现代数学基础丛书 90

稳定性和单纯性理论

史念东 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书从数理逻辑模型论的基本知识开始，循序渐进地给出近十几年来在稳定性和单纯性理论中涌现出来的新成果、新方法. 阅读本书可了解模型论研究的新动态，直接深入到这一领域的研究前沿. 书中有一些习题，可加深对本书内容的理解；每章的结尾都有历史附注，交代这一章的主要来源；书末有较完整的参考文献，便于读者做进一步的研究.

本书可作为数学系、计算机系或哲学系的研究生教材，也可供相关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

稳定性和单纯性理论／史念东著. —北京：科学出版社，2004
(现代数学基础丛书；90)
ISBN 7-03-012675-0

Ⅰ.稳… Ⅱ.史… Ⅲ.数学模型 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 000030 号

责任编辑：吕 虹／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年6月第一版 开本：B5(720×1000)
2004年6月第一次印刷 印张：8 1/4
印数：1—2 000 字数：152 000

定价：24.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

模型论是数理逻辑的一个重要分支，它与数学的许多其他分支，例如，代数学和泛代数、代数几何、数论、几何和拓扑学、图论以及计算机科学，都有很密切的联系．同时，模型论目前也是数理逻辑中的一个十分活跃的研究领域．特别是近年来，有关稳定性和单纯性理论的研究成果大量涌现，它们大多数都在数理逻辑的专业期刊或综合性的数学期刊上发表了，但有一些重要的研究成果只在数理逻辑学家中传阅，一直没有发表．另外，还有一些结果在发表以后，其证明方法又有了较大的改进．

20 世纪 80 年代，中国改革开放后，作者赴美留学，在芝加哥伊利诺大学师从 John T. Baldwin 教授．获得博士学位后，在美国宾夕法尼亚州的一所州立大学任教．教学之余，继续从事数理逻辑方面的研究工作．近年来，深感有责任将国外模型论研究的新结果、新方法介绍给国内的数理逻辑学家和研究生们．因此，在 1999~2002 年，利用暑假回国，在北京师范大学和南京大学讲学，并取得较好的效果．在此期间，沈复兴、丁德成教授等鼓励作者将讲稿整理成书，以便国内有更多的读者能够阅读本书，并尽快进入到数理逻辑模型论比较近代的研究领域，从事自己的研究工作．果能如此，将是作者的莫大欣慰，这也是作者不揣冒昧地将讲稿整理付梓的原意．

在回国访问讲学期间，得到了中国国家自然科学基金及教育部“春晖计划”的资助，特此表示感谢．

如读者有一定的数学基础(比如数学系高年级学生或研究生)，也有了最基本的数理逻辑基础和一些模型论的基本知识，读过沈复兴教授所著的《模型论导引》的前七章，或者 C.C. Chang 和 H.J. Keisler 合著的“Model Theory”的前三章，将对阅读本书有很大的帮助．如果还没有学过模型论而对本书有兴趣，由于作者尽量使本书内容完全自包含，所以也可以从本书开始学习模型论，以后再读一些其他的书或论文，特别是应该读一本好的模型论的研究生用教科书．应当指出的是，本书只包含了作者比较熟悉或从事研究的模型论的某些领域，并未包含近代模型论研究的所有方面．

本书每章的结尾都有一些历史附注，交代这一章的主要来源，也尽可能附有较完整的参考文献以便读者作进一步研究和参考之用．书中有少量习题，希望读者尽可能地做完．

在这里特别感谢沈复兴教授、丁德成教授对本书出版的支持, 感谢中国科学院科学出版基金对本书的出版提供资助. 也要感谢科学出版社数理编辑部吕虹等同志的大力支持. 他们为本书做了大量的编辑和修改工作. 沈复兴教授的研究生陈磊、吴兴玲、易良海、傅莺莺、吴茂念、徐士永、隋建宝、莫单玉、赵国兴、贾清建等在逻辑讨论班用此书作教材时, 对本书提出了宝贵的意见, 在此表示感谢. 我也感谢杨攸君女士的鼓励和理解, 她在工作之余打印了本书的全部手稿. 限于水平, 书中不妥及谬误之处在所难免, 欢迎专家和读者批评指正.

史 念 东

2003 年 12 月

于美国宾州东斯特拉斯堡(E. Stroudsburg)州立大学

目　　录

第一章　模型论基础知识

本章介绍有关模型论的基础知识，作为引导尚未有模型论基础的读者进入这一数理逻辑分支的准备．对于已有模型论基础的读者可以用本章作为复习材料，或者完全略去它而直接阅读以后各章．

§1.1　数学结构及其理论

用数理逻辑的语言来说，模型论就是研究形式语言和它的解释，即模型之间关系的一个数理逻辑的分支，当然也要研究这些模型的理论．这里所谓的模型就是数学中所讲的一个数学结构，比如，一个有限群，有理数域，或者一个无穷图等等．一般说来，一个模型就是一个非空集连同定义在这个集合上的函数和关系，有时还包括常数．而这些函数、关系和常数就是在某一形式语言 L 中的函数符、关系符、常数符的一个解释．这样，一个模型就可以表示成

$$\mathcal{M}=\langle M;R_1,R_2,\cdots,f_1,f_2,\cdots,c_1,c_2,\cdots\rangle,$$

这里 M 是一个非空集合，称为 $\mathcal{M}$ 的域， R_i 和 f_i 是分别定义在 M 上的关系和函数，而 c_i 是 $\mathcal{M}$ 中的常数项．有时我们也会将语言扩充，比如对应于集合 A 中的每一个元素增加一个常数符，这个扩充后的语言记做 $L(A)$.

