优 选 法 学 习 資 料

国 营 泸 州 化 工 厂 翻 印

一 九 七 三 年 四 月

优选法平話及其补充

一、“优选法”平話

§1 什么是优选法？

在生产斗争和科学试验中，为了达到多快好省的目的，需要通过试验，对有关的配方、配比、工艺操作条件、仪器电路的工作点等等，选择最佳值。优选法，就是利用数学原理，合理安排试验点，减少试验的盲目性。以求又准又快地找到这些最佳值的一种试验方法。

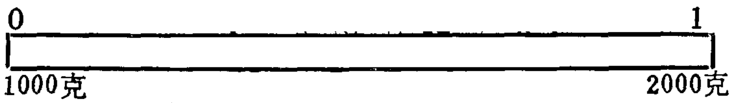
优选法是近代应用数学的一个分支。它是生产斗争和科学试验中试验方法发展的必然结果，是广大劳动人民智慧的结晶。因此，运用优选法必须以广大群众的实践经验为基础。事实说明，优选法不仅在工业方面，而且在农业、交通运输、基本建设、医疗卫生等方面，都有广泛的用途。运用它，可以取得优质、高产、低消耗等效果。

§2 单 因 素

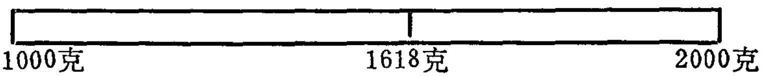
我们知道，钢要用某种化学元素来加强其强度，太少不好，太多也不好。例如，碳太多了成为生铁，碳太少了成为熟铁，都不成钢材，每吨要加多少碳才能达到强度最高；假定已经估出（或从理论上算出）每吨在1000克到2000克之间。普通的方法是加1001克，1002克，……，做下去，做了一千次以后，才能发现最好的选择，这种方法称为均分法。做一千次实验既浪费时间、精力，又浪费原材料。为了迅速找出最优方案，我们建议以下“折迭纸条法”。

毛主席教导我们：**“实践、认识、再实践、再认识，这种形式，循环往复以至无穷，而实践和认识之每一循环的内容，都比较地进到了高一级的程度。”**

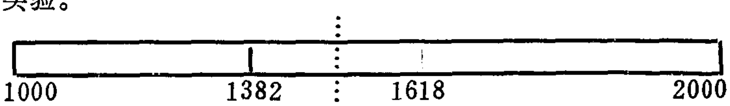
“折纸法”是我们学用伟大领袖毛主席的光辉哲学思想的一个尝试，请牢记一个数0.618。



用一个有刻度的纸条表达1000～2000克，在这纸条长度的0.618的地方划一条线，在这条线所指示的刻度做一次实验，也就是按1618克做一次实验。

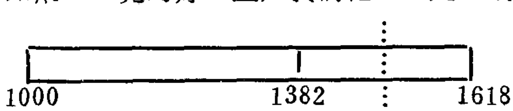


然后把纸条对中迭起，前一线落在另一层上的地方，再划一条线，这条线在1382克处，再按1382克做一次实验。

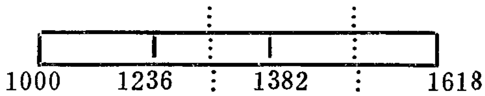


毛主席教导我们：**“差异就是矛盾。”“有比较才能鉴别。有鉴别，有斗争，才能发展。”**

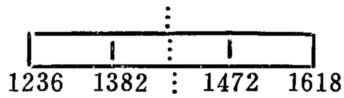
两次实验进行比较，如果1382克的好一些，我们在1618处把纸条右边的一段剪掉，得：



（如果1618克比较好，则在1382克处剪掉左边一段）。再依中对折起来，又可划出一条线在1236克处：



依1236克做实验，再和1382克的结果比较。如果，仍然是1382克好，则在1236处剪掉左边：



再依中对折，找出一个试点是1472，按1472点做实验，做出后再剪掉一段，等等。注意每次留下的纸条的长度是上次长度的0.618（留下的纸条长＝0.618×上次长）。

就这样，实验、分析、再实验、再分析，矛盾的解决和又出现的过程中，一次比一次地更加接近所需要的加入量，直到所能达到的精度。

从炼钢发展的历史也可以充分地看出“优选法”的意义，最初出现的生铁，含碳量达4％，后来熟铁出世了，几乎没有含碳量，在欧洲十八世纪七十年代前，熟铁还是很盛行的。各种钢的出现，就是按客观要求找到最合适的含碳量的过程。例如：可以冷压制成汽车外壳的钢是含碳量0.15%的低碳钢。做钢梁的大型工字钢所要求的是含碳量0.25％的软钢。通过热处理可以硬化制成车轴、机轴的是含碳量0.5％的中碳钢。做弹簧、锤、锉、斧又需要含碳1.4％的高碳钢。各种合金钢就更需要选择配方了。

以上不过拿钢来做例子，象配方复杂的化学工业、生产条件复杂的电子工业等，那就更需要优选方法了。

§3 抓　主　要　矛　盾

事物是复杂的，是由各方面的因素决定的，因而必须考虑多因素的问题。但在介绍多因素的“优选法”之前，我们必须深刻领会、再三强调我们的伟大导师毛主席关于抓主要矛盾的教导：**“任何过程如果有多数矛盾存在的话，其中必定有一种是主要的、起着领导的、决定的作用，其他则处于次要和服从的地位”**。

“优选法”固然比普通的穷举法（或排列组合法）更适合于处理多因素的问题，但必须指出，随着因素的增多实验次数也随之迅速地增加（尽管比普通方法的增加率慢得多），因此，为了加快速度节约人力、物力，减少实验次数，抓主要矛盾便成为关键的关键；至少应当尽可能把那些影响不大的因素，暂且撇开，而集中精力于少数几个必不可少的、起决定作用的因素来进行研究。

