走向IMO

数学奥林匹克试题集锦

(2004)

顾问　裘宗沪

2004年IMO中国国家集训队教练组
选拔考试命题组　编

全国高中联赛
CMO(冬令营)
女子奥林匹克
西部奥林匹克
国家队集训
国家队选拔考
IMO
……

华东师范大学出版社

走向IMO

(2004)

数学奥林匹克试题集锦

2004年IMO中国国家集训队教练组
选拔考试命题组 编

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO:数学奥林匹克试题集锦:2004/2004年IMO中国国家集训队教练组,选拔考试命题组编. —上海:华东师范大学出版社,2004.8

ISBN 7-5617-3985-0

Ⅰ.走… Ⅱ.①2…②选… Ⅲ.数学课-中学-试题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第088251号

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦(2004)

编　　者　2004年IMO中国国家集训队教练组、选拔考试命题组
策划组稿　倪　明
责任编辑　徐惟简　陈信漪
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购)电话 021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东　中南地区 021-62458734
　　　　　华北　东北地区 021-62571961
　　　　　西南　西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　890×1240　32开
插　　页　4
印　　张　7.25
字　　数　158千字
版　　次　2004年9月第一版
印　　次　2004年9月第一次
书　　号　ISBN 7-5617-3985-0/G·2247
定　　价　15.00元

出 版 人　朱杰人

前　言

本书以2004年国家集训队的测试题和国家队的培训题为主体，收集了2003年8月至2004年7月间国内主要的数学竞赛及2004年国际数学奥林匹克(IMO)试题和解答，并且附上了2004年俄罗斯和美国数学奥林匹克的试题与解答. 这些试题大多是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员. 他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

2004年国家集训队教练组由南京师大陈永高、华东师大熊斌、清华附中徐文兵组成，国家队选拔考试命题组的成员为：陈永高、熊斌、李胜宏、冷岗松、余红兵、李伟固、王建伟. 应华东师大出版社倪明先生的提议，继续将2003～2004年度的中国数学奥林匹克的一些主要活动的情况以及试题和解答汇编成册(华东师大出版社已经出版了《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦(2003)》)，介绍给广大数学爱好者和数学奥林匹克教练员，为他们提供一份参考资料.

在过去的一年中，教练组得到了裘宗沪、王杰、潘承彪等专家们的鼓励、支持和指导，得到了吴建平先生的各方面的帮助，在此，对他们表示衷心的感谢. 同时也非常感谢中国科技大学苏淳先生为我们提供了2004年俄罗斯数学奥林匹克的试题及解答，感谢美

国队领队冯祖鸣先生为我们提供了2004年美国数学奥林匹克的试题.

本书倾注了许多专家和学者的心血,书中有许多他们的创造性的工作.本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2003年全国高中数学联赛及加试由冯志刚整理,2004年中国数学奥林匹克由冷岗松整理,2003年第2届女子数学奥林匹克由熊斌整理,2003年第3届中国西部数学奥林匹克由李胜宏整理,2004年首届中国东南地区数学奥林匹克由冷岗松整理,2004年国家集训队测试题由徐文兵整理,2004年中国国家队选拔考试题由余红兵整理,2004年中国国家队培训题由熊斌整理,2004年国际数学奥林匹克(第45届IMO)由陈永高整理.另外,唐立华、韦吉珠、孙雯也提供了许多帮助.

囿于作者的水平,加上编写时间仓促,不足和错误在所难免,请广大读者朋友批评指正,不吝指教.

2004年IMO中国国家集训队教练组

选拔考试命题组

2004年7月

目　录

2003 年全国高中数学联赛

2003 年全国高中数学联赛于 2003 年 10 月 18 日举行. 本次联赛及加试由中国数学会普及工作委员会与陕西省数学会负责命题.

联赛试题由 6 个选择题、6 个填空题和 3 个解答题组成,合计 150 分. 加试共 3 个题,每题 50 分. 各省市联赛与加试总分成绩居前的同学获得一等奖(全国共 1 000 名),他们取得了直升大学的资格.

各省市成绩非常优异的同学才能获得参加次年中国数学奥林匹克的资格. 因此,它是我国中学生走向 IMO 的第一步.

