同素变换理论及其在数学制图学和编图上的应用

Н.А. 烏尔馬耶夫著

测绘出版社

[illegible]变换理论及其在
数学制图学和[illegible]上的应用

[illegible]

[illegible]

同素变换理论及其在数学制图学和编图上的应用

H. A. 烏尔馬耶夫 著
刘 文 慶 譯

测绘出版社
1958·北京

Н. А. Урмаев

ТЕОРИЯ ГОМОГРАФИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ И СОСТАВЛЕНИЮ КАРТ

Геодезиздат

МОСКВА·1956

本書系根据苏联中央測繪科学研究所著作集第113期譯出的。原著是苏联著名学者烏尔馬耶夫教授最新著作之一。

本書第一章十分精闢地推論了同素变換理論，在这一理論基礎上，緊接着在第二章詳論了解决处于同素对应中的兩平面場之相对定向的方法。第三章論述了同素变換之分解。末章討論了地圖投影的同素变換。本書推導出的基本公式与主要方法均一一以实例說明。并再次示例說明由一种地圖投影在具有某一糾正元素系統的攝影糾正仪上經兩次轉变（或糾正）而变为另一种新的地圖投影。运用此种方法在攝影糾正仪（毋須改变其結構）上不但可探求新的、合乎特定要求的地圖投影，而且还可实現轉变地圖資料的作業，从而就創造出一种新的編圖工藝方法。

本書旣适用于从事数学制圖学、地圖編制学的研究人員和編制各种地圖的工程技術人員，也可用作高等学校制圖專業教学用書。

同素变換理论及其在数学制图学和編图上的应用

著　者　H. A. 烏尔馬耶夫

譯　者　刘文慶

出版者　測繪出版社

北京復興門外三里河

北京市書刊出版業營業許可証出字第081号

發行者　新華書店

印刷者　地質印刷厂

北京广安門內教子胡同甲32号

印数(京)1—1,200册　　1958年2月北京第1版

开本31″×43″1/18　　1958年2月第1次印刷

字数95,000　　印張4 8/9″ 插頁 3

定价(10)0.70元

目 錄

第一章

同素(透射)变換❶理論

§1. 点的对应

在兩曲面或兩平面之間可能有各种各样的对应关系。其中有一种叫做点的对应，可用下列关系式表之:

$$X=f_1(x,y);\qquad Y=f_2(x,y),\tag{1.I}$$

式中X,Y——一曲面上一点的曲綫坐标，

x,y——另一曲面上对应点的曲綫坐标。对于兩平面來說，此曲綫坐标轉变为笛卡兒直角坐标。

因此，兩曲面或兩平面間点之对应是这样一种对应，第一曲面或平面上的任一点，在第二曲面或平面上有一点而僅有一点与之相对应。

我們可以把上述公式視为坐标x,y变为坐标X,Y的公式，并可說是点的变換。

点的对应的概念在各种实际运用中有着很大的意义。

假如我們認为x,y是地球橢圓体表面上点的曲綫坐标，而X,Y是平面上对应点的笛卡兒直角坐标，那么关系式(1.I)就是地圖投影的基本方程式。并且地圖投影的研究就轉向研究函数f_1和f_2，此兩函数連同其偏微分在一定范圍內是連續的。

我們也可以把关系式(1.I)視为由一种地圖投影向另一种地圖投影变換的公式。

若兩地圖投影是正形的，則这一問題就具有極其重要的实际意义，并在大地測量学中予以研究。

在变換地圖投影的一般情况下，关系式(1.I)是編圖(作業)的数学基礎，若撇开地圖內容中地理要素的制圖綜合的話。同时这一关系式不能直接实际运用，而需代之以与其相应的圖解構成或代之以在某些狹小科学技術領域內所具有的其他关系式，例如借助所謂糾正仪的光学机械解法等。

糾正仪可以按直接的或通用的方式解决同素(透射)变換或共綫变換的任务。

我們就來研究这种变換。

---

❶"同素变換"一術語在射影几何学、画法几何学等中有譯为"射影变換"、"透射变換"、"透視变換"、"影射变換"、"直射变換"等——譯者註。

§ 2. 同素对应

同素(透射)对应或共綫对应以下列具有公分母的分数綫性函数关系式表示之:

$$X=\frac{a_1x+a_2y+a_3}{c_1x+c_2y+c_3};\qquad Y=\frac{b_1x+b_2y+b_3}{c_1x+c_2y+c_3}. \tag{2.I}$$