举例来说：某金属合金元件经淬火后，产生了一层氧化皮，我们希望把氧化皮去掉，而不损害金属表面的光洁度。有一种方法叫做酸洗法，就是用几种酸配成一种混合液，然后把金属元件浸在里面，目的在短时间内去掉氧化皮，不损失光洁度。

选择哪几种酸的问题，这儿不说了。只说，已知要用硝酸和氢氟酸，怎样的配方最好？具体地说要配500毫升酸洗液，怎样配？

看看因素有多少？硝酸加多少？氢氟酸加多少？水加多少？什么温度？多长时间？要不要搅拌，搅拌的速度和时间？一摆下来有七个因素，每个因素就算它分为10等级，用穷举法

就要做10^7次试验，即一千万次，就算优选法有本领，只要万分之一个的工作量，那也要做一千次，太多啦！

请看搞这项实验的同志是怎样按照毛主席抓主要矛盾的指示来分析问题的

总共是500毫升，两种酸的用量定了，水的量也就定了，所以水不是独立因素。

其次，配好了就用，温度的变化不大，温度不考虑。

再其次，时间如果指的是配好后到进行酸洗的时间，我们也不考虑这时间，因为配好就洗；如果指酸洗所需要的时间，那不是因素而是指标，这次搞出的酸洗液只要三分钟，所以也不成问题。

最后，搅拌不搅拌就暂不考虑。

结果就只有两个因素：硝酸多少？氢氟酸多少！因此，只要一天时间做14次试验就把问题解决了。否则就要成月成年的时间了。

再补充说明一下这样分析的用意：三种配比有时会误解为三个因素，实际上只有两个因素（变数）是独立的。

酸洗的时间长短，不是因素而是指标，就是说，该时间不是自变数，而是因变数。

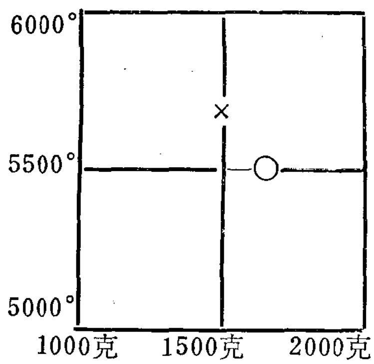
采用“优选法”的同志必须注意：在分析问题的时候，要弄清楚到底有哪些是独立变数，经验告诉我们这都是易于发生的错误。还必须再强调一下，在分析出哪些因素是独立变数之后，还要看其中哪些因素是主要的。

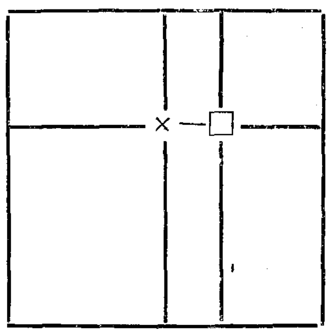
§4 双因素

假如有两个因素要考虑，一个是含量1000克到2000克，另一个是温度5000°C～6000°C。

我们处理的方法：把纸对折一下，例如是在1500克处对折，在固定了1500克的情况下，找最合适的温度，用单因素方法）即§2的方法）找到了在“×”处。再横对折，在5500度时用单因素的方法（§2的方法），找到最合适的含量在“○”处。比较“○”与“×”两处的实验，哪个结果好。如果在“×”处好，则裁掉下半张纸（如果在“○”处好，则裁掉左半张）。在余下的纸上再用上法进行。

当然因素越多，问题越复杂，但在复杂情况中含有灵活思考的余地。例如：当我们找到“×”处后，我们放弃对折法，而用通过“×”的横线，在这条横线上作试验，用§2的方法找到“□”处最好，再通过“□”处的竖线上做实验，等等。





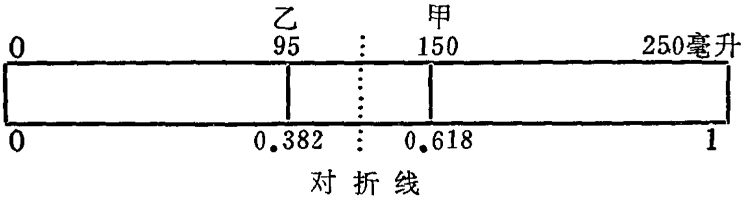
例如，上海热工仪表厂曾处理的问题就是本节提出来的、采用酸洗液洗去金属元件的氧化皮的问题。经过分析后，将问题变为：配500毫升酸洗液；问：水、硝酸和氢氟酸各放多

少效果最好。

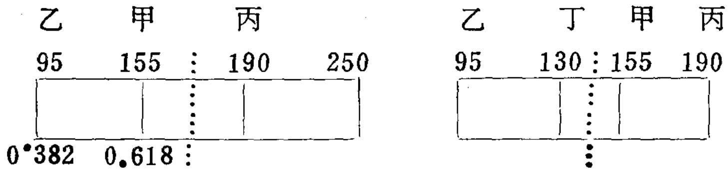
根据经验和有关资料，他们原先拟定：硝酸加入量在0～250毫升范围内变化，氢氟酸在0～25毫升范围内变化，其余加水，这是一个双因素的问题；

这样的试验，如果采用排列组合的万式进行。若硝酸0～250毫升按５毫升分一等分，共分成５０个等分。氢氟酸由0～25毫升按２毫升分一等分，共分成１３等分。如此需要进行50×13＝650次试验。这是既化时间又化物力的试验。我们用“优选法”得出的结果，氢氟酸的取值是33毫升，竟超出所试验的范围之外。因此，就是做遍650次的结果也找不到这样好的酸洗液。