有时在不会引起混淆的情况下，我们也简单地称 M 是一个模型．而模型 $\mathcal{M}$ 的理论，就是在 $\mathcal{M}$ 中成真的 L 中的语句集合．比如一个群就是一个数学结构，可以记做

$$\mathbb{G}=\langle G;\ \oplus,0\rangle,$$

这里 G 是这个群的域，$\oplus$ 是定义在 G 上的二元函数，而 0 是关于这个函数的恒等元．我们知道任何一个群都满足下面的所谓“**非逻辑公理**”(nonlogical axioms)：

G1.　$\forall x(x\oplus 0=0\oplus x=x)$,

G2.　$\forall x\exists y(x\oplus y=y\oplus x=0)$,

G3.　$\forall x\forall y\forall z(x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z)$.

这样，任何一个 L 中的公式 φ 在一个理论 T 中成立，当且仅当它是可以从这些公理推导出来的，或者说是这些公理的 **逻辑后承**(logical consequence)．比如：如果 φ 可以从 $G3$ 依逻辑规则推出， φ 就是 G3 的逻辑后承，记做 G3 $\vdash\varphi$．所有这些非逻辑公理以及它们的逻辑后承组成的集合就是群的理论．反过来说，如果我们先有一个理论，比如说“稠密无终点线性序的理论”： DLO, 即下面的公理以及它们的后承的集合：

DLO1.　$\forall x(x\not< x)$,

DLO2.　$\forall x\forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$,

DLO3.　$\forall x\forall y\forall z(x < y \wedge y < z \to x < z)$,

DLO4.　$\forall x\forall y(x < y \to \exists z(x < z < y))$,

DLO5.　$\forall x\exists y\exists z(y < x < z)$.

显然，有理数连同小于“ < ”组成的数学结构 $(\mathbb{Q},<)$ 就是 DLO 的一个可数模型，因为它满足所有这些公理，我们记做 $(\mathbb{Q},<) \models$ DLO. 同样地，$(\mathbb{R},<)$ 也是 DLO 的一个模型，即 $(\mathbb{R},<) \models$ DLO, 但它是一个不可数模型.

理论的模型可以不止一个. 那么就有了一个问题, 它们是不是同构的呢？我们先来看一下两个模型同构的定义. 假定 $\mathcal{M} = \langle M; R_1, R_2, \cdots, f_1, f_2, \cdots, c_1, c_2, \cdots\rangle$, $\mathcal{M}' = \langle M'; R_1', R_2', \cdots, f_1', f_2', \cdots, c_1', c_2', \cdots\rangle$ 是某个理论 T 的两个模型，并存在双射 $F: M \to M'$ 满足

(1) 假如 R_i 是 $\mathcal{M}$ 中的 n 元关系，R_i' 是 M' 中相应的 n 元关系，$a_1, \cdots, a_n \in M$, 则 $R_i(a_1, \cdots, a_n)$ 在 $\mathcal{M}$ 中成立当且仅当 $R_i'(F(a_1), \cdots, F(a_n))$ 在 $\mathcal{M}'$ 中成立.

(2) 假如 f_i 是 $\mathcal{M}$ 中的 n 元函数，f_i' 是 $\mathcal{M}'$ 中相应的 n 元函数，则

$$F(f_i(a_1, \cdots, a_n)) = f_i'(F(a_1), \cdots, F(a_n)),$$

(3) $F(c_k) = c_k'$.

那么我们称 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 是理论 T 的同构的两个模型，记做 $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$.

Cantor 证明了下面的著名定理.

Cantor 定理　如果集合 X 是一个无穷可数集，$\prec$ 是定义在 X 上的一个序关系，即 $\langle X, \prec\rangle \models$ DLO, 则 $\langle X, \prec\rangle \cong \langle \mathbb{Q}, <\rangle$

这样，根据上述 Cantor 定理，从同构意义上说，理论 DLO 只有一个可数模型. 像这样的理论，我们称之为 $\aleph_0$- 范畴的理论. 类似地，我们也可定义 $\aleph_1$- 范畴的理论，等等.

确定某一个理论有多少模型也是模型论的一个重要内容. 有关这方面的问题在以后的章节中还会介绍. 在这一节的最后，要介绍关于模型和理论的几个重要概念.

定义 1.1.1　称一个公式集 Γ 是 **和谐的**(consistent), 假如它有一个模型 M, 也就是说有这个模型 M 中的元素 $\bar{c}$ 使得这些语言成真, 记做 $M \models \Gamma$, 或者 $\bar{c} \models \Gamma$. 称模型 $\mathcal{M}$ 的理论 T 是 **完全的**(complete), 假如它包含了所有在 $\mathcal{M}$ 中成真的语句. 模型 $\mathcal{M}$ 的完全理论记做 $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$. 如果 T 是语言 L 中的一个理论，在 L 扩充至 $L(A)$ 后的理论记做 $T(A)$.

定义 1.1.2　称二个模型 M 和 N 是 **初等等价的**(elementary equivalent). 假定每一个在 M 中成真的语言在 N 中亦真，反之亦然，记做 $M \equiv N$.

显然，如果 $M \cong N$, 则 $M \equiv N$. 但其逆未必是对的. 不过，如果 M 和 N 都是有穷模型，则 $M \equiv N$ 蕴涵 $M \cong N$.