在不損害共同性的条件下,我們可使係数 c 中之一个等于一,以簡化右端分数的同一个係数。这样,同素对应或共綫对应完全决定于八个元素。

为了更加方便起見,引入平面場的概念。平面場是同一平面上所有直綫和点的总和。

这样,关系式(2.I)就表示由一平面場向另一平面場的同素变換。

我們既可以假定兩个平面場位于兩个不同的平面上,我們也可以假定它們位于同一平面上,这將更便于我們進一步的論述。

总之,处于同素对应的兩个平面場可以由八个元素决定。顯然,为了求得八个元素必須有四对已知点,即兩个共綫場决定于其任三点不共綫的四对点。

为了区別兩个平面場,可用(x,y)和(X,Y)來表示它們或分別称为第一平面場和第二平面場。

同素变換具有極重要的特性,即它把第一平面場內的直綫轉变为第二平面場內的直綫。事实上,我們可以假定(X,Y)平面場內的直綫为

$$mX+nY+p=0. \tag{3.I}$$

把关系式(2.I)代入此式,得

$$(a_1m+b_1n+c_1p)x+(a_2m+b_2n+c_2p)y+(a_3m+b_3n+c_3p)=0. \tag{4.I}$$

这是一直綫方程式,即一平面場內对应于另一平面場內之同样直綫的直綫。

現研究(X,Y)平面場內的平行直綫系。(3.I)式是平行直綫系的方程式,并且 m 和 n 为常数,而p为参变数。(4.I)式可改寫如下:

$$[(a_1m+b_1n)x+(a_2m+b_2n)y+(a_3m+b_3n)]+p(c_1x+c_2y+c_3)=0. \tag{5.I}$$

由解析几何学可知,方程式(5.I)在 m,n 为常数和 p 为参变数的条件下,是一直綫束(簇)方程式,亦即一平面場上的平行直綫在另一平面場上投影成直綫束。直綫束中心叫做合点。合点顯然是具有由係数 m 和 n 所决定方向的直綫上非固有点之描寫点。

为了求出合点,应取(5.I)直綫束中的任兩条直綫。其交点就是我們所求的合

点。这些直綫可以简便地如下求得：首先令直綫束参变数 p 等于零，然后再令p等于无窮大（∞）。

这样就得出直綫束中的兩条直綫：

$$(a_1m+b_1n)x+(a_2m+b_2n)y+(a_3m+b_3n)=0, \tag{6.I}$$

$$c_1x+c_2y+c_3=0. \tag{7.I}$$

解这兩方程式求出 x, y 值，我們就得到(x, y)平面場上合点的位置。但是这一解法为純粹代数解法并无实际意义。今后我們將研討探求合点的更簡便的方法。但还应記下，由于所有的合点位于同一直綫(7.I)上，此一直綫方程式(7.I)内不含有係数 m 和 n，这一直綫叫做合綫❶。

前面我們曾取位于第二平面場内的平行直綫系并在第一平面場内求得其射影。可以变更这些平面場的作用并可取第一平面場内的平行直綫系。我們当然可得到同样的結果，从而引出下述結論，在第二平面場内也有其合綫。

兩平面場的合綫具有重要的实用意义，因为可以利用兩平面場的合綫相平行的特性來标定兩平面場。

茲着眼于其运用來研究同素对应的特例（特殊情况）。

茲要求把第二平面場内的平行直綫描寫于第一平面場内为同样的平行直綫。

方程式(3.I)在m，n 为常数和 p 为参变数的条件下，是第二平面場内平行直綫系的方程式。为了使(4.I)成为同一平行直綫系的方程式，x 和 y 項的係数需为常数。这一条件只能当这些係数不依存于变数 p时才成立，亦即我們应假定

$$c_1=c_2=0.$$

在这种場合下，当 $c_3=1$ 时，同素对应(2.I)演变为：

$$X=a_1x+a_2y+a_3; \qquad Y=b_1x+b_2y+b_3. \tag{8.I}$$

这种对应称为仿射对应。

一般地說，同素变换能改变平面場的特性，但并不尽然。同素变换中不变化的特性如下：（1）点变换为点；（2）直綫变换为直綫；（3）某一直綫上的点变换为位于該直綫的对应直綫上的点，亦即同素变换时，接合元素对不發生变化。

