高等数学解题方法

修订版 上册

邱忠文 杨则燊 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学解题方法

修订版

上　　册

邱忠文　杨则燊　主编

天津大学出版社

图书在版编目(C I P)数据

高等数学解题方法/邱忠文,杨则燊主编.—天津:天津大学出版社,1996.10 (2002.10 重印)
ISBN 7-5618-0908-5

Ⅰ.高… Ⅱ.邱… Ⅲ.高等数学-解题-方法
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 012749 号

出版发行	天津大学出版社
出 版 人	杨风和
地 址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话	发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷	天津大学印刷厂
经 销	全国各地新华书店
开 本	148mm×210mm
印 张	9.375
字 数	280 千
版 次	1996 年 10 月第 1 版 2002 年 3 月第 2 版
印 次	2002 年 10 月第 9 次
印 数	42 001—47 000
定 价	15.00 元

前　　言

为了适应高等工科院校本科学生对高等数学课程学习的需要，结合当前的教学实际，我们编写了《高等数学解题方法》，作为学习“高等数学”课程的参考用书.全书共有八章，分上、下两册，包括了高等数学的基本内容。

针对当前学生学习高等数学中的共同性问题，如认为高等数学有些习题难作，方法不易掌握等困难，本书侧重于提高学生的解题能力，通过对本书例题选解的阅读，可以启发读者的解题思路，提高解题能力，收到举一反三的效果.本书的主要特点是：概念清楚，重点突出，例题丰富，解法新颖；各章均选编了典型的综合例题，并强调了内容的融会贯通.

为了使学生了解各章的重点内容和教学要求，本书还增写了附录.附录部分包括了天津大学1992～1995级的期中、期末考试试卷（附解答），便于学生复习、参考.

本书对报考工科院校硕士研究生和参加高等教育自学考试的读者复习高等数学，加强基本解题方法的训练都有较大的帮助.

参加本书编写工作的有邱忠文、杨则燊、朱静和李君湘.限于编者的水平，对本书的疏误之处，恳请读者指正.

编者

1996.4

再版前言

为了适应高等工科院校本科生对高等数学课程学习的需要，我们编写了《高等数学解题方法》，作为学习“高等数学”课程的教学参考用书．全书共有八章，分上、下两册，基本上包括了高等数学的主要内容．

随着当前教学改革的深入发展，通过近几年的实践，我们对《高等数学解题方法》一书进行了适当的改编，增加了一部分选择题，对部分解答题作了增删．

本书对正在学习“高等数学”课程的本科生、报考硕士研究生及参加高等教育自学考试的读者复习“高等数学”，加强基本解题方法的训练都有较大的帮助．

参加本书编写工作的有邱忠文、杨则燊、李君湘和解可新，另外，韩健及孙秀萍为本书的出版也做了不少工作，一并表示谢意．限于编者的水平，对本书的疏误之处，恳请读者指正．

编者

2002年3月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　函数

重要概念、公式与结论

一、函数的定义

设有两个数集 A 与 B，f 是一个确定的对应规律，如果对于 A 中的每一个数 x，通过 f，B 中都有惟一的数 y 和它对应，记为

$$x \xrightarrow{f} y \text{ 或 } f(x)=y,$$

这时，称 f 是 A 到 B 的函数，或 f 是 A 上的函数，并称 A 为函数的定义域.

当 x 遍取 A 中的一切数时，与它对应的数 y 组成的数集

$$B_f=\{y \mid y=f(x), x\in A\},$$

称 B_f 为函数的值域，并称变数 x 为自变量；变数 y 为因变量.

二、复合函数及反函数的定义

1. 复合函数

设 $y=f(u)$ 是数集 B 上的函数，$u=\varphi(x)$ 是由数集 A 到 B 的一个非空子集 B_φ 的函数，因此，对于每一个 $x\in A$，通过 u，都有惟一的 y 与它对应，这时就在 A 上产生了一个新的函数，用 $f\circ\varphi$ 表示，函数 $f\circ\varphi$ 称为 A 上的复合函数，记作

$$x \xrightarrow{f\circ\varphi} y, \text{或} \quad y=f[\varphi(x)], x\in A.$$

其中 u 叫做中间变量，A 是复合函数的定义域，$f\circ\varphi$ 表示由自变量 x 产生函数 y 的对应规律.