用“优选法”指导试验，第一步固定氢氟酸配比在变化范围0～25毫升的正中，假定加入量为13毫升，先对硝酸含量进行优选。具体方法是，把0～250毫升标在一张格子纸条上，用纸条长度表示试验范围。从0开始，按0.618的比例先找到第一个试验点甲为155毫升，作一次试验。然后将纸条对折起来，从中线左侧找到甲的对称点乙为95毫升，作第二次试验（见图）。对比甲、乙二试验结果，知道甲比乙好，立即剪掉乙点左侧的纸条（即淘汰



小于95毫升的试验点），得出新的试验范围（即95至250毫升），再将剩下纸条对折起来，找到甲的对称点丙为190毫升，作第三次试验（见图）。对比丙与甲的结果，知道甲比丙好，即将丙点右侧的纸条剪掉（即淘汰大于190毫升的试验点），又得出新的试验范围（95～190毫升），再同样对折找甲的新对称点作新的试验（见图）。如此循环，到第五次试验即找到硝



酸配比最优为165毫升。第二步将硝酸含量固定为165毫升，用同样万法对氢氟酸加入量进行优选，发现氢氟酸含量在边界点25毫升时，酸洗质量最好，说明原来给出的范围不一定恰当，决定在酸含量25～50毫升范围再进行优选，到第九次试验，找到氢氟酸最优点为33毫升。至此，共试验十四次，所找到的配万已经能很好地满足生产的需要了，因此试验结束。否则，还须再次将氢氟酸含量固定为33毫升，再用同样方法对硝酸含量进行优选，如此做下去。直到找到最优配方为止。这个例子说明，用“优选法”不仅能够多快好省地找到最优方案，而且可以纠正根据经验初步确定的范围不当的错误。

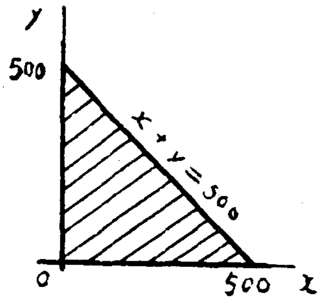
附记1.上述合金酸洗液的选配问题，在过去两年里，曾进行过两次试验。一九六八年的试验失败了，一九六九年经过无数次试验，总算找到一种酸洗液配方，勉强可用；但酸洗时间达半小时，还要用刷子刷洗。

这次采用优选方法，不到一天时间，做了十四次试验，就找到了一种新的酸洗液配方。将合金材料放入这种新的酸洗液中，马上反应，三分钟后，氧化皮自然剥落，材料表面光滑

毫无腐蚀痕迹。

附记2。令X代表硝酸量，Y代表氢氟酸量；根据经验和有关资料，假定；

$0\leq X\leq 250$(毫升)；$0\leq Y\leq 250$(毫升)。



如果没有经验和有关资料，只有如下条件：

$X+Y\leq 500,\ 0\leq X,\ 0\leq Y;$

我们如何处理？也就是如何进行选配？在这种情况下，上述的双因素方法仍可应用，但应注意在三角形之外的点不在考虑之列，更好的方法是改换变数

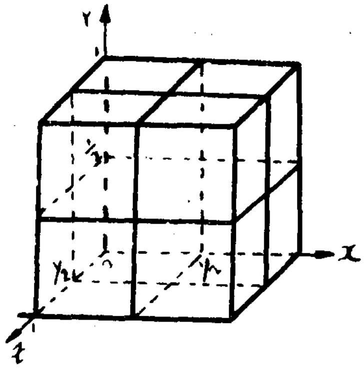
$$Z=X+Y,\ x=TZ;$$

也就是我们令$Z(0\leq Z\leq 500)$代表加入酸的总数量而令$T(0\leq T\leq 1)$代表硝酸占总酸量的成分并作为自变量。于是问题仍然归结为长方形中最优方案的问题。

$$0\leq Z\leq 500,\ 0\leq T\leq 1$$

§5 多 因 素

（初看时，此节可略去。在有些实践经验，充分掌握了一两个因素的方法之后，再试看试用这一节。）



也许有人说，“折纸法”由于纸只有长和宽，只能处理两个因素的问题，两个因素以上怎么办？学过数学的可以用“降维法”三个字来处理。只要理解了怎样降维，就可以迎刃而解了，以上两个因素问题的处理方法就是把“二维”降为“一维”的方法。

我们以上的根据是对折长方形，现在抽象成为“对折”长方体，也就是把长方体对中切为两半，大家知道共有三种切法，在这三个平分平面上，找最优点，都是两个因素（固定了一个因素）的优选问题。这样在三个平分面上各找到了一个最优点。在这三点处，比较哪个点最好，把包有这一点的1/4长方体留下，再继续施行此法。

举例说：如果在立方体

$$0\leq X\leq 1,\ 0\leq Y\leq 1,\ 0\leq Z\leq 1$$

中找最优点。在三个平面：

$$X=\frac{1}{2},\ 0\leq Y\leq 1,\ 0\leq Z\leq 1$$

$$0\leq X\leq 1,\ Y=\frac{1}{2},\ 0\leq Z\leq 1$$

$$0\leq X\leq 1,\ 0\leq Y\leq 1,\ Z=\frac{1}{2}$$

上，各用双因素法找到最优点：

$$\left(\frac{1}{2},\ Y_1,\ Z_1\right),\quad \left(X_2,\ \frac{1}{2},\ Z_2\right),\quad \left(X_3,\ Y_3,\ \frac{1}{2}\right)。$$