同素变换时不变化的特性称为射影特性。

同素变换时發生变化的特性称为度量特性。其中有：綫段相等性，直綫平行性，角度値等等。

---

❶ 又称滅綫 —譯者註。

在此必須指出，接合特性在地圖轉变❶中具有实用意义。玆举例以明之。

若論及圓柱投影向圓錐投影之变換。設有位于同一緯綫上而經度不同的三点：A（$\lambda-\Delta\lambda$），B（λ）和C（$\lambda+\Delta\lambda$）。在圓柱投影中緯綫描寫成直綫，因此圓柱投影中B点和AC直綫是接合元素对。在圓錐投影中緯綫描寫为圓弧，AC直綫和B点就是非接合元素对。由于接合性不能沿緯綫保持，因而圓柱投影和圓錐投影之間的点的对应不屬于同素（透射）对应之列。相反，沿經綫保持着接合性，但这并不能說我們所研究的对应是同素对应。

由此可見，在变換地圖投影时沿經綫和緯綫保持接合性是必需的，而又是不充分的。

再研究一例，試把墨卡托投影轉变为正交圓柱投影。在此接合性沿經綫和緯綫都得以保持，但所研究的对应不是同素对应。我們只要看一下恆向綫（斜航綫）的描寫就不難深信这一点。恆向綫在墨卡托投影中描寫成为直綫，而在正交圓柱投影中描寫为曲綫。从而沿恆向綫就不能保持接合性。

地圖編繪过程是循序漸進的一系列圖解作業的总和，因此地圖編纂原圖的誤差不低于圖解構成的誤差。由此可見，把一地圖投影变换为另一地圖投影时，可以确定这一描寫范圍的大小，在这一范圍內該种变換可以由保持一定精度的同素变換近似地予以代替。

因此，在編制地圖的实用問題中，把接合性条件視为近似地实現來予以研究。

§ 3. 同素变換中的角度变異

上面已經談到，同素变換时度量元素發生变化。玆研究兩平面場上的对应直綫間夾角的关系問題，这对于实用是大有益处的。設(x,y)平面場內有一直綫束，它有直綫a,b,c和d，其中心为o。在(X,Y)平面場內有其对应的直綫束，它有直綫a',b',c'和d'，其中心为o'（圖1）。

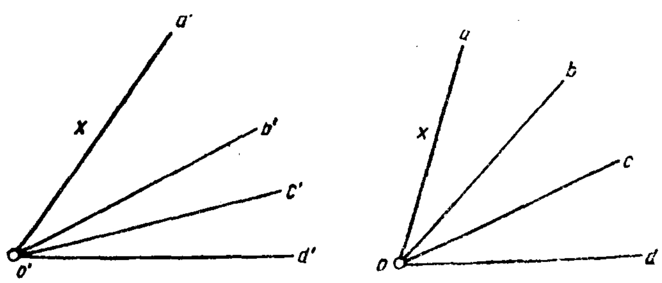

圖 1

直到目前为止，我們未給坐标系的配置以任何条件。因此我們可以把对应点o和o'視为坐标原点，而把直綫a和a'当作x–軸和X–軸。

若坐标原点为兩对应点，則公式(2.I)中分子的自由項应为零。其次当$y=0$，

❶ 'Трансформирование' 这一術語在攝影測量学中均譯为"糾正"，但在制圖文獻中当由一种地圖投影变换为另一种地圖投影的場合下譯为"轉变"似更恰当。——譯者註。

不論縱坐标 x 有何值 Y 应为零。因而 b_1 应为零。在这样选定坐标軸之下，由公式(2.I)可求得:

$$X=\frac{a_1x+a_2y}{c_1x+c_2y+c_3};\quad Y=\frac{b_2y}{c_1x+c_2y+c_3}. \tag{9.I}$$

用 a 表示第一平面場内任一直綫与 x 軸間之夾角，并以 A 表其对应角。

則
$$\operatorname{ctg} a=\frac{x}{y}\text{ 和 }\operatorname{ctg} A=\frac{X}{Y}.$$

公式(9.I)中兩式相除，得

$$\operatorname{ctg} A=\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_1}{b_2}\operatorname{ctg} a.$$