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1 删去正整数数列 1,2,3,…中的所有完全平方数,得到一个新数列. 这个新数列的第 2 003 项是(　　).

(A) 2 046　　(B) 2 047

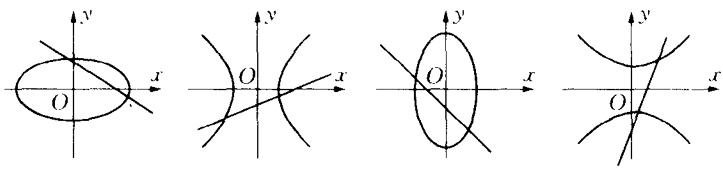
(C) 2 048　　(D) 2 049

解 设新数列为$\{a_n\}$,由于 $45^2=2\,025$, $46^2=2\,116$,所以,$2\,026=a_{2\,026-45}=a_{1\,981}$,而 $2\,115=a_{2\,115-45}=a_{2\,070}$,且数列的第 1 981 项至第 2 070 项之间为连续的正整数. 于是,$a_{2\,003}=a_{1\,981}+$

$(2\,003-1\,981)=2\,026+22=2\,048$. 答案为(C).

评注 对任意正整数 n,若 $m^2<n<(m+1)^2$,则 $n=a_{n-m}$,这里 m 为正整数. 依此可求得数列的通项为 $a_l=l+m$,这里 m 是满足 $m^2-m+1\leqslant l\leqslant m^2+m$ 的那个正整数.

2 设 $a,b\in\mathbf{R}$,$ab\neq 0$. 那么,直线 $ax-y+b=0$ 和曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 的图象是(　　).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

解 利用直线 $ax-y+b=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距来讨论. 在(A)中有 $b>0$,$a<0$,此时曲线 $bx^2+ay^2=ab$ 为双曲线,不可能成立. 同样可知(C)也不对. 对(B)、(D)都有 $a>0$,$b<0$,此时曲线 $bx^2+ay^2=ab$,即 $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{-b}=1$,焦点在 x 轴上. 故答案为(B).

3 过抛物线 $y^2=8(x+2)$ 的焦点 F 作倾斜角为 60° 的直线. 若此直线与抛物线交于 A、B 两点,弦 AB 的中垂线与 x 轴交于点 P,则线段 PF 的长等于(　　).

(A) $\frac{16}{3}$　　(B) $\frac{8}{3}$　　(C) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$　　(D) $8\sqrt{3}$

解 由条件知 F 为坐标原点,因此弦 AB 所在直线的方程为

$y=\sqrt{3}x$，代入抛物线的方程得

$$3x^2-8x-16=0.$$

设 AB 的中点为 E，则 E 的横坐标为$\frac{4}{3}$. 结合直线 AB 的倾斜角为 60°，知 $|FE|=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$，$|PF|=2|FE|=\frac{16}{3}$，所以选(A).

4 若 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right]$，则 $y=\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值是(　　).

(A) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　(B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　(D) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

解　先化 y 为同角三角函数的代数和，得

$$\begin{aligned}y&=-\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\cot\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-x-\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

令 $z=-x-\frac{\pi}{6}$，则 $z\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，$2z=\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，且

$$y=\cot z+\tan z+\cos z=\frac{2}{\sin 2z}+\cos z.$$

显然$\frac{2}{\sin 2z}$与 $\cos z$ 都是递减的，故 y 的最大值在 $z=\frac{\pi}{6}$ 时取到，即有 $y_{\max}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11}{6}\sqrt{3}$. 答案为(C).

5 已知 x、y 都在区间 $(-2,2)$ 内，且 $xy=-1$. 则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是(　　).

(A) $\frac{8}{5}$　　(B) $\frac{24}{11}$　　(C) $\frac{12}{7}$　　(D) $\frac{12}{5}$

解法一　由条件知 x, $y\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$, 且

$$u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9x^2}{9x^2-1}=1+\frac{1}{9x^2-1}+\frac{4}{4-x^2}$$
$$=1+\frac{35x^2}{-9x^4+37x^2-4}=1+\frac{35}{37-\left(9x^2+\frac{4}{x^2}\right)}.$$

利用 $x\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$ 及均值不等式知 $9x^2+\frac{4}{x^2}$ 的最小值为 12$\left(\text{等号在 } x^2=\frac{2}{3} \text{ 时取到}\right)$, 所以 $u\geqslant 1+\frac{35}{37-12}=\frac{12}{5}$, 应选(D).