看这三个点中哪个最好，如果$\left(\frac{1}{2},\ Y_1,\ Z_1\right)$最好，而且

$$0 \leq Y_1 \leq \frac{1}{2},\quad 0 \leq Z_1 \leq \frac{1}{2},$$ 则在长方体

$$0 \leq X \leq 1,\ 0 \leq Y \leq \frac{1}{2},\quad 0 \leq Z \leq \frac{1}{2}$$

中继续找下去。如果 $0 \leq Y_1 \leq \frac{1}{2}$， $\frac{1}{2} \leq Z_2 \leq 1$， 则在长方体

$$0 \leq X \leq 1,\ 0 \leq Y \leq \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2} \leq Z \leq 1$$

中找下去等等。总之，留下来的体积是原来体积的 $\frac{1}{4}$ 。

在实际操作过程中，在定出两平面上的最优点后，可以经比较，先去掉一半，然后再处

二、特 殊 問 題

理另一平面 。

§1 平　分　法

在实际中遇到这样的问题。某一产品依靠某种贵重金属。我们知道，采用16％的贵重金属生产出来的产品质量合乎要求。我们问，可否少些、更少些呢？使产品自然符合要求。这样来降低成本。

我们建议用以下平分法，而不用０·６１８法。我们在平分点８％处做试验。如果８％仍然合格，我们甩掉右边一半（不合格甩掉左边一半）。然后再中点４％处做试验，如果不

1 ———————— 1 ———————— 1
　　　　　　　8％　　　　　　16％

1 ——— 1 ——— 1
　　　　4％　　8％

1 —— 1 —— 1
4％　6％　8％

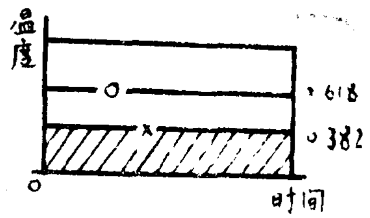
1 — 1 — 1
4％5％6％

合格，就甩掉左边一半。再在中点６％处做实验，如果合格，再在４％与６％之间的５％处做实验，仍然合格。留有余地，工厂里照６％的贵重金属进行生产。

这一方法在曙光电机厂及上海某制药厂都早已用上了。

§2 平　行　线　法

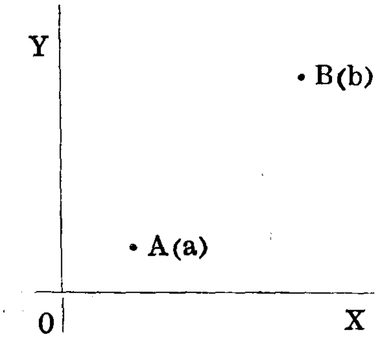
我们的问题是两个因素：一个是温度。一个是时间。炉温难调，时间易守。根据这一特点，我们采用“平行线法”，先把温度固定在０·６１８处，然后对不同的时间找出最佳点，在“○处。再把温度调到０·３８２处，固定下来，对不同的时间找出最佳点，在“×”处。对比之后“○”处比“×”处好，我们划掉下面的部分。然后用对折法找到下一次温度该多少，……



这个方法是化工厂二丁酯小组结合实际的创造。

§3　陡　　度　　法

在A点做实验得出来的数据是a，在B点做实验得出来的数据是b。如果a>b，则称为 由B



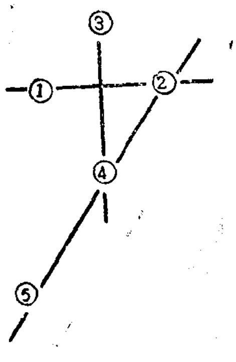
$$\frac{(a-b)}{(\text{A、B间的距离})}$$

上升到A的陡度。

在化工二厂，我们遇到过这类问题。这是一个双因素的问题，我们在横线上做了两个实验（①、②）之后，我们立刻转到竖线上去，又做了两个实验（③、④）。我们发现④点特好，②点特差；在这种情况下我们就不再在横、竖二线上作实验了。我们在②与④的线连上⑤点做了一个试验，结果更好，超过了我们的要求。

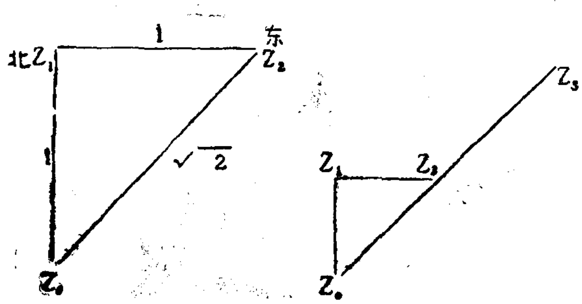
总起来这是陡度问题。可以计算①到④，②到④，③到④的陡度；看那个最陡，就向那个方向爬上去。

这个方法在上海炼油厂曾经用过：从已有的实验数据中发现了很陡的方向，这个方向正是寻找最优方案的方向。在这个方向上实验，我们找到了最满意的点。



§4　瞎　子　爬　山　法

瞎子在山上某点，想要爬到山顶，怎么办？从立足处用明杖向前一试，觉得高些，就向前一步，如果前面不高，向左一试，高就向左一步，不高再试后面，高就退一步，不高再试右面，高就向右走一步，四面都不高，就原地不动。总之，高了就走一步，就这样一步一步地走，就走上了山顶。



这个方法在不易跳跃调整的情况下有用，当然我们也不必一步一步按东南西北四个方向走，例如在向北走一步向东走一步后，我们得出$Z_0Z_1Z_2$三个数据，由此可以看到由Z_1到Z_2的陡度是$Z_2—Z_1$，而由Z_0到Z_2的陡度是$\frac{Z_2-Z_0}{\sqrt{2}}$，$\frac{Z_2-Z_0}{\sqrt{2}}>Z_1-Z_0$，我们为什么不好尝试在$Z_0Z_2$的方向上走一段试试看，点愈多，愈可以帮助我们找向上爬的方向。