令
$$\frac{a_2}{b_2}=n;\quad \frac{a_1}{b_2}=m.$$

則
$$\operatorname{ctg} A=m\operatorname{ctg} a+n. \tag{10.I}$$

因此，由同素变换而成的对应角的余切处于其自身的綫性关系中。

$A-a$ 之差是角度变異。

§ 4. 正同素对应直綫交会

我們在 § 2 中已經确定任三点不共綫的四对点完全可以决定同素对应的係数 a，b 和 c。这四对点可得出包含八个未知数 a，b 和 c 的八个独立方程式。解这些方程式可求得此八个未知数。

这样，若我們取定(x,y)平面場内任一点，則按公式(2.I)可計算出第二平面場内其对应点的坐标 X,Y。

这种構成同素对应点的方法極其繁复，从而不适于实用。

因此，我們如利用圖解法或解析圖解法，可以迅速而簡便地达到目的。玆就來論述这些方法。

首先討論关于同素对应直綫之構成。

公式(10.I)内有二未知量 m 和 n。因而为了确定它們需有屬于同素对应綫束中的三对直綫。这每三条直綫構成兩个夾角，并按公式(10.I)寫出兩方程式

$$\operatorname{ctg} A_1=m\operatorname{ctg} a_1+n,$$
$$\operatorname{ctg} A_2=m\operatorname{ctg} a_2+n.$$

由此可求得

$$m=\frac{\operatorname{ctg} A_2-\operatorname{ctg} A_1}{\operatorname{ctg} a_2-\operatorname{ctg} a_1}, \tag{11.I}$$

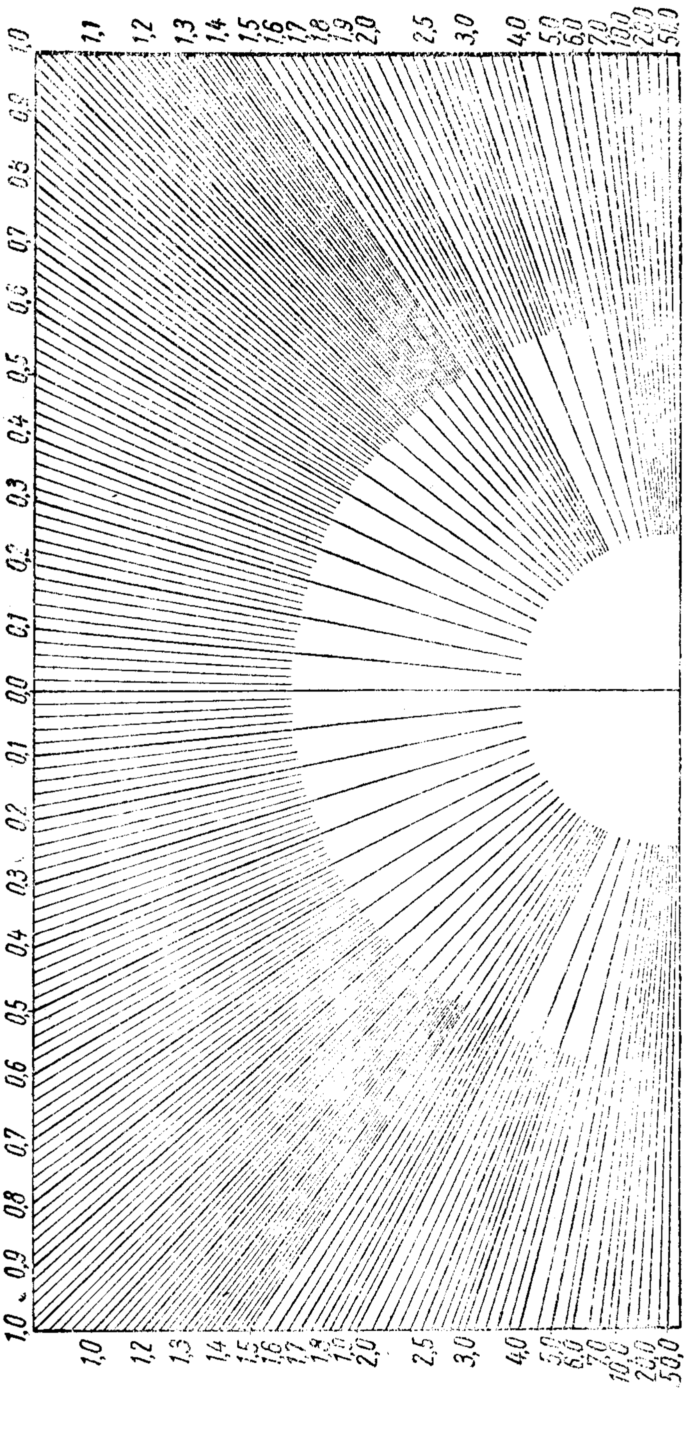
1,0 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0,0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0
1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2,0 2,5 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 10,0 20,0 50,0
1,0 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2,0 2,5 3,0 4,0 5,0 6,0 7,0 10,0 20,0 50,0