定义 1.1.3 称模型 N 是模型 M 的 **初等开拓**(elementary extension). 记做 $M \prec N$, 如果

1) $M \subseteq N$,

2) 对于语言 L 中的任意公式 $\varphi(\bar{x})$, 以及任意的 $\bar{a} \in M$, $M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a})$. 我们亦称 M 是 N 的 **初等子模型**(elementary submodel).

定义 1.1.4 映射 $f: M \to N$ 称为 M 到 N 内的 **初等映射** (elementary mapping) 或 **初等嵌入**(elementary embedding), 记做 $f: M \xrightarrow{\prec} N$, 假如对一切公式 $\varphi(\bar{x}) \in L$ 和 $\bar{a} \in M$, 有

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(f(\bar{a})).$$

定义 1.1.5 一个理论 T 称为 **模型完全的**(model complete), 如果对任意的 $M \models T$, $N \models T$, 假如 $M \subset N$, 则 $M \prec N$.

显然, 假如 T 是模型完全的理论, 而 $U \supset T$ 是和谐的, 则 U 也是一个模型完全的理论.

§1.2 型

型 (type) 在模型论的研究中起着重要的作用. 首先我们来看一下有关型的定义和记号.

定义 1.2.1 假如 T 是一个语言 L 中的理论, 一个 **n- 型** $p(\bar{x})$ 就是一个与 T 和谐的 (consistent) n 个变元 $\bar{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的公式集. 假如 $\mathcal{M}$ 是 T 的一个模型, $\bar{a} \in M^n$, $p(\bar{x})$ 是理论 T 中的 n- 型, 则称 $\bar{a}$ 在 $\mathcal{M}$ 中 **认知**(realizes) 型 $p(\bar{x})$, 如果对于每一个公式 $\varphi \in p$, $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$. 如果型 $p(\bar{x})$ 是一个极大的和谐 n 元公式集, 则称 $p(\bar{x})$ 是一个 **完全的 n-型**; 否则称 $p(\bar{x})$ 为 **部分 n-型**(partial n-type). 如果 n-型 p 中的公式含有参数, 那么这个参数集 $A \subseteq M$ 称做 p 的 **定义域**(domain), 而称 p 是在 A 上的 n-型. 所有在 A 上的完全的 n-型的集合记做 $S_n(A)$. 定义 $S(A) = \bigcup_{n\in\omega} S_n(A)$. $S(A)$ 构成一个拓扑学意义上的 Stone 空间. 它的成员通称为型. 如果 $A = \varnothing$, 即不含参数的公式所构成的型, 记做 $S(\varnothing)$ 或 $S(T)$. 定义 $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$ 为那个惟一的被 M 中 n 元组 $\bar{a}$ 认知的 n- 型 $p(\bar{x}) \in S(A)$, 即

$$\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \{\phi(\bar{x}, \bar{b}) : \bar{b} \in A, \quad \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}.$$

如果不会引起混淆的话我们常略去上面式子中的脚标 $\mathcal{M}$. 如果 A 中的任何 n 元组都不能认知型 p, 则称 A **排斥**(omit) 型 p. 对于不含参数的公式集, 我们可以用 $\mathrm{tp}(\bar{a}/\varnothing)$ 来表示, 或者干脆写成 $\mathrm{tp}(\bar{a})$.

如果 $A \subseteq B \subseteq M, p \in S(A)$, $q \in S(B)$, $p \subseteq q$, 则称 q 是 p 的一个 **开拓**(extension). 例如, q 是 $q \restriction A$ 的一个开拓.

下面我们要讨论几个特殊的型.

定义 1.2.2　设 $p \in S_n(A)$. 称 n- 型 p 是**孤立的**(isolated) 或**主的**(principal), 假如存在公式 $\varphi(\bar{x},\bar{a}) \in p$ 满足对一切 $\psi \in p, \models \forall x(\varphi(\bar{x},\bar{a}) \to \psi(\bar{x},\bar{a}))$. 这样, 就可以写成 $\models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x},\bar{a}) \to p(\bar{x}))$. 我们也称上述 φ 将 p 孤立.

称型 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 是 **半孤立的**(semi-isolated). 假如存在公式 $\phi(\bar{x},\bar{a}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 满足 $\models \phi(\bar{x},\bar{a}) \to \mathrm{tp}(\bar{b})$. 类似地我们也称上述 ϕ 将 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 半孤立.

例子 1.2.3　1) 考察理论 Th $(\mathbb{Z}, \mathrm{S})$. 这里 $\mathbb{Z}$ 是整数集, S 是后继函数. 显然, 它有无穷多个可数模型, 它的每一个模型都是一条, 多条或无穷条整数链构成的. 假定 a, b 是在不同的整数链上的元素, 则容易看出 $\mathrm{tp}(b/a)$ 是半孤立的. 比如, $S(a) \neq x \to \mathrm{tp}(b)$. 但 $\mathrm{tp}(b/a)$ 不是孤立的, 因为 $\mathrm{tp}(b/a) = \{S^n(a) \neq x | n \in \omega\} \cup \{S^m(x) \neq a | m \in \omega\}$, 而此集合中的任一公式不能推出它的全部. 从这个例子可以看出孤立的和半孤立的是两个不同的概念.