解法二　由条件知 $4-x^2>0$, $9-y^2>0$, 故

$$u\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{4-x^2}\cdot\frac{9}{9-y^2}}=\frac{12}{\sqrt{36-9x^2-4y^2+(xy)^2}}$$
$$=\frac{12}{\sqrt{37-9x^2-4y^2}}\geqslant\frac{12}{\sqrt{37-2\sqrt{36(xy)^2}}}=\frac{12}{5}.$$

又当 $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $y=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ 时, $u=\frac{12}{5}$, 故 u 的最小值为 $\frac{12}{5}$.

6 在四面体 $ABCD$ 中，设 $AB=1$，$CD=\sqrt{3}$，直线 AB 与 CD 的距离为 2，夹角为 $\frac{\pi}{3}$. 则四面体 $ABCD$ 的体积等于（　　）.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解　如图 1，过 C 作 $CE \underline{\underline{\parallel}} AB$，以 $\triangle CDE$ 为底面，BC 为侧棱作棱柱 ABF-ECD，则所求四面体的体积 V_1 等于上述棱柱体积 V_2 的 $\frac{1}{3}$. 而 $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}CE\cdot CD\sin\angle ECD$，$AB$ 与 CD 的公垂线 MN 就是棱柱 ABF-ECD 的高，故

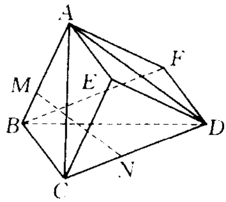


图 1

$$V_2=\frac{1}{2}MN\cdot CE\cdot CD\sin\angle ECD=\frac{3}{2}.$$

因此，$V_1=\frac{1}{3}V_2=\frac{1}{2}$. 应选(B).

评注　熟悉向量的读者知道 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 形成的平行四边形的面积为 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\sin 60^\circ=\frac{3}{2}$. 所以，$S_{\triangle CED}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$，这样更容易求得结果.

二、填空题(每小题 9 分，共 54 分)

7 不等式 $|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$ 的解集是______.

解　注意到，$|x|=3$ 是方程 $|x|^3-2x^2-4|x|+3=0$ 的解. 依此可知原不等式等价于

$$(|x|-3)(|x|^2+|x|-1)<0,$$

即 $$(|x|-3)\left(|x|-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(|x|-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)<0.$$

由于 $|x|-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}>0$,故解为 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<|x|<3$.

所以原不等式的解集是 $\left(-3,-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},3\right)$.

8 设 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点,P 是椭圆上的点,且 $|PF_1|:|PF_2|=2:1$. 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于________.

解 由椭圆的定义知 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$,而 $|PF_1|:|PF_2|=2:1$,故 $|PF_1|=4$, $|PF_2|=2$,又 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{5}$.结合 $4^2+2^2=(2\sqrt{5})^2$ 知 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形,故

$$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=4.$$

9 已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant 0, x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是________.

解 由条件易得 $A=(1,3)$. 现在记

$$f(x)=2^{1-x}+a,\ g(x)=x^2-2(a+7)x+5.$$

则 $A\subseteq B$ 表明,当 $1<x<3$ 时函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象都在 x 轴的下方. 结合 $f(x)$ 为单调减函数、$g(x)$ 是二次函数知 $A\subseteq B$ 的充

要条件是：$f(1)\leqslant 0$，$g(1)\leqslant 0$ 和 $g(3)\leqslant 0$ 同时成立。解得 $-4\leqslant a\leqslant -1$.

10 已知 a、b、c、d 均为正整数，且 $\log_a b=\frac{3}{2}$，$\log_c d=\frac{5}{4}$。若 $a-c=9$，则 $b-d=$ ________.

解 由条件知 $b=a^{\frac{3}{2}}$，$d=c^{\frac{5}{4}}$，由于 a、b、c、d 都是正整数，可设 $a=x^2$，$c=y^4$，其中 x、y 为正整数. 利用 $a-c=9$，得 $(x-y^2)(x+y^2)=9$，只能是 $(x-y^2,\ x+y^2)=(1,\ 9)$，解得 $x=5$，$y=2$. 进而 $b-d=x^3-y^5=125-32=93$.