这个方法适合于正在生产着而不适于大幅度调整的情况。

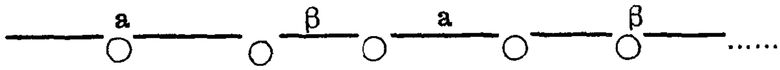
§ 5　非单峰的情况如何办？

也许有人说，你所讲的只适用于“单峰”的情况，多峰（即有几个点，其附近都比它差）的情况怎样办？我们建议：

1．先不管它是单峰还是多峰，就按单峰的方法去做，找到一个“峰”后如果符合要求，就先开工生产，然后有时间继续再找寻其它可能的更高的“峰”（即分区寻找）。

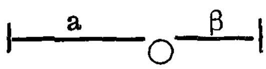
2．先做一批分布的此较均匀蔬离的实验，看其是否有“多峰”的现象出现，如果有“多峰”现象，则按分区寻找。如果是单因素，最好依以下的比例划分：

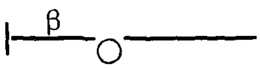
$$a:\ \beta=0.618:\ 0.382$$



例如，三个分点，可以取之如：

这留下来的成为：



或


的形势，这就便于应用0.618法。

但不要有所顾虑，我们的方法不会比穷举法即排列组合法更吃亏些。充其量不过是，用“优选法”后，你再补做按穷举法原定要做的一些实验而已。

在实际工作中，尤其是在探索未知的科研项目，已经见到过一些比较复杂的问题。比方出现鞍点（即马鞍形的中间点，该点对左右而言它是极大，对前后则它又是极小）的情况。这要按常规做法，会发生一辈子都做不完的情况。但用“优选法”在一两周即完成了。在化工系统碰到过不少这种例子。

三、补　充

我们伟大导师毛席席的倡导的教授法十条的头三条是“启发式（废止注人式）”，“由近及远”，“由浅入深”。为了“用”，我们扼要地在第一部分平话中讲了一般性的方法，在第二部分列举了一些特殊性的方法。

在“用”的过程中，如对以上两部分仍不能满足，可以参考这第三部分。如果读者一时不能全懂，不要急，拣能用的就用。在不断实践，在不断思考的过程中，会有所前进的。至于看理论完整的专书，最好是在有些实际经验之后。

§1　这是一个求最大（或最小）值的问题

对学过数学的人来说，这是一个求函数的最大（或最小）值的问题。例如：某一质量指标T取决于三个因素的大小，也就是

$$T=f(X,\ Y,\ Z)$$

问题的中心在于变化范围

$$a\leqq X\leqq p,\ b\leqq Y\leqq p,\ c\leqq Z\leqq r$$

内求函数f（X，Y，Z）的最大值。也许有人认为这是在微积分书上早已见到并熟悉了的问题。但实际上，有一个能行不能行的问题。首先，你必须知道函数f（X，Y，Z）的表达式，即使知道了f（X，Y，Z）的解析式，还要解联立方程。

$$\frac{\partial f}{\partial X}=0,\ \frac{\partial f}{\partial Y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial Z}=0;$$

这可能是超越方程，求解并不容易；即使解出来了，还要判断，并且研究它是不是整个区域内的最大值。

但简单的f（x,Y，Z）不常见，还可能未被发现，甚至根本写不出来。例如上面平话部分所提到的，“说好吃的”人数百分比是用碱量的一个怎样的函数？

也许有人建议，用统计回归找出一个公式，然后再求极大值。但统计学总是需要大量实验，计算也不简单，而且用回归得出来的函数往往简单得失真（经常假定是一次二次的）。我们既有做大量实验的打算，为什么不直接采用优选方法呢？何况这样做，实验次数还可大大减少！

§2　0.618的由来

0.618是

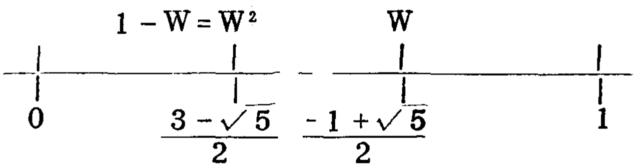
$$W=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

的三位近似值，根据实际需要可以取0.6、0.62，或比0.618更精确的值。

W这一个数有一个特殊性，即

$$1-W=W_2\text{（该方程的解正是}\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\text{）。}$$

W与1－W把区间〔0，1〕分为如下图的形式：



不管你丢掉那一段（〔0，（1—W）〕或〔W，1〕），所余下的包有一点，其位置与原来两点之一（1—W或W）在〔0，1〕中所处的位置的比例是一样的。具体地讲，原来是 $0<1-W<W<1$ 丢掉右边一段（〔W，1〕）后的情况是：

$$0<1-W=W^2<W$$

这不正是〔0，1〕缩小W倍的情况吗？

同样，丢掉左边一段（〔0，（1－W）〕）后的情况是：

$$1-W<W=(1-W)+W(1-W)<1$$

这区间的总长度还是W，而W与1的距离是W的W倍。

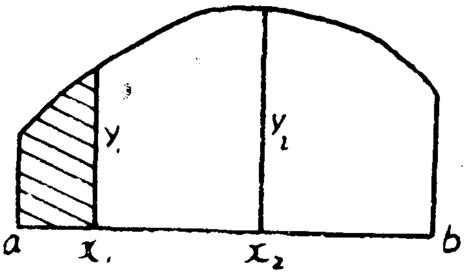
这方法是平面几何学上的黄金分割法，因而这个“优选法”也称为黄金分割法，在中世纪欧洲流行着依黄金分割法做的窗子最好看的“奇谈”（也就是用0.382：0.618的比例窗子最好看）。