図 2

$$n = \operatorname{ctg} A_1 - m \operatorname{ctg} a_1 = \operatorname{ctg} A_2 - m \operatorname{ctg} a_1. \tag{12.I}$$

若 m 和 n 为已知量， 則按公式(10.I)可求得第二平面場內任一直綫的方向，此时应給出在第一平面場內对应直綫的方向。

为了構成同素对应点，將討論不同綫束的兩直綫之交点。由此可見，同素对应点之構成問題归之于同素对应直綫之構成。

此一方法可称为正同素对应直綫交会。

圖解構成时最好使用專門的量角器，借助它可直接求得各角的正切和余切（圖 2）。

玆研究下例。

四个点 1,2.3,4（圖 3）决定着兩平面場的同素对应。在第一平面場內还示出

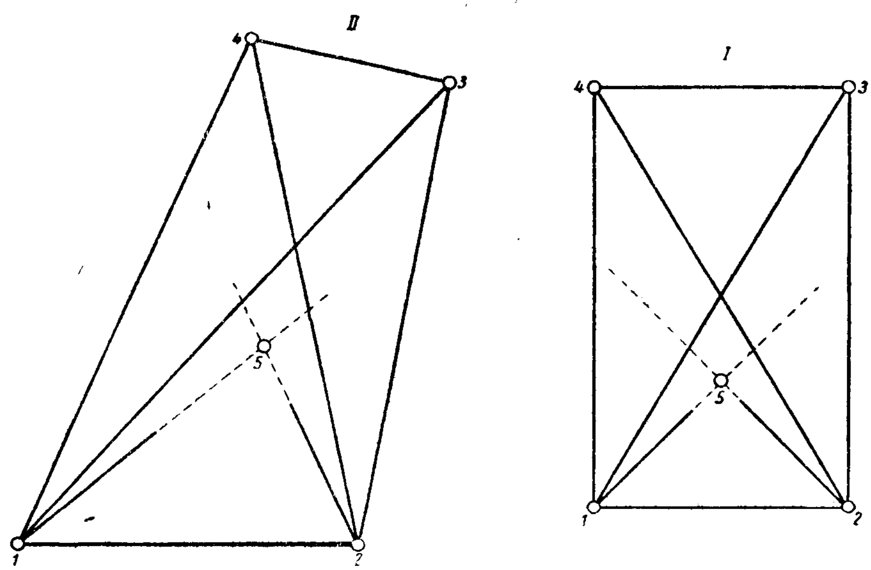

圖 3

点 5。要求在第二平面場內構成点 5 的对应点。

在每一四角形1234內画出对角綫，此对角綫处于同素对应中。

若把点 1 作为角頂。由1—2方向綫起算而量得的角度載于表 1。

表 1

	ctg A	ctg a	m ctg a
3	+ 0.909	+ 0.600	+ 0.465
5		+ 1.000	+ 0.775
4	+ 0.444	0.000	0

根据这些数据可求得 $m=\frac{0.465}{0.600}=+0.775$ 和 $n=+0.444$。如此第二平面場內 1—2 同 1—5 方向之間的夾角 A 可按公式(10.I)求得，即

$$\operatorname{ctg} A=0.775\times 1+0.444=1.219.$$

从而可在第二平面場內画出 1—5 方向的直綫。

現假定点 2 为角頂，各角則自 2—1 方向綫起量（表 2）。

表 2

	ctg A	ctg a	m ctg a
4	+ 0.222	+ 0.600	+ 0.404
5		+ 1.000	+ 0.673
3	− 0.182	0	0

我們求得：$m=\frac{0.404}{0.600}=0.673$；$n=-0.182$ 和 $\operatorname{ctg} A=+0.491$。

在第二平面場內作出2—5方向的直綫。第二平面場內直綫 1—5 和直綫 2—5 的交点就是所求点 5。

§ 5. 交叉比（非調和比）

回看圖1，假定以 ab，bc……來标志直綫 a 和 b，b 和 c，……之間的夾角。

按公式（10.Ⅰ）我們可以寫出

$$\operatorname{ctg} a'b'=m\operatorname{ctg} ab+n,$$
$$\operatorname{ctg} a'c'=m\operatorname{ctg} ac+n,$$
$$\operatorname{ctg} a'd'=m\operatorname{ctg} ad+n.$$