2) 假定 $L = \{E_i : i \in \omega\}$. 理论 T 是说 E_0 是一个有两个无穷等价类的等价关系, 而对于一切 $i \in \omega, E_{i+1}$ 都是将每一个 E_i- 等价类细分成两个无穷 E_{i+1}- 等价类的等价关系. 假如 a 和 c 对一切 $i \in \omega$, 都是在同一个 E_i- 类, 但 a 和 b 不在同一个 E_0- 等价类内, 则 $\mathrm{tp}(c/b)$ 、 $\mathrm{tp}(b/a)$ 是孤立的, 而 $\mathrm{tp}(c/a)$ 不是孤立的, 但是半孤立的.

上述第二个例子验证了在下面第二个命题中, 若将半孤立改为孤立则不成立.

命题 1.2.4　1) 假如 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 是孤立的, 则 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 是半孤立的.

2) 假如 $\mathrm{tp}(\bar{c}/\bar{b})$ 和 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 是半孤立的, 则 $\mathrm{tp}(\bar{c}/\bar{a})$ 是半孤立的.

证明　1) 显然.

2) 假如 $\mathrm{tp}(\bar{c}/\bar{b})$ 是半孤立的, 则存在 $\varphi(\bar{x},\bar{b}) \in \mathrm{tp}(\bar{c}/\bar{b})$ 满足 $\models \varphi(\bar{x},\bar{b}) \to \mathrm{tp}(\bar{c})$. 而 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 也是半孤立的, 所以存在 $\psi(\bar{y},\bar{a}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 满足 $\models \psi(\bar{y},\bar{a}) \to tp(\bar{b})$. 这样, $\exists y[\varphi(\bar{x},\bar{y}) \wedge \psi(\bar{y},\bar{a})] \in \mathrm{tp}(\bar{c}/\bar{a})$, 而且 $\models \exists y[\varphi(\bar{x},\bar{y}) \wedge \psi(\bar{y},\bar{a})] \to \mathrm{tp}(\bar{c})$.

命题 1.2.5　假如 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 是孤立型, 而 $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ 非孤立, 则 $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ 非半孤立.

证明　假如公式 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 孤立 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$. 为获得矛盾反设 $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ 被公式 $\psi(\bar{b},\bar{y})$ 半孤立. 由于 $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ 非孤立, 存在公式 $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in L$ 使得 $\varphi(\bar{b},\bar{y}) \wedge \psi(\bar{b},\bar{y}) \wedge \theta(\bar{b},\bar{y})$ 和 $\varphi(\bar{b},\bar{y}) \wedge \psi(\bar{b},\bar{y}) \wedge \neg\theta(\bar{b},\bar{y})$ 都是和谐的. 但它们都蕴含 $\mathrm{tp}(\bar{a})$, 所以 $\varphi(\bar{x},\bar{a}) \wedge \theta(\bar{x},\bar{a})$ 和 $\varphi(\bar{x},\bar{a}) \wedge \neg\theta(\bar{x},\bar{a})$ 都是和谐的. 这就矛盾于 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 孤立 $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ 这个事实.

下面引出共轭的概念.

定义 1.2.6　假定 M 是一个模型, $A \subseteq M$.

1) 设 $p \in S(A)$, f 是一个初等映射, 其定义域 $\mathrm{dom}(f) \supseteq A$. 则

$$f(p) = \{\varphi(\bar{v}, f(a)) | \varphi(\bar{v}, a) \in p\}$$

是在 $f(A)$ 上的公式集.

2) 假如 f 是一个初等映射, 在 A 上为恒等映射, $A \subseteq B, A \subseteq C, f(B) = C$ 则称集合 B 和 C 在 A 上 **共轭**(conjugate).

3) 假如 p 和 q 是模型 M 上的型, 并且有定义域包含 A 的初等映射 f 满足 $f(p) = q$, 则称两个型 p 和 q 在 A 上共轭.

定义 1.2.7 1) 设 M 是一模型. 称 $a \in M$ 是在集合 B 上 **代数的**, 假如存在一个公式 $\varphi(x, \bar{b})$, $\bar{b} \in B$, 使得 $\models \varphi(a, \bar{b})$ 且集合 $\{a' \in M | \models \varphi(a', \bar{b})\}$ 是有穷的且包含 a.

2) 称 C 为集合 B 的 **代数闭包**(algebraic closure), 记做 $C = \mathrm{acl}(B)$, 如果 $C = \{a \in M | a$ 是在集合 B 上代数的 $\}$.

3) 型 p 称为在集合 A 上的 **强型** (strong type), 假如 $p \in S(\mathrm{acl}(A))$. 对于任何 a, $\mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}(A))$ 称做在 A 上的强型并记做 $\mathrm{stp}(a/A)$. 如果 $A = \varnothing$, 则记为 $\mathrm{stp}(a)$. 如果 $\mathrm{stp}(a) = \mathrm{stp}(b)$, 则记做 $a \equiv_s b$.

§1.3 型的分离和分叉

型是模型论近年来研究的基础, 在前一节已经给出它的定义及一些特殊的型. 本节要进一步讨论型的一些性质, 特别是所谓型的 **分离**(dividing) 和 **分叉**(forking). 读者在以后的章节中可以看到, 这与理论的稳定性及单纯性研究有着非常密切的关系.

现在我们先引出它们的定义.