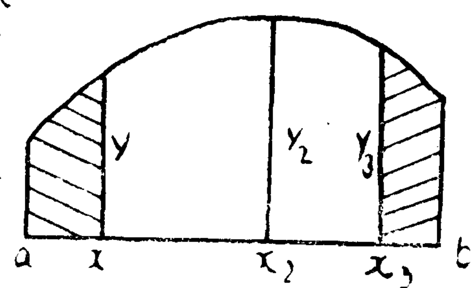
§3 来回调试法

读者不要以为上一节已经回答了 $W=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 的来源了。

问题更准确的提法应是：在区间［a，b］内有一个单峰函数f（x），我们有如下的方法找到它的顶峰（并不需要函数f（x）的真正表达式）。

先取一点 x_1 做实验得 $Y_1=f(x_1)$，再取一点 x_2 做实验，得 $Y_2=f(x_2)$，如果 $Y_2>Y_1$，则丢掉［a，x_1］，（如果 $Y_2<Y_1$ 则丢掉［x_2，b］），在余下的之部分中取一点 x_3（这点 x_3 也可能取在 x_1，x_2 间），做实验得 $Y_3=f(x_3)$，如果 $Y_3<Y_2$ 则丢［x_3，b］，再在余下的（x_1，x_3）中取一点 x_4，……不断做下去，不管你怎样盲目地做，总可以找到f（x）的最大值。但问题是：怎样取 x_1，x_2……使收效最快（这里，效果是对任意f（x）而言），也就是做实验的次数最少。要回答这一问题，还需要一些并不高深的数学知识（例如：高等数学引论第一章的知识），不在这儿详谈了。





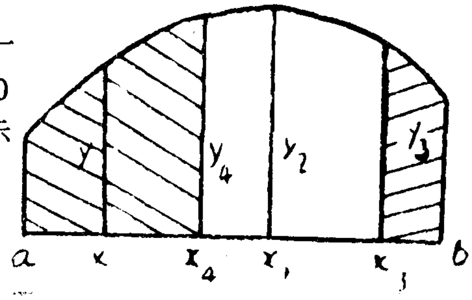
但必须指出，外国文献上的所谓证明并非证明。

§4 分数法

在我国数学史上关于园周率π有过极为辉煌的一页。伟大的数学家祖冲之（公元前429～500年）就有以下两个重要贡献。其一，是用小数来表示圆周率：

$$3.145926<\pi<3.1415927$$

其二，是用分数



$$\frac{355}{113}$$

来表示圆周率，它准到六位小数，而且其分母小于33102的分数中没有一个比它更接近于π。

这种分数称为最佳渐近分数（可参考：“从祖冲之的圆周率谈起”，青年数学小丛书，中国青年出版社）。

我们现在处理

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

也有两种方法，其一是小数法0.618，其二是分数法，即上述所引用的小书上的方法，可以找到这数的渐近分数：

$$\frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \cdots\cdots$$

这些分数的构成规律是由：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，……得来的，而这个数列的规律是：

1+1=2，1+2=3，2+3=5，3+5=8，5+8=13，8+13=21，13+21=34，……

是否要这样一个一个地算出？能不能直接算出第n个数Fn呢？一般的公式是有的，即

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

（读者可以参考“从扬辉三角谈起”中国青年出版社，有了这个公式，读者也可以用归纳法直接证明）。读者也极易算出：

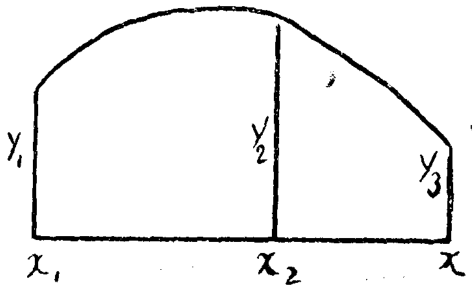
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=W=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

由渐近性质读者也可以看到分数法与黄金分割法差异不大，在非常特殊的情况下，才能少做一次实验。

如果特别限制试验次数的情况下，我们可用分数来代替0.618，例如：假定做十次实验，我们建议用$\frac{86}{144}$如果做九次实验用$\frac{55}{89}$等等。这种情况只有试验一次代价很大的情况才用。

§5 抛物线法

对技术精益求精，不管是黄金分割法或是分数法，都只比较一下大小，而不管已做实验的数值如何。我们能不能利用一下，例如在试得三个数据后，过这三点作一抛物线，以这抛物线的顶点作下次试验的根据。确切地说在三点X_1，X_2，x_3各试验得数据Y_1，Y_2，Y_3我们用插入公式



$$Y = Y_1 \frac{(X-X_2)(X-X_3)}{(X_1-X_2)(X_1-X_3)} + Y_2 \frac{(X-X_1)(X-X_3)}{(X_2-X_1)(X_2-X_3)} + Y_3 \frac{(X-X_1)(X-X_2)}{(X_3-X_1)(X_3-X_2)}$$

这函数在

$$X_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Y_1(X_2^2-X_3^2)+Y_2(X_3^2-X_1^2)+Y_3(X_1^2-X_2^2)}{Y_1(X_2-X_3)+Y_2(X_3-X_1)+(Y_3(X_1-X_2)}$$

处取最大值。因此我们下一次的选点取X[illegible]X₀（但最好是当Y_2比Y_1和Y_3大时，这样做比较合适）。同时当$X_0=X_2$时，我们的方法还必须修改。例如：取$X_0=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$。

§　6　双变数与等高线

变数多了，问题复杂了，也就困难了。但问题愈复杂，就愈需要动脑筋，也愈有用武之地第二部分中曾经提到过，我们并不要做完一条平分线后再做另一条，而是可以在每条线上做一两个试验就可以利用“陡度”了。也有人建议：第一批试验不在对折线上做，而在0.618线上用单因素法求出这直线上的最优点。这建议好，下一批实验可以少做一个。我们也提起过，在温度难调，时间好守的情况下，用平行线法，这些变“着”都显示着，在复杂的情况下，更需要灵活思考。