11 将八个半径都为 1 的球分两层放置在一个圆柱内，并使得每个球和其相邻的四个球相切，且与圆柱的一个底面及侧面都相切，则此圆柱的高等于 ________.

解 如图 2，由已知，上下层四个球的球心 A'、B'、C'、D' 和 A、B、C、D 分别是两个边长为 2 的正方形的顶点，以这两个正方形的外接圆 $\odot O'$ 和 $\odot O$ 为上下底面构成圆柱，同时，A' 在下底面的射影必是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 M.

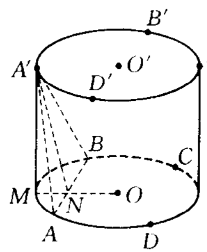


图 2

在 $\triangle A'AB$ 中，$A'A=A'B=AB=2$. 设 AB 的中点为 N，则 $A'N=\sqrt{3}$. 又 $OM=OA=\sqrt{2}$，$ON=1$，所以，

$$MN=\sqrt{2}-1,\ A'M=\sqrt{(A'N)^2-(MN)^2}=\sqrt[4]{8}.$$

因此，所求原来圆柱的高为 $\sqrt[4]{8}+2$.

评注 先需要想清楚球的放置方法(注意条件:每个球与四个球相切),然后确定球心的位置关系.

12 设 $M_n=\{$(十进制)n位纯小数$0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}\mid a_i$只取0或$1(i=1,2,\cdots,n-1),a_n=1\}$,$T_n$是$M_n$中元素的个数,$S_n$是$M_n$中所有元素的和.则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\underline{\qquad\qquad}.$$

解 由于$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$都恰有2种取法,故$T_n=2^{n-1}$.另外在求M_n中所有元素之和时,每个元素的第n位都为1,其余各位上,0、1出现次数相同,所以

$$S_n=\frac{1}{2}\times2^{n-1}\times\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)+2^{n-1}\times\frac{1}{10^n}$$

$$=2^{n-1}\times\frac{1}{18}\times\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right)+2^{n-1}\times\frac{1}{10^n}.$$

因此,$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{18}\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right)+\frac{1}{10^n}\right]=\frac{1}{18}.$

三、解答题(每小题20分,共60分)

13 设$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant5$.证明:

$$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}.$$

证明 由柯西不等式,知

$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}$

$=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}$

$$\leqslant\sqrt{[(x+1)+(x+1)+(2x-3)+(15-3x)](1+1+1+1)}$$

$$=2\sqrt{x+14}\leqslant 2\sqrt{19}.$$

等号要求在$\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}=\sqrt{15-3x}$且$x=5$时才能成立，但这个条件不能满足，故$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$.

评注 有一些同学作了下面的估计：$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\leqslant\sqrt{((x+1)+(2x-3)+(15-3x))(2^2+1^2+1^2)}=\sqrt{78}$，但这个估计达不到证题的目的.

14 设A、B、C分别是复数$z_0=a\mathrm{i}$，$z_1=\frac{1}{2}+b\mathrm{i}$，$z_2=1+c\mathrm{i}$对应的不共线的三点（$a$、$b$、$c$都是实数）．证明：曲线$z=z_0\cos^4t+2z_1\cos^2t\cdot\sin^2t+z_2\sin^4t$ $(t\in\mathbf{R})$与$\triangle ABC$中平行于AC的中位线只有一个公共点，并求出此点.

解法一 设$z=x+y\mathrm{i}$ $(x,y\in\mathbf{R})$，则

$$x+y\mathrm{i}=a\cos^4t\cdot\mathrm{i}+2\left(\frac{1}{2}+b\mathrm{i}\right)\cos^2t\cdot\sin^2t+(1+c\mathrm{i})\sin^4t.$$

实、虚部分离，可得

$$x=\cos^2t\cdot\sin^2t+\sin^4t=\sin^2t,$$

$$y=a(1-x)^2+2b(1-x)x+cx^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

即 $y=(a+c-2b)x^2+2(b-a)x+a$. ①

因为A、B、C三点不共线，故$a+c-2b\neq 0$，可见所给曲线是抛物线段（如图3）.