2.反函数

设函数 $y=f(x)$,f 是一个由数集 A 到数集 B 上的一一映射,则它的逆映射 f^{-1} 所确定的函数就叫做 $y=f(x)$ 的反函数,并记为

$$y\xrightarrow{f^{-1}}x \quad 或 \quad x=f^{-1}(y).$$

三、函数的性质

1.有界性

若有正数 M 使函数 $f(x)$ 在某区间 I 上恒满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

2.单调性

严格的单调增(减)函数 $f(x)$:任给 x_1、$x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,必有 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$.

广义的单调增(减)函数 $f(x)$:任给 x_1、$x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,必有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2))$.

3.奇偶性

奇函数 $f(x)$:任给 x、$-x\in I$,有 $f(-x)=-f(x)$ 成立.

偶函数 $f(x)$:任给 x、$-x\in I$,有 $f(-x)=f(x)$ 成立.

4.周期性

周期函数 $f(x)$:若存在一个非零的常数 T,x、$x+T\in I$,在区间 I 内恒有 $f(x+T)=f(x)$.

四、初等函数

1.基本初等函数

幂函数:$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R},\alpha\neq 0)$.

指数函数:$y=a^{x}(a>1,a\neq 1)$.

对数函数:$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$.

三角函数:$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$.

反三角函数:$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\arccot x$.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤所构成的并用一个解析式表达的函数,叫做初等函数.

五、函数图形的对称性质

①奇函数的图形关于原点对称.

②偶函数的图形关于 y 轴对称.

③直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

六、数学归纳法

设 P 是一个与自然数 n 有关的命题,当 $n=1$ 时,P 成立;若当 $n=k$ 时,P 成立并能推导出 $n=k+1$ 时,P 也成立;则命题 P 对一切自然数 n 均成立.

例题选解

一、函数的定义域与函数值

(一)选择题

1. 函数 $f(x)=\arcsin(2x-1)$ 的定义域为

(A) $x\in(-\infty,+\infty)$.　　(B) $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

(C) $x\in[0,1]$.　　(D) $x\in[0,+\infty]$.

答(C)

2. 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{3-x}{x+2}}$ 的定义域为

(A) $x\in[3,+\infty]$.　　(B) $x\in(-\infty,-2)$.

(C) $x\in[-2,3)$.　　(D) $x\in(-2,3]$.

答(D)

3. 设 $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{3-x}{\sqrt{9-6x+x^2}}\right)$,则 $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 的值等于

(A) $\frac{2}{9}$.　　(B) 0.

(C) $-\frac{2}{9}$.　　　　(D) 3.

答(B)

(二)计算题

4.求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

解　函数在$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0\end{cases}$时有意义,即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).\end{cases}$$

故函数的定义域 $D_f=[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

5.求函数 $y=\lg\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$的定义域.

解　函数在 $\sin\frac{\pi}{x}>0$ 时有意义,即

$$2n\pi<\frac{\pi}{x}<(2n+1)\pi \quad (n=0,\pm 1,\pm 1,\cdots).$$

当 $n\neq 0$ 时,$2n<\frac{1}{x}<(2n+1)$,知 $x\in\left(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right)$.

当 $n=0$ 时,$0<\frac{1}{x}<1$,知 $x>1$.

故函数的定义域 $D_f=\left(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right)\cup(1,+\infty)$

$$(n=\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

6.设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$,求:

(1) $f(x)$的定义域;

(2) $f(\ln x)$的定义域;

(3) $f(x+a)+f(x-a)$的定义域$(a>0)$.

解　(1) $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$的定义域是 $3-x>0$,即 $3>x$;$\lg(x-2)$的定义

域是 $x-2>0$，即 $x>2$. 故函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$ 的定义域

$$D_f=(2,3).$$

(2) $f(\ln x)$ 的定义域是 $2<\ln x<3$，即 $e^2<x<e^3$.

(3) $f(x+a)$ 的定义域是 $2-a<x<3-a$；

$f(x-a)$ 的定义域是 $2+a<x<3+a$.