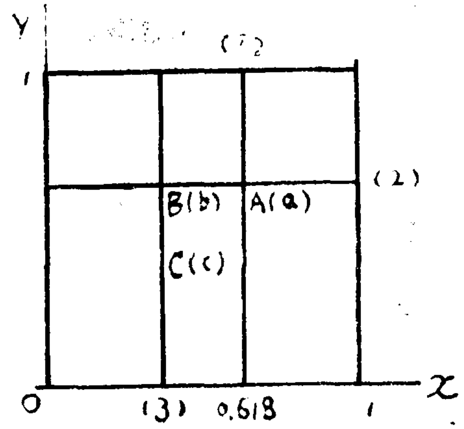
我们还是从两个变数谈起。

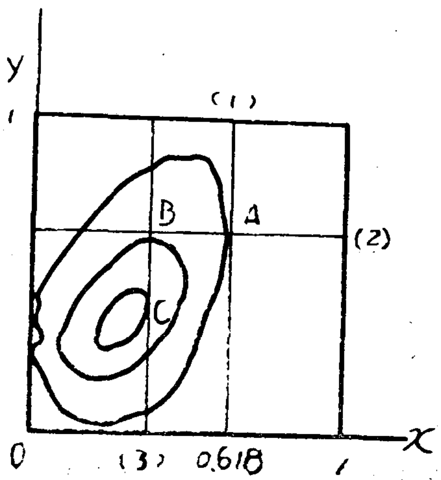
我们假定在单位方

$$0 \leq X \leq 1, \qquad 0 \leq Z \leq 1$$

中做实验，寻求f（X，Y）的最大值。从几何角度来看，f（X，Y）可以看成为在（X，Y）处的高度。如果把f（X，Y）取同一值的曲线称为等高线，f（X，Y）=a的曲线称为高程是a的等高线。这样两个变数问题的几何表达方式就是更有等高线的地形图。

我们再回顾一下，以往我们在一直线上求最佳点的几何意义。





例如在X＝0.618的直线(1)上，照单因素方法做实验，找到最佳点在A处，数值是a。这一点是一等高线（高程为a）的切点。再在通过A的、平行于X轴的直线上找最平点，这点在B处，数值是b。这样b>a，而且B是等高线f（X，Y）＝b的切点。再在通过B平行于Y轴的直线上找最佳一点……。这一方法就是一步一步地进入一个高过一个的等高圈，最后达到高点的方法。

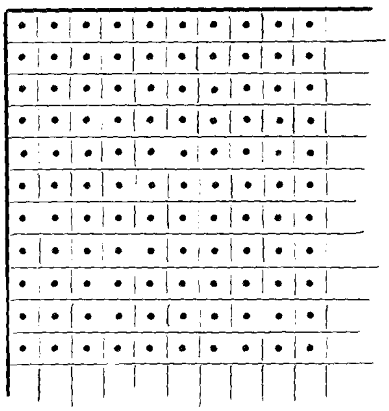
注意：有人认为，找的一点横算是最优，竖算也最优，这样的点称为“死点”，因为以上的方法再也做不下去了。实际上，这是误会，这不是“死点”，而是最有意义的点（读者试从$\frac{\delta f}{\delta X}=0$ $\frac{\delta f}{\delta Y}=0$，就可以看出这点所处的地位了）。

有了几何模型，就可以启发出不少方法，第二部分所讲的陡度就是其中之一。例如还有：最陡上升法（梯度法），切块法，平行切线法等等。

多变数的方法不少，不在这儿多叙述了。但必须指出：资本主义国家流行了很多名异实同，巧立名目，使人看了眼花了乱的方法。为专名、为专利，这是资本主义制度下所产生的自然现象。但我们必须循名核实、分析取舍才行。

§ 7　统计试验法

把一个正方形（或长为形），每边分为一百份，总共有一万个小方块，每块取中心点，共一万个点。我们的目的是：找出一点，在那点实验所得的指标最好。



如果我们考虑问题容易一些的问题，找出一点比8000点的指标都好，我们建议用以下的方法：

把把这些点由一到一万标起号来。另外做一个号码袋，里面有一万个号码。模出那一个号码就对号做试验，这方法叫做统计试验法。也就是外国文献上所谓的蒙特—卡罗（Monte—Garlo）法。

它的原理是：一个袋内装有2000个白球，8000个黑球，模出一个白球的可能性是2000/10000＝0.2＝20%；模出一个黑球的可能性是：

$$1-0.2=0.8$$

连模两个都是黑球的可能性是：

$$0.8^2=0.64$$

连模四个都是黑球的可能性是：

$$(0.8)^4=(0.64)^2=0.41$$

连模八次全是黑球的可能性是：

$$(0.6)^8=(0.41)^2=0.17$$

连模十次全是黑球的可能性是：

$$(0.8)^{10}=(0.8)^8(0.8)^2=0.11$$

也就是连模十次有白球的可能性是：

$$1-0.11=0.89$$

也就是差不多十拿九稳的事了。

结合以上的问题，我们随机做十次试验，有89%的把握找到一点比8000点的指标都好。

这方法的优点在于，不管峰峦起伏，奇形怪状都行，因素多少关系也不大。

缺点在于毕究是统计法，要碰“运气”大数规律、实验次数多才行。

其中还包刮一个“摸标号”的问题。除在上面所介绍的号码袋外，还有所谓“随机数发生器”。一种是利用放射源用的盖格计数器计算粒子数，看奇、偶，用二进位法来决定的；另一种是利用噪声放大器。这些机器有快速发生随机数的优点，但就做实验的速度而言，并不需要如此快速地产生随机数。

