§2.6　无穷小量和无穷大量·习题2.6 …… (35)

复习题 …… (37)

第三章　导数与微分

§3.1　导数概念·习题3.1 …… (46)

§3.2　求导法则和基本求导公式·习题3.2 …… (48)

§3.3　高阶导数·习题3.3 …… (57)

§3.4　微分·习题3.4 …… (60)

§3.5　导数在经济分析中的应用·习题3.5 …… (63)

复习题 …… (67)

第四章　中值定理与导数的应用

§4.1　中值定理·习题4.1 …… (76)

§4.2　导数的应用·习题4.2 …………………………… (80)
§4.3　凸性、拐点和渐近线·习题4.3 ………………… (94)
§4.4　函数极值在经济管理中的
　　　应用举例·习题4.4 ………………………………… (98)
复习题…………………………………………………… (101)
第五章　积分
§5.1　不定积分·习题5.1 ……………………………… (110)
§5.2　定积分·习题5.2 ………………………………… (126)
§5.3　广义积分·习题5.3 ……………………………… (138)
§5.4　定积分的应用·习题5.4 ………………………… (144)
复习题…………………………………………………… (151)
第六章　无穷级数
§6.1　常数项级数·习题6.1 …………………………… (164)
§6.2　数项级数的收敛性判别法·习题6.2 ………… (167)
§6.3　幂级数·习题6.3 ………………………………… (172)
§6.4　泰勒公式与泰勒级数·习题6.4 ……………… (178)
复习题…………………………………………………… (186)
第七章　多元函数微积分
§7.1　多元函数·习题7.1 ……………………………… (197)
§7.2　偏导数·习题7.2 ………………………………… (200)
§7.3　全微分·习题7.3 ………………………………… (205)
§7.4　多元复合函数求导法则和隐函数
　　　求导公式·习题7.4 ……………………………… (207)
§7.5　多元函数偏导数的应用·习题7.5 …………… (214)
§7.6　二重积分·习题7.6 ……………………………… (224)
复习题…………………………………………………… (232)
第八章　微分方程初步
§8.1　微分方程的一般概念·习题8.1 ……………… (240)
§8.2　一阶微分方程·习题8.2 ………………………… (242)

§8.3 可降阶的高阶微分方程·习题8.3 ………… (255)
§8.4 二阶常系数线性微分方程·习题8.4 ……… (261)
§8.5 微分方程在经济中的应用举例·习题8.5 … (270)
复习题…………………………………………………… (273)
附录 自测题及参考答案
自测题一(287) 参考答案(290)
自测题二(291) 参考答案(295)
自测题三(296) 参考答案(299)
自测题四(300) 参考答案(304)
自测题五(305) 参考答案(307)
自测题六(308) 参考答案(311)
自测题七(312) 参考答案(316)
自测题八(316) 参考答案(320)
自测题九(321) 参考答案(323)
综合自测题(323) 参考答案(328)

第一章　函数及其图形

习　题　1.1

1. 用集合符号写出下列集合：

(1) 大于 30 的所有实数的集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 上所有的点组成的集合；

(3) 椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 外部一切点组成的集合.

解：(1) $\{x \mid x>30, x\in R\}$

(2) $\{(x,y) \mid x^2+y^2=25 \quad x,y\in R\}$

(3) $\{(x,y) \mid \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}>1 \quad x,y\in R\}$.

2. 按下列要求举例：

(1) 一个有限集；　　(2) 一个空集；

(3) 一个集合是另一个集合的子集；　　(4) 一个无限集.

解：(1) 如$\{1,2,3\}$.　　(2) 如$\{x \mid x^2<0\}$.

(3) 如自然数集是整数集的子集.

(4) 如$\{x \mid x>5 \quad x\in R\}$.

3. 下列集合哪个是空集$\varnothing$：

$A=\{x \mid x+5=5\}$；　　$B=\{x \mid x^2+5=0 \quad x\in R\}$；

$C=\{x \mid x>5$ 且 $x<5\}$.

解：集合 B 与集合 C 均为空集.

4. $A=\{a,b,c\}$，下列式子中哪些正确？

(1) $\varnothing\in A$　　(2) $a\overline{\in} A$　　(3) $\{a\}<A$

(4) $\varnothing<A$　　(5) $A\subset A$　　(6) $b\in A$

(7) $b \subset A$.