故 $f(x+a)+f(x-a)\quad(a>0)$ 的定义域是

$$2+a<x<3-a\left(0<a<\frac{1}{2}\right).$$

7. 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，求 $f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解　$f(-x)=\dfrac{1+(-x)}{1-(-x)}=\dfrac{1-x}{1+x}$，

$$f(x+1)=\frac{1+(x+1)}{1-(x+1)}=-\frac{x+2}{x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{x+1}{x-1}.$$

8. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(2)$.

解　$f(-2)=1+(-2)^2=5$，

$f(0)=1+0^2=1$，

$f(2)=2^2=4$.

9. 若 $f(x)=x^2\ln(1+x)$，求 $f(e^{-x})$.

解　$f(e^{-x})=(e^{-x})^2\ln(1+e^{-x})=e^{-2x}\ln(1+e^{-x})$.

10. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$，$f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.

解　因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，

所以　$f(x)=x^2-2$，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}-4.$$

11. 若 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x>0)$，求 $f(x)$.

解　令 $u=\frac{1}{x}$，则 $f(u)=\frac{1}{u}+\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}$，

即
$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

12. 若 $y=f(u)=\begin{cases}2u, & u\leqslant 0,\\ 0, & u>0,\end{cases}$ $u=\varphi(x)=x^2-1$，求 $y=f[\varphi(x)]$.

解　当 $u=x^2-1\leqslant 0$ 时，$|x|\leqslant 1$，此时 $f[\varphi(x)]=2(x^2-1)$，而当 $u=x^2-1>0$ 时，$|x|>1$，有 $f[\varphi(x)]=0$，于是有

$$y=f[\varphi(x)]=\begin{cases}2(x^2-1), & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

13. 设 $f(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$ 求 $F(x)=f[f(x)]$.

解　当 $|x|\leqslant 2$ 时，$F(x)=2-(2-x^2)^2$. 当 $|x|>2$ 时，$F(x)=-2$. 故有

$$F(x)=f[f(x)]=\begin{cases}-x^4+4x^2-2, & |x|\leqslant 2,\\ -2, & |x|>2.\end{cases}$$

14. 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}(x\neq 0,1)$，求 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$，$f[f(x)]$.

解　由 $f(x)=\frac{x}{x-1}$，有 $\frac{1}{f(x)}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$. 于是

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)-1}=1-x\,(x\neq 0,1),$$

$$f[f(x)]=\frac{\frac{x}{x-1}}{\left(\frac{x}{x-1}\right)-1}=x.$$

15.设 $\varphi(x)=x^2,\psi(x)=2^x$,求 $\varphi[\psi(x)],\psi[\varphi(x)],\varphi[\varphi(x)],\psi[\psi(x)]$.

解 $\varphi[\psi(x)]=(2^x)^2=2^{2x}$,

$\psi[\varphi(x)]=2^{x^2}$,

$\varphi[\varphi(x)]=(x^2)^2=x^4$,

$\psi[\psi(x)]=2^{2^x}$.

16.设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|),g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

求 $f[g(x)],g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+|x|), & x<0,\\ \frac{1}{2}(x^2+|x^2|), & x\geqslant 0.\end{cases}$

即

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

同理

$$g[f(x)]=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

17.若对任意的实数 x、y 有

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|,\text{且 } f(0)=0.$$

证明:(1)$f(x)f(y)=xy$;(2)$f(x+y)=f(x)+f(y)$.

证明 (1)令 $y=0$,有 $|f(x)|=|x|$,从而 $f^2(x)=x^2$,由

$$|f(x)-f(y)|^2=|x-y|^2,$$

可得 $f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)=x^2-2xy+y^2$,

即 $f(x)f(y)=xy$.

(2)令 $y=1$ 代入 $f(x)f(y)=xy$,有

$$f(x)f(1)=x.$$

$$f(x+y)f(1)=(x+y)\cdot 1=f(x)f(1)+f(y)f(1)$$

$$=[f(x)+f(y)]f(1),$$

注意到 $f^2(1)=1\neq 0$,故有

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

二、函数的性质、复合函数与反函数

(一)选择题

18. 设 $f(x)=\dfrac{\sin(x+1)}{x^2+1}, x\in(-\infty,+\infty)$. 则此函数是

(A) 奇函数. (B) 偶函数.

(C) 有界函数. (D) 周期函数.