定义 1.3.1 称一个公式 $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ 在一个集合 A 上分离, 假如有一个 n 元组的序列 $\langle \bar{a}_i : i \in \omega \rangle$ 满足以下两条件:

1) 对每一个 i, $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{a}_i/A)$,

2) 公式集 $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i) : i \in \omega\}$ 是 k- 不和谐的, 也就是说对某个自然数 k 这个公式集中的任何 k 个元素组成的子公式集都是不和谐的. 我们有时候也称这个公式 $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ 关于自然数 k 分离, 或者 k- 分离.

称一个型 p 在 A 上分离, 如果存在某个公式 φ, $p \vdash \varphi$, 且 φ 在 A 上分离. 特别地, 如果一个型 p 包含一个在 A 上分离的公式, 则 p 在 A 上分离.

例子 1.3.2 考察含有无数多个等价类的等价关系 E. 我们断言公式 xEa 在空集 $\varnothing$ 上关于 $k = 2$ 分离 (或称 2- 分离). 事实上, 选择每个等价类中的一个元素组成序列 $\langle b_i : i \in \omega \rangle$, 就有 $\mathrm{tp}(a/\varnothing) = \mathrm{tp}(b_i/\varnothing) = \{xEx\}$, 并且 $\{xEb_i : i \in \omega\}$ 是 2- 不和谐的.

定义 1.3.3 称一个型 p 在 A 上分叉, 假如存在公式 $\varphi_0(\bar{x}, \bar{a}_0), \cdots, \varphi_n(\bar{x}, \bar{a}_n)$ 满足以下两条:

1) $p \vdash \bigvee\limits_{0 \le i \le n} \varphi_i(\bar{x}, \bar{a}_i)$,

2) 对每一个 i, $\varphi_i(\bar{x},\bar{a}_i)$ 在 A 上分离.

我们常常遇到 $i=1$ 的情形：有一个公式 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 满足 $p\vdash\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 而且 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 在 A 上分离，这样 p 就在 A 上分叉. 例如，假设 $p\vdash\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 并有序列 $\langle\bar{a}_i:i\in\omega\rangle$ 满足对每一个 i, $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)=\mathrm{tp}(\bar{a}_i/A)$, 而且 $\{\varphi(\bar{x},\bar{a}_i),\varphi(\bar{x},\bar{a}_j)\}$ $(i\neq j)$ 是不和谐的，则 p 在 A 上分叉.

如果 $A\subseteq B,p\in S(B)$, 而且 p 在 A 上不分叉，则称 p 是 $p\restriction A$ 的一个**不分叉开拓** (nonforking extension).

下面我们来看分离和分叉的一些简单性质和它们之间的一些关系. 证明都很容易，有些仅给出了提示，读者可练习给出详细的证明.

命题 1.3.4　1) 如果一个型 p 在 A 上分离，则它在 A 上分叉.

2) 假如 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 和 $\psi(\bar{x},\bar{b})$ 在 A 上分叉，则 $\varphi(\bar{x},\bar{a})\vee\psi(\bar{x},\bar{b})$ 在 A 上分叉.

3) $\varphi(\bar{x},\bar{c})$ 在 A 上关于自然数 k 分离，当且仅当对所有有穷的 $\bar{a}\in A$, $\varphi(\bar{x},\bar{c})$ 在 $\bar{a}$ 上关于 k 分离.

4) (存在性) 如果型 p 在集合 A 上分离，则存在公式 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$, 它是 p 中公式的合取，并在 A 上分离. 因此如果 $p\in S(A)$, 则 p 不在 A 上分离.

5) (有穷特征性) 型 $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ 在 A 上不分离当且仅当对于一切子集 $\bar{b}\subseteq B$, 型 $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ 在 A 上不分离.

6) (单调性) 假定 p,q 是两个型，而且 $p\vdash q$, 即 q 中公式均可由 p 中的公式 (集) 来证明. 那么，如果 q 在集合 A 上分离，则 p 在 A 的任何子集上分离.

7) (部分传递性) 假设 $A\subseteq B\subseteq C$. 如果型 $\mathrm{tp}(\bar{a}/C)$ 在 A 上不分离，则 $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ 在 A 上不分离. 而且 $\mathrm{tp}(\bar{a}/C)$ 在 B 上不分离.

在以上 4)~7) 中，如将分离改为分叉也是对的.

证明　1) 由于 p 在 A 上分离，存在公式 $\varphi(\bar{x},\bar{c})$ 使得 $p\vdash\varphi$ 而且 φ 在 A 上分离. 这正是分叉的定义中 $i=1$ 的情形.

2) 假如 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 在 A 上分叉，则有公式 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 满足 $\varphi\vdash\bigvee_{1\leq i\leq m}\varphi_i$, 而且每个 φ_i 在 A 上分离. 同样地，ψ 在 A 上分叉，则有公式 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 满足 $\psi\vdash\bigvee_{1\leq i\leq n}\psi_i$, 而且每个 ψ_i 在 A 上分离. 这样，我们有 $\varphi\vee\psi\vdash\bigvee_{1\leq i\leq m+n}\varphi_i$, 这里 $\varphi_{m+i}=\psi_i$ $(1\leq i\leq n)$.

3) 根据紧致性定理，$\mathrm{tp}(\bar{c}/A)=\mathrm{tp}(\bar{c}_i/A)$ 当且仅当对所有有穷的 $\bar{a}\subseteq A,\mathrm{tp}(\bar{c}/\bar{a})=\mathrm{tp}(\bar{c}_i/\bar{a})$.