解：(5)、(6)两式正确.

5. 如果 $A=\{x \mid 3<x<5, x \in R\}$，　$B=\{x \mid x>4, x \in R\}$.

求：(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap B$.

解：(1) $A \cup B=\{x \mid x>3, x \in R\}$

(2) $A \cap B=\{x \mid 4<x<5, x \in R\}$.

6. $A=\{a, b\}$，　$B=\{b, c\}$，　$C=\{c, d\}$.

求：$A \cup B$；$B \cup C$；$A \cup C$；$A \cup A$；$A \cap B$；$A \cap C$；
$(A \cup B) \cap C$；$A \cap A$.

解：$A \cup B=\{a, b, c\}$　　$B \cup C=\{b, c, d\}$；

$A \cup C=\{a, b, c, d\}$　　$A \cup A=A=\{a, b\}$；

$A \cap B=\{b\}$　　$A \cap C=\varnothing$；

$(A \cup B) \cap C=\{c\}$；　　$A \cap A=A=\{a, b\}$.

7. 试证：若 $A \subset B$，　$B \subset C$　则 $A \subset C$.

证：设 a 是 A 的任意一个元素，　$\because A \subset B$，　$\therefore a \in B$

又　$\because B \subset C$，　$\therefore a \in C$，　$\therefore A \subset C$.

8. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合

(1) $|x| \leqslant 2$　　(2) $|x-5| \leqslant 1$　　(3) $|x-1|<\varepsilon(\varepsilon>0)$

(4) $|x|>1$　　(5) $|x+2| \geqslant 3$.

解：(1) $[-2,2]$　　(2) $[4,6]$　　(3) $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

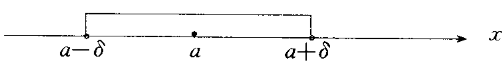
(4) $(-\infty,-1) \cup(1,+\infty)$　　(5) $(-\infty,-5] \cup[1,+\infty)$

9. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合

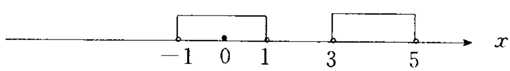
(1) $|x-a|<\delta$, a 为常数, $\delta>0$；

(2) $1<|x-2|<3$.

解：　(1)



(2)



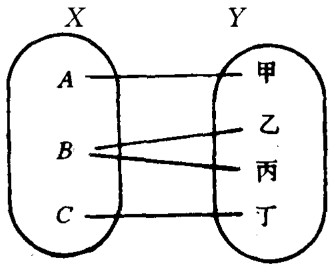
习　题　1.2

1. 设 X 是所有同心圆的集合,Y 为实数集合,若把同心圆与其直径建立对应关系,试验证这种对应关系构成 X 到 Y 的映射.

验:∵ 对于集合 X 中任意一个圆 x,都唯一地确定一条直径,设其直径长度数为 d,显然 $d\in Y$. 于是,对于集合 X 中任意元素 x 在 Y 中有唯一元素 d 与之对应,∴ 这种对应关系构成 X 到 Y 的映射.

2. 请判断下列对应关系是否构成映射.

　　设 X 集合由 A、B、C 三个工厂构成,Y 集合由甲、乙、丙、丁四个商店构成。A、C 两个工厂产品分别由甲、丁两个商店销售,B 工厂产品由乙、丙两个商店共同销售,若把生产产品的工厂和销售这些产品的商店之间建立对应关系(供销关系),问这种对应关系是否构成从 X 到 Y 的映射?



解:依题意,供销之间的对应关系如图所示,由于 X 中的元素 B,在 Y 中有两个元素乙、丙与之对应,∴ 集合 X 到集合 Y 不构成映射.

习　题　1.3

1. 求下列各函数值

　(1) 若 $f(x)=x\cdot 4^{x-2}$,求 $f(2)$,$f(-2)$,$f(t^2)$,$f\left(\frac{1}{t}\right)$

　(2) 若 $\varphi(t)=t^3+1$,求 $\varphi(t^2)$,$[\varphi(t)]^2$.