答(C)

19. 下列函数中,是奇函数的为

(A) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$. (B) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}(x>0)$.

(C) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$.

(D) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$.

答(C)

20. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}, g(x)=\begin{cases}1, x<10,\\5, x>10.\end{cases}$ 则 $g(x)$ 等于

(A) $2f(x-10)-3$. (B) $2f(x-10)+3$.

(C) $f(x-10)+3$. (D) $f(x-10)-3$.

答(B)

21. 设 $f(x)=4x^3-3x, \varphi(x)=\sin 2x$,则 $\varphi[f(x)]$ 等于

(A) $\sin(8x^3-6x)$. (B) $4\sin^3 2x-3\sin 2x$.

(C) $\sin(4x^3-3x)$. (D) $4\sin^3 x-3\sin x$.

答(A)

(二)计算题

22. 设 $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$,求

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

解 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[(2x^4-3x^3-5x^2+6x-10)+(2x^4+3x^3-5x^2-6x-10)]$

$=2x^4-5x^2-10$,

$\psi(x)=\frac{1}{2}[(2x^4-3x^3-5x^2+6x-10)-(2x^4+3x^3-5x^2-6x-10)]$

$=-3x^3+6x$.

23. 设 $F(x)=\lg(x+1)$，证明 $F(y^2-2)-F(y-2)=F(y)$.

证明

$$\begin{aligned}F(y^2-2)-F(y-2)&=\lg[(y^2-2)+1]-\lg[(y-2)+1]\\&=\lg(y^2-1)-\lg(y-1)\\&=\lg(y+1)=F(y).\end{aligned}$$

24. 证明定义在 $[-l,l]$ 上的任何函数 $f(x)$ 都可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和，并且表示法是惟一的.

证明　存在性.

由于　$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

是偶函数，而

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

是奇函数，且有

$$\begin{aligned}f(x)&=\varphi(x)+\psi(x)\\&=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\end{aligned}$$

这说明 $f(x)$ 可以表示成为一个偶函数 $\varphi(x)$ 与一个奇函数 $\psi(x)$ 之和.

下面证明表示法是惟一的. 设 $\varphi_1(x)$ 是偶函数，$\psi_1(x)$ 为奇函数，

且亦有

$$f(x)=\varphi_1(x)+\psi_1(x), \tag{①}$$

于是

$$f(-x)=\varphi_1(-x)+\psi_1(-x)=\varphi_1(x)-\psi_1(x). \tag{②}$$

由①、②两式，有

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=\varphi(x),$$

$$\psi_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\psi(x),$$

所以表示法是惟一的.

25. 设 $f(x)$满足条件 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$($a$ 为常数)，且$f(0)=0$，证明 $f(x)$是奇函数.

证明　因为

$$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}, \tag{①}$$

所以

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax. \tag{②}$$

由①与②有

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(2-x^2)}{3x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

显然，$f(x)$是奇函数.

26. 设 $f(x)$满足关系式

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}\quad (a,b,c \text{ 为常数}),$$

且$|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

解　由

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}, \tag{①}$$

有

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx. \tag{②}$$

从①和②得

$$f(x)=\frac{c(a-bx^2)}{(a^2-b^2)x}.$$

27. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解　$f[f(x)]=f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x-1}{x}$,

$$f\{f[f(x)]\}=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x.$$

28. 设单值函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0 \quad (0<x<\mathrm{e}),$$

且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

解　由 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$,

有

$$f(\ln x)=x(1\pm\sqrt{1-\ln x})=\mathrm{e}^{\ln x}(1\pm\sqrt{1-\ln x}),$$

得

$$f(x)=\mathrm{e}^x(1\pm\sqrt{1-x}).$$

由 $f(0)=0$，知

$$f(x)=\mathrm{e}^x(1-\sqrt{1-x}).$$

29. 设 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 都是单调增函数，且 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$. 证明 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]$.

证明　由于 $\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x)$ 都是单调增函数，且有

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),$$

可得

$$f[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant f[\psi(x)],$$

而

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[\varphi(x)],\ f[\psi(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

从而有

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

30. 若 $f(x)=a+bx$，设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f}_{n次}(x)]\}$，证明

$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^nx.$$

证明　用数学归纳法.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com