4) 假如 p 在 A 上分离，则有公式 ψ 满足 $p\vdash\psi$, 且 ψ 在 A 上分离. 注意到 $p\vdash\psi$ 意味着存在有穷多个公式 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in p$ 满足 $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n\vdash\psi$. 因此假如 p 在 A 上分离，则 $\varphi=\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ 在 A 上分离. 现在证明如果 $p\in S(A)$, 则 p 不在 A 上分离. 假如不然，则有 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in p$ 满足 $\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_n$ 在 A 上分离. 故有序列 $\langle\bar{a}_i:i\in\omega\rangle$ 满足 $\{\varphi_1(\bar{x},\bar{a}_i)\wedge\cdots\wedge\varphi_n(\bar{x},\bar{a}):i\in\omega\}$ 是关于某个自然数 k 不和谐的，但这矛盾于 $\varphi_i\in p$.

5) 类似于 3).

6) 假如 q 在 A 上分离，则有公式 $\varphi(\bar{x},\bar{c})$ 满足 $q\vdash\varphi$ 而且 φ 在 A 上分离. 但 $p\vdash q$, 所以 $p\vdash\varphi$, p 在 A 上分离. 根据分离的定义， p 在 A 的任何子集上分离.

7) 首先反证第一个结论. 假定 $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ 在 A 上分离，根据本命题的 4), 有 $\bar{b}\subseteq B$ 及公式 $\varphi(\bar{x},\bar{b})$, 它是型 $\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ 中公式的合取且在 A 上分离. 但 $B\subseteq C$, 所以 $\varphi(\bar{x},\bar{b})\in\mathrm{tp}(\bar{a}/C)$. 这样 $\mathrm{tp}(\bar{a}/C)$ 在 A 上分离，矛盾. 现在反证第二个结论. 假如 $\mathrm{tp}(\bar{a}/C)$ 在 B 上分离，则有 $\bar{c}\subseteq C$ 及公式 $\varphi(\bar{x},\bar{c})$, 它是 $\mathrm{tp}(\bar{a}/C)$ 中公式的合取且在 B 上分离. 这样 $\varphi(\bar{x},\bar{c})$ 在所有有穷的 $\bar{b}\subseteq B$ 上分离. 因此 $\varphi(\bar{x},\bar{c})$ 在所有有穷的 $\bar{b}\subseteq A$ 上分离，矛盾.

上述命题中的第一条的逆命题，对一般理论而言并不成立，但是对于稳定性理论和单纯性理论，却是成立的，我们以后要证明这一点.

习题 如果 $\varphi(\bar{x},\bar{a})\wedge\psi(\bar{x},\bar{a})$ 不在 A 上分叉，则 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 和 $\psi(\bar{x},\bar{a})$ 都不在 A 上分叉.

下面我们要引出一个非常重要的序列，并且讨论它和型的分叉之间的关系.

定义 1.3.5 一个序列 $I=\langle\bar{c}_i : i\in\omega\rangle$ 称做在一个集合 B 上是**不可辨的**(indiscernible), 或者说 I 是 B- 不可辨的, 如果对一切自然数 n 和 $i_1<\cdots<i_n$, $\mathrm{tp}(c_1,\cdots,c_n/B)=\mathrm{tp}(c_{i_1},\cdots,c_{i_n}/B)$.

例如有理数和定义其上的序关系构成一个模型 $\langle\mathbb{Q}, <\rangle$, 其中 $\mathbb{Q}$ 就是一个空集上的不可辨序列.

注意到在上述定义中，假如 $n=1$, 则对于一切 $a,b\in I$, $\mathrm{tp}(a/B)=\mathrm{tp}(b/B)$, 也就是在所有 I 中的元素都认知同样的型. 这也许是用不可辨来称呼这种序列的原因吧.

不可辨序列常常可以由 Ramsey 定理适当地产生. 我们先介绍一下 Ramsey 定理所要用到的符号. 假定 μ,λ,κ 都是基数， n 是自然数，则 $[\lambda]^n=\{F\subseteq\lambda^n : |F|=n\}$. 对于 $\mu\leq\lambda$, $\lambda\to(\mu)^n_\kappa$ 表示每一个 n 元函数 $f:[\lambda]^n\to\kappa$, 对于一个基数为 μ 的 λ 的子集 H, 在 $[H]^n$ 上为常数. 我们这里要用到的是一个 Ramsey 定理的特殊情形，即

Ramsey 定理 假定 m,n 是自然数， ω 是自然数集，则 $\omega\to(\omega)^n_m$. 这就是说每一个 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n):[\omega]^n\to m$, 对于自然数集 ω 的一个无穷子集 H, 它在 $[H]^n$ 上为常数. 我们不打算在这里严格证明这个定理，不过直观地想一下，这应该是对的.

命题 1.3.6 型 p 在一个集合 A 上 k- 分离，当且仅当存在公式 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$, 它是 p 中有穷多个公式的合取，以及一个在 A 上的包含 $\bar{a}$ 的无穷不可辨序列 I, 满足 $\{\varphi(\bar{x},\bar{a}_i):\bar{a}_i\in I\}$ 是 k- 不和谐的.

证明 必要性容易证明，因为 I 包含 $\bar{a}$, 且切对一切 i, $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)=\mathrm{tp}(\bar{a}_i/A)$.