解:(1) $f(2)=2\cdot 4^{2-2}=2$　　$f(-2)=-2\cdot 4^{-2-2}=-\frac{1}{128}$

$$f(t^2)=t^2\cdot 4^{t^2-2}\qquad f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}\cdot 4^{\frac{1}{t}-2}=\frac{1}{t}\cdot 4^{\frac{1-2t}{t}}$$

(2) $\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1\qquad [\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2.$

2. 求下列函数值

(1) 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(0),f(a),f(a+b)$

解：$f(0)=2$；$f(a)=\dfrac{|a-2|}{a+1}$；$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1}$.

(2) 若

$$g(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

求 $g(3),g(2),g(0),g(0.5),g(-0.5)$.

解：$g(3)=3-1=2,\qquad g(2)=2-1=1,$

$g(0)=2,\qquad g(0.5)=2,\qquad g(-0.5)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(3) 若

$$\varphi(x)=\begin{cases}3+x^4 & -\infty<x\leqslant 0\\ 2^x & 0<x<+\infty\end{cases}$$

求 $\varphi(-2),\varphi(0),\varphi(2)$.

解：$\varphi(-2)=3+(-2)^4=19,\qquad \varphi(0)=3+0^4=3,$

$\varphi(2)=2^2=4.$

(4) $\psi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$

求 $\psi(1),\psi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\psi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解：$\psi(1)=0\qquad \psi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2},$

$\psi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

3. 下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x)=\ln x^2,\qquad \varphi(x)=2\ln x.$

(2) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x,\qquad \psi(x)\equiv 1.$

解：(1) 不同，$\because$ $f(x)$与$\varphi(x)$二函数的定义域不同，$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$而$\varphi(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

(2) 相同，$\because$ 对于一切 $x\in R$ 恒有

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

4. 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$　(2) $y=\sqrt{3x+4}$　(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$

(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$　(5) $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$

(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$　(7) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$

解：(1) $\because$ $y=\dfrac{2x}{(x-1)(x-2)}$ $\therefore$ 其定义域为$x\neq1$且$x\neq2$的一切实数，即定义域为$\{x\mid x\neq1$且$x\neq2,x\in R\}$.

(2) x 需满足 $3x+4\geqslant0$，于是 $x\geqslant-\dfrac{4}{3}$ 即定义域为 $\left[-\dfrac{4}{3},+\infty\right)$.

(3) x 需满足 $a^2-x^2\geqslant0$，即$|x|\leqslant|a|$，或$-|a|\leqslant x\leqslant|a|$

$\therefore$ 其定义域为$[-|a|,|a|]$.

(4) x 需满足：$x^2\neq1$且$x+4\geqslant0$即$x\geqslant-4$且$x\neq\pm1$，

$\therefore$ 定义域为$[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(5) x 需满足$\dfrac{x}{x-2}>0$即$x(x-2)>0$

$\therefore$ 其定义域为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

(6) x 需满足 $\sin x\geqslant0$且$16-x^2\geqslant0$.

由 $\sin x\geqslant0$得$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k\in Z)$.

由$16-x^2\geqslant0$得. $|x|\leqslant4$，即$-4\leqslant x\leqslant4$.

$\therefore$ 其定义域为$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

(7) x 需满足 $\left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leqslant1$即$|x-3|\leqslant2$，

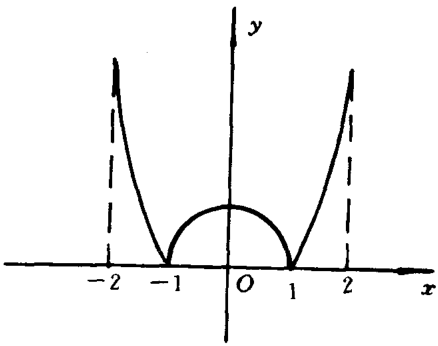
$-2\leqslant x-3\leqslant2$，得：$1\leqslant x\leqslant5$，即定义域为$[1,5]$.

5. 确定函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$$

的定义域,并作出其图象.

解:定义域为$(-2,2)$,其图象如下:



6. 某产品年产量为x台,每台售价为400元,当年产量在1000台以内时,可以全部售出,当年产量超过1000台时,经广告宣传后又可以再多出售200台,每台平均广告费40元,生产再多,本年就售不出去,试将本年的销售总收入R表示为年产量x的函数.