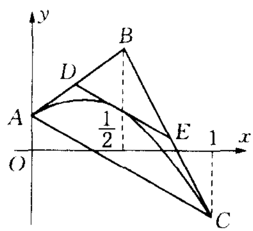


图3

又 AB 和 BC 的中点分别是 $D\left(\frac{1}{4}, \frac{a+b}{2}\right)$ 和 $E\left(\frac{3}{4}, \frac{b+c}{2}\right)$，所以，直线 DE 的方程为

$$y=(c-a)x+\frac{1}{4}(3a+2b-c). \qquad ②$$

由①、②联立得

$$(a+c-2b)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

由于 $a+c-2b\neq 0$，故 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$. 于是 $x=\frac{1}{2}$. 注意到 $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$，所以，抛物线与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线 DE 有且只有一个公共点，此点的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{a+c+2b}{4}\right)$，其对应的复数为 $z=\frac{1}{2}+\frac{a+c+2b}{4}\cdot \mathrm{i}$.

解法二 直接用复数处理. 设 D、E 分别为 AB、CB 的中点，则 D、E 对应的复数分别为 $\frac{1}{2}(z_0+z_1)=\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}$，$\frac{1}{2}(z_1+z_2)=\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}$. 于是，线段 DE 上的点对应的复数 z 满足：$z=\lambda\left(\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}\right)+(1-\lambda)\left(\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}\right)$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$. 代入曲线方程 $z=z_0\cos^4 t+2z_1\sin^2 t\cos^2 t+z_2\sin^4 t$，对比两边实部和虚部，得

$$\begin{cases}\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{2}=\sin^2 t\cos^2 t+\sin^4 t,\\ \frac{1}{2}[\lambda a+b+(1-\lambda)c]=a\cos^4 t+2b\sin^2 t\cos^2 t+c\sin^4 t.\end{cases}$$

两式中消去 λ，得

$$\frac{3}{4}(a-c)+\frac{b+c}{2}=a\cos^4 t+(2b+a-c)\sin^2 t\cos^2 t+a\sin^4 t$$

$$=a(1-2\sin^2 t\cos^2 t)+(2b+a-c)\sin^2 t\cos^2 t$$

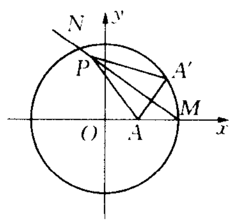
$$=a+(2b-a-c)\sin^2 t\cos^2 t.$$

于是
$$(2b-a-c)\left(\sin^2 t\cos^2 t-\frac{1}{4}\right)=0.$$

由 A、B、C 不共线可知 $z_1\neq\frac{1}{2}(z_0+z_2)$，即 $2b-a-c\neq 0$，故 $\sin^2 t\cos^2 t=\frac{1}{4}$，从而 $\sin^2 t(1-\sin^2 t)=\frac{1}{4}$，即 $\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)^2=0$，$\sin^2 t=\frac{1}{2}$. 故 $\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，即有 $\lambda=\frac{1}{2}\in[0,1]$. 这表明曲线与 $\triangle ABC$ 的平行于 AC 的中位线只有一个交点，这个交点对应的复数为 $z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{2}+\frac{a+c+2b}{4}\mathrm{i}$.

15 一张纸上画有半径为 R 的 $\odot O$ 和圆内一定点 A，且 $OA=a$. 折叠纸片，使圆周上某一点 A' 刚好与点 A 重合，这样的每一种折法，都留下一条直线折痕. 当 A' 取遍圆周上所有点时，求所有折痕所在直线上点的集合.

解 如图 4 建立直角坐标系，则有 $A(a,0)$. 设折叠时 $\odot O$ 上点 $A'(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ 与点 A 重合，而折痕为直线 MN，则 MN 为线段 AA' 的中垂线. 设 $P(x,y)$ 为 MN 上任意一点，则 $|PA'|=|PA|$，即



$$(x-R\cos\alpha)^2+(y-R\sin\alpha)^2=(x-a)^2+y^2.$$

图 4