现在假定 p 在 A 上 k- 分离. 这样, 存在一个 p 中公式的合取 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$, 它在 A 上 k- 分离. 即是说, 有序列 $\langle \bar{c}_i : i \in \omega\rangle$ 满足对一切 i, $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}(\bar{c}_i/A)$ 且 $\{\varphi(\bar{x},\bar{c}_i) : i \in \omega\}$ 是 k- 不和谐的. 设 $\Gamma(\bar{x}_0,\bar{x}_1,\cdots)$ 是描述 " $\langle \bar{x}_i : i \in \omega\rangle$ 是一个 A- 不可辨序列的公式集". 设 $q = \cup_{i\in\omega}\mathrm{tp}(\bar{c}_i/A)$. 我们断言 $\Gamma \cup q$ 是和谐的, 那么, 认知 $q \cup \Gamma$ 的一个序列 $\langle \bar{a}_i : i \in \omega\rangle$ 就是所要求的 A- 不可辨序列. 现在来证明我们的断言. 考察 Γ 的子集

$$\Gamma^* = \{\varphi_k(\bar{x}_0,\cdots,\bar{x}_r,\bar{a}) \leftrightarrow \varphi_k(\bar{x}_{i_0},\cdots,\bar{x}_{i_r},\bar{a}) : i_0 < i_1 \cdots < i_r, k \in \omega\}.$$

根据 Ramsey 定理, 存在 ω 的一个无穷子集 η 满足

$$\varphi_k(\bar{c}_0,\cdots,\bar{c}_r,\bar{a}) \leftrightarrow \varphi_k(\bar{c}_{i_0},\cdots,\bar{c}_{i_r},\bar{a}),$$

这里 $k \in \omega$, $i_0 < i_1 < \cdots < i_r$, 而且 $i_l \in \eta$ $(l = 0,1,2,\cdots,r)$.

假设 f 是一个 A 上的自同构: $\langle \bar{c}_{i_0},\bar{c}_{i_1},\cdots\rangle \mapsto \langle \bar{a}_i : i \in \omega\rangle$, 则 $f(\langle \bar{c}_{i_s} : i_s \in I\rangle) \models q \cup \Gamma^*$. 因此由紧致性定理, 断言得证.

现在我们给出一个关于分离和不可辨序列之间的关系.

命题 1.3.7　下面两命题等价.

1) 型 $\mathrm{tp}(\bar{c}/A\bar{b})$ 不在集合 A 上分离,

2) 对任何一个 A- 不可辨序列 I, 存在数组 $\bar{c}'$ 认知型 $\mathrm{tp}(\bar{c}/A\bar{b})$ 而且使得 I 是 $A\bar{c}'$- 不可辨序列.

证明　1) $\Rightarrow$ 2) 假定 $p(\bar{x},\bar{b}) = \mathrm{tp}(\bar{c}/A\bar{b})$ 不在 A 上分离. 设 $I = \langle \bar{b}_i : i \in \omega\rangle$ 是一个包含 $\bar{b} = \bar{b}_0$ 的 A- 不可辨序列. 我们首先断言 $q = \cup\{p(\bar{x},\bar{b}') : \bar{b}' \in I\}$ 是和谐的. 事实上, 假如不然, 那么根据紧致性, 对某个在 $p(\bar{x},\bar{b})$ 中的公式 $\varphi(\bar{x},\bar{a},\bar{b})$, $(\bar{a} \in A)$, 合取式 $\varphi(\bar{x},\bar{a},\bar{b}_0) \wedge \cdots \wedge \varphi(\bar{x},\bar{a},\bar{b}_n)$ 是不和谐的. 这样, $p(\bar{x},\bar{b})$ 在 A 上分离, 矛盾, 因此断言成立. 现在设 $\Gamma(\bar{x})$ 是描述 " I 是 $A\bar{x}$- 不可辨序列" 的公式集, 则应用 Ramsey 定理, 可知 $q \cup \Gamma$ 是和谐的. 选取认知 $\mathrm{tp}(\bar{c}/A\bar{b})$ 的 n 元组 $\bar{c}'$ 使得 I 是 $A\bar{c}'$- 不可辨的.

2) $\Rightarrow$ 1) 假设 2) 成立. 设 $p(\bar{x},\bar{b}) = \mathrm{tp}(\bar{c}/A\bar{b})$, 且 $q = \cup\{p(\bar{x},\bar{b}') : \bar{b}' \in I\}$. 对于任意 A- 不可辨序列 I, $\bar{b}' \in I$, 存在数组 $\bar{c}'$ 认知 $\mathrm{tp}(\bar{c}/A\bar{b}')$. 因此 q 是和谐的. 这样对任意的 $\varphi(\bar{x},\bar{a},\bar{b}) \in \mathrm{tp}(\bar{c}/A\bar{b})$, $\bar{a} \in A$. $\{\varphi(\bar{x},\bar{a},\bar{b}) : \bar{b} \in I\}$ 是和谐的. 因此 $\mathrm{tp}(\bar{c}/A\bar{b})$ 不在 A 上分离.

命题 1.3.8　不分叉满足开拓性. 即: 如果在集合 B 上的型 p 不在 A 上分叉, $A \subseteq B \subseteq C$, 则有包含 p 的在 C 上的完全型 q 在 A 上不分叉.

证明　设 $\Gamma = \{\psi(\bar{x},\bar{a}) : \psi(\bar{x},\bar{y}) \in L, \bar{a} \in C, \psi(\bar{x},\bar{a})$ 在 A 上分叉 $\}$, 且 $q' = p \cup \{\neg\psi(\bar{x},\bar{a}) : \psi(\bar{x},\bar{a}) \in \Gamma\}$.