更好的方法是数论方法（见“数值积分及其应用”，科学出版社）。这一方法既不需要任何装置，而且误差不象上述所讲的两种机器那样是概率性的，而且肯定性的。

这一方法，读者务必要分析接受，不要轻易应用。

华罗庚同志关于推广应用优选法工作中要注意的几个問题

华罗庚同志在沈阳期间，曾多次大会讲授优选法，并先后到沈阳六一五厂、拖拉机厂、纺织机械厂、东北第六制药厂等十三个企事业单位进行检查指导；看了市和铁西区优选法成果展览会；参加了电子局和建材局召开的现場会；与二轻局三结合人员及市技协骨干开了两次座谈会。

在这期间，华罗庚同志对推广优选法工作如何向深度、广度发展的问题上，有一些谈话，提出了很多宝贵意见。现综合整理如下，供参考。

一、能够取得更多的成果

华罗庚同志认为有些单位推广优选法的准备工作做得较好，领导重视，建立机构，发动了有实践经验的老工人和劳动模范作为骨干力量，在短期内取得了不少成果，在机加工方面有了突破，成果自下而上经过三结合人员验收，搞得很扎实。如果千人以上的工厂都能取得百项成果，对增产节约的作用就更大了。

二、要注意优选法的深度和广度

应用优选法要抓主要矛盾，结合实际，先易后难，先简后繁，尽快取得一批成果，掀起群众运动。在群众已基本发动起来，有了一些成果之后，要把运动引向纵深方向发展，在广度方面，可以在生产的每个环节上都进行优选即广优选，做到人人实行优选，台台机床、道道工序都经过优选，这就能使生产取得更好效果。

第四机械工业部对电子工业推广应用优选法很重视。电子工业产品质量要求高，工艺复杂，工序多，且衔接紧密，很适合广优选。假如某个产品有二道工序，第一道工序合格率为百分之八十，第二道工序也是百分之八十，则这个产品的成品合格率就只有百分之六十四。如果工序更多，每道工序都是百分之八十的话，最后合格率更低了，如共有二十道工序，每道合格率为百分之八十，最后成品合格率只有百分之一点一五。所以，只有实行广优选，才能全面提高产品质量。

在深度方面，应在优选法广泛开展后，围绕厂内某些老大难问题实行攻尖。可以组织一些有经验的工人和技术人员，对有关因素进行优选试验，以攻克这些技术难关。

三、“山顶上迈细步”

在推广优选法工作中，要以毛主席光辉哲学思想为指针，抓住主要矛盾，注重实践。在应用瞎子爬山法时，开始步子可大些，到山顶上要迈细步，就是试验到最后要细些。为了验证最后结果正确无误，可以重复几次试验进行比较。

四、学会方法

可以学习外地应用优选法的经验，但不能照搬配比配方或操作条件，关键是要掌握优选法方法，以便运用自如，在生产斗争和科学实验过程中，结合自已的具体情况，具体分析，经常不断地进行优选。有时虽然是同一个产品，但由于客观条件不同，照搬配方也不一定成功，但学会了方法，就不受条件变化的限制，可以随时随地进行试验，并可把这一方法应用到其他方面。

五、优选法与技术革新结合起来

推广优选法不是权宜之计。为了多快好省地建设社会主义，要长期坚持应用优选法；要把推广优选法与技术革新和机械化、自动化结合起来，巩固和发展优选法的成果。

六、编一本《优选法在机械加工上的应用》手册

机加工是应用优选法很大的一个面，在沈阳市已开始铺开了，有了不少成果。要及时总结经验。华罗庚同志建议抽几个有实践经验的老师付为主，收集资料，编写一本《优选法在机加工上的应用》，以便总结和推广这方面的经验。

（摘自沈阳市科学技术局《科技情报》第十六期）

华罗庚同志給机加工师付同志們的一封信

机加工的师付同志们：

您们好！您们在机加工上所创造的成果既丰富又有广泛的意义。我们从中受到了深刻的教育。

如果其他条件（刀具、工件、吃刀深度、走刀量等）固定，想找一个最合适的转速，那么按照转速不均匀分挡的特殊性，介绍以下方法，供参考。

例如：车C6140机床，转速分十二挡，排列次序是这样的：

1	2	3	4	⑤	6
23转/分	33转/分	48转/分	67转/分	95转/分	135转/分
7	⑧	9	10	11	12
170转/分	240转/分	350转/分	485转/分	690转/分	1000转/分

这里建议运用分数法的$\frac{8}{13}$。第一次试验在第八挡做；第二次试验在对称的第五挡做。然后比较两次试验的效果，如果第⑧挡好就去掉⑤以下各挡。（如果第⑤挡好，则去掉⑧以上各挡）再在对称的第⑩挡做，再比较⑧和⑩两次试验的效果。

如果⑩挡好，则去掉⑧以下各挡。

再在对称的第⑪挡做。

6　7　⑧　9　⑩　11　12

9　⑩　⑪　12

⑨　⑩

再比较，如果第⑩挡好，则在第9挡做最后一次。这样就可以找到最好的挡。又如有的转速分24挡，根据经验有些挡是不易采用的，其中20个挡可用，则依快慢次序排列，可从13挡做起。当然不用上述方法，而用0.618法也行。此时有不少师付采用“优选法”选择刀具的合理角度，对提高加工质量减少刀的损耗也取得了很好的效果。

关于机床加工运用优选法，还需注意车床负荷、寿命和精度等，这是师付们都已注意了的事，但我还是乘便提一下。

华罗庚

1972.6.26

转载自抚顺市革委会科技局《科技情报》增刊28期1972年9月22日