解:当$0\leqslant x\leqslant 1000$时,$R=400x$;

当$1000<x\leqslant 1200$时 $R=400\times 1000+(x-1000)(400-40)$

$=400\ 000+360(x-1000)$;

当$x>1200$时 $R=400\times 1000+200(400-40)$

$=472\ 000$.

∴ R关于x的函数为一分段函数:

$$R(x)=\begin{cases}400x & 0\leqslant x\leqslant 1000\\ 400\ 000+360(x-1000) & 1000<x\leqslant 1200\\ 472\ 000 & x>1200\end{cases}$$

7. 设生产与销售某种产品的总收入R是产量x的二次函数,经统计得知,当$x=0,2,4$时,$R=0,6,8$,试确定R与x的函数关系.

解:(用待定系数法)

设这个二次函数为:$R=ax^2+bx+c$

当 $x=0,2,4$时,$R=0,6,8$.

得

$$\begin{cases} c=0 & (1) \\ 4a+2b+c=6 & (2) \\ 16a+4b+c=8 & (3) \end{cases}$$

由(1),(2),(3)组成的方程组得

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=4 \\ c=0 \end{cases}$$ 故所求的二次函数为 $R=-\frac{1}{2}x^2+4x$.

8. 判断下列函数的单调性

(1) $y=3x-6$　　(2) $y=2^{x-1}$　　(3) $y=\log_a x$.

解:(1)、(2)均为单调递增函数,$x\in R$.

(3) 当$0<a<1$时为单调递减函数,$x\in(0,+\infty)$,

当 $a>1$时为单调递增函数,$x\in(0,+\infty)$.

9. 判断下列函数中哪些是奇函数、偶函数、非奇非偶函数:

(1) $f(x)=x^4-2x^2$　　(2) $f(x)=x-x^2$　　(3) $f(x)=\mathrm{tg}x$

(4) $f(x)=\sin x-\cos x$　　(5) $f(x)=x\cdot\sin x$

(6) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$　　(7) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$

(8) $f(x)=a^x+a^{-x}$　　(9) $f(x)=\frac{a^x+1}{a^x-1}$

(10) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解:偶函数有:(1),(5),(6),(8)

奇函数有:(3),(7),(9),(10)

非奇非偶函数有:(2),(4).

以(10)为例证明如下:

$\because f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+(-x)^2}\right)$

$$=\ln\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x-\sqrt{1+x^2}\right)}{-x-\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{-1}{-x-\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$为奇函数.

10. 下列各函数中,哪些是周期函数?对周期函数指出其周期.

(1) $y=\sin^2 x$

(2) $y=\cos(\omega x+\theta)$　　　　(ω,θ 为常数)

(3) $y=\cos\dfrac{1}{x}$

解:(1)、(2)是周期函数,其周期分别为π和$\dfrac{2\pi}{|\omega|}$;(3)不是周期函数.

11. 求证函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$是有界函数.

证: $\because$ $0<\dfrac{x^2}{1+x^2}<1$对一切 $x\in R$ 恒成立,

$\therefore$ 此函数为有界函数.

12. 求下列函数的反函数

(1) $y=x^3+2$　　　　(2) $y=\ln(x+1)$

(3) $y=2\sin 3x$　　　　(4) $y=3^{2x+5}$

解:(1) $x^3=y-2$　$\therefore$　$x=\sqrt[3]{y-2}$,　反函数为　$y=\sqrt[3]{x-2}$;

(2) $x+1=e^y, x=e^y-1$,　反函数为　$y=e^x-1$.

(3) $\sin 3x=\dfrac{y}{2}, 3x=\arcsin\dfrac{y}{2}, x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$,

反函数为　$y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$.

(4) $2x+5=\log_3 y, x=\dfrac{1}{2}(\log_3 y-5)$,

反函数为 $y=\dfrac{1}{2}(\log_3 x-5)$.

13. 利用 $y=\sin x$ 的图形作出下列各函数的图象

(1) $y=2+\sin x$;　　　　(2) $y=\sin(x+2)$;

(3) $y=2\sin x$;　　　　(4) $y=\sin 2x$.

解:(1) 将 $y=\sin x$ 的图象向上平移2个单位