首先我们用反证法证明 q' 是和谐的. 假如对于某个自然数 n, 公式 $\psi_i \in \Gamma$ 使得

$$p \cup \{\neg\psi_0(\bar{x},\bar{a}_0),\cdots,\neg\psi_n(\bar{x},\bar{a}_n)\}$$

不和谐. 这样 $p \vdash \bigvee_{0\le i\le n}\psi(\bar{x},\bar{a}_i)$. 因为每一个 ψ_i 都在 A 上分叉, p 在 A 上分叉. 这矛盾于命题的假设, 因此 q' 是和谐的. 现在假定 q 是 q' 在 C 上的完全型. 我们证明 q 不在 A 上分叉. 事实上假如不然, 则有公式 $\varphi(\bar{x},\bar{a})\in q$ 在 A 上分叉. 所以 $\varphi(\bar{x},\bar{a})\in\Gamma$. 这样, $\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})\in q'$. 所以 $\neg\varphi(\bar{x},\bar{a})\in q$. 我们得到了一个矛盾.

下面要引出一个非常重要的序列. 并且讨论它的存在性.

定义 1.3.9 假设序列 $I=\langle\bar{a}_i : i\in\omega\rangle$ 认知一个型 $p\in S(B)$, $A\subseteq B$. 那么, 如果下面两条件满足, 则称 I 是型 p 在 A 上的 Morley 序列.

1) I 是 B 上的不可辨序列,

2) 对于任意的 $i\in\omega$, $\mathrm{tp}(\bar{a}_i/B\cup\{\bar{a}_j : j<i\})$ 不在 A 上分叉.

如果我们说型 $p\in S(B)$ 的 Morley 序列, 即是指型 p 在 B 上的 Morley 序列 (即上述定义中 $A=B$ 的情形).

命题 1.3.10 假如 $p\in S(B)$ 不在 $A\subseteq B$ 上分叉, 则存在 p 在 A 上的 Morley 序列.

证明 根据命题 1.3.8, 对于任何基数 λ, 存在序列 $\langle\bar{a}_\alpha:\alpha<\lambda\rangle$ 满足对任何 $\alpha<\lambda$, $\mathrm{tp}(\bar{a}_\alpha/B\cup\{\bar{a}_\beta|\beta<\alpha\})$ 开拓 p 而在 A 上不分叉. 我们可以使这个序列任意长, 但在 B 上型的个数是有界的. 因此可以借助于反复应用 Erdös-Rado 定理 (参见 [CK] 定理 7.2.1 和 7.2.2), 从一个长度 λ 很大的序列中获得一个所要的不可辨序列.

命题 1.3.11 假设 $I=\langle\bar{c}_i : i\in\omega\rangle$ 是型 $\mathrm{tp}(\bar{c}_0/A)$ 的 Morley 序列, 而 $J=\langle\bar{d}_j : j\in\omega\rangle$ 是型 $\mathrm{tp}(\bar{c}_0/A)$ 的 A- 不可辨序列. 则存在序列 I', 它是 I 的一个 A- 自同构的象. 而且, 对于每一 $j\in\omega$, $(\bar{d}_j)I'$ 是一个 A- 不可辨序列.

证明 我们将归纳地选取这个序列 $I'=\langle\bar{b}_i : i\in\omega\rangle$. 假定 $\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_n$ 已经选出, 它满足:

1) 对于每一个 $j\in\omega$, $\mathrm{tp}(\bar{d}_j\bar{b}_1\cdots\bar{b}_n/A)=\mathrm{tp}(\bar{c}_0\bar{c}_1\cdots\bar{c}_n/A)$,

2) J 是 $A\bar{b}_1\cdots\bar{b}_n$- 不可辨的.

我们需要选取 $\bar{b}_{n+1}$ 使得 1) 和 2) 对于 $n+1$ 亦成立. 设 $p(\bar{x}_0,\cdots,\bar{x}_{n+1})=\mathrm{tp}(\bar{c}_0,\cdots,\bar{c}_{n+1}/A)$ 且 $q=\cup\{p(\bar{d}_j,\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_n,\bar{x}_{n+1}) : j\in\omega\}$.

我们要证明 q 是和谐的. 设

$$\Gamma=\{\varphi(\bar{d}_j,\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_n,\bar{x}_{n+1},\bar{a}) : j\in\omega\},$$

这里 $\varphi(\bar{x}_0,\cdots,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1},\bar{a})\in p(\bar{x}_0,\cdots,\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1})$, $\bar{a}\in A$. 注意到 $I=\langle\bar{c}_i : i\in\omega\rangle$ 是 Morley 序列, 所以 $\varphi(\bar{c}_{n+1}/A\bar{c}_0\cdots\bar{c}_n)$ 不在 A 上分叉, 而且根据归纳假设, $\langle\bar{d}_j\bar{b}_1\cdots\bar{b}_n : j\in\omega\rangle$ 是 A- 不可分辨的. 这样 Γ 是和谐的, 因此 q 是和谐的. 应用 Ramsey 定理选取 n 元组 $\bar{b}_{n+1}$ 认知 q 并使得 J 是 $A\bar{b}_1\cdots\bar{b}_{n+1}$- 不可分辨的. 这样 1) 和 2) 对于 $n+1$ 的情形 $\bar{b}_1,\cdots,\bar{b}_{n+1}$ 成立. 最后, $\langle\bar{b}_n : 1\le n\in\omega\rangle$