由上列方程式中可消去 m 和 n。我們可得到只含有第一、第二兩平面內各直綫間夾角的一个方程式。

我們有：

$$\operatorname{ctg} a'c'-\operatorname{ctg} a'b'=m(\operatorname{ctg} ac-\operatorname{ctg} ab),$$
$$\operatorname{ctg} a'd'-\operatorname{ctg} a'b'=m(\operatorname{ctg} ad-\operatorname{ctg} ab).$$

此兩式相除，得

$$\frac{\operatorname{ctg} a'd'-\operatorname{ctg} a'b'}{\operatorname{ctg} a'c'-\operatorname{ctg} a'b'}=\frac{\operatorname{ctg} ad-\operatorname{ctg} ab}{\operatorname{ctg} ac-\operatorname{ctg} ab}=k. \qquad (13.\mathrm{I})$$

我們可知比值 k 在各同素对应綫束中均保持着自己的值。

这一比值 k 叫做交叉比（非調和比）。

若交叉比是根据第一平面場內綫束的直綫算出的，則顯然可以用它算出角 $a'd'$，

$a'c'$，$a'b'$中之一角。例如我們可引出下述公式

$$(1-k)\operatorname{ctg} a'b'=\operatorname{ctg} a'd'-k\operatorname{ctg} a'c',$$

此式和（13.I）就可代替公式（10.I），（11.I）和（12.I）。

如果利用剛才研究过的例子中的数据，則对于以点1为中心的直綫束我們可得:

$$\operatorname{ctg} ad=0 \qquad \operatorname{ctg} a'd'=0.444$$

$$\operatorname{ctg} ac=0.6 \qquad \operatorname{ctg} a'c'=0.909$$

$$\operatorname{ctg} ab=1$$

$$k=2.5; \quad 1-k=-1.5.$$

由此 $\frac{3}{2}\operatorname{ctg} a'b'=-0.444+2.5\times0.909=1.83$; $\operatorname{ctg} a'b'=1.22$.

交叉比的値可能具有另一种形式，如假定

$$ab=ac-bc; \quad ab=ad-bd.$$

則

$$k=\frac{\operatorname{ctg} ad-\operatorname{ctg} ab}{\operatorname{ctg} ac-\operatorname{ctg} ab}=\frac{\operatorname{ctg} ad-\operatorname{ctg}(ad-bd)}{\operatorname{ctg} ac-\operatorname{ctg}(ac-bc)}=$$

$$=\frac{\sin bd}{\sin ab\sin ad}:\frac{\sin bc}{\sin ac\sin ab}.$$

或

$$k=\frac{\sin ac}{\sin bc}:\frac{\sin ad}{\sin bd} \tag{14.I}$$

在文献中我們常見到如（14.I）式的交叉比。公式（13.I）作为由同素变换理論的推導結果，想必是第一次引用在此。

現引一条割綫來割截以 o 为中心的直綫束的直綫 a，b，c，d（圖4）。这一割綫对于綫束之位置可完全由綫段 $oo_1=p$ 來决定，oo_1 垂直于割綫并与直綫 a 構成角 $Aoo_1=a$。

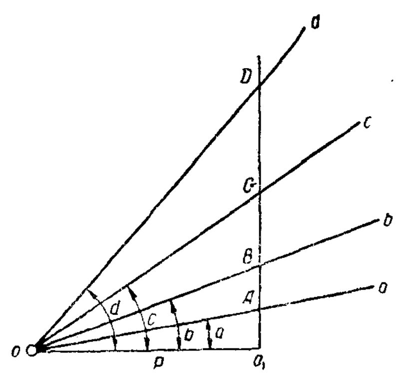

圖 4

我們可寫出

$$AC=p(\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a)=\frac{p\sin ac}{\cos a\cos c},$$

$$BC=p(\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} b)=\frac{p\sin bc}{\cos b\cos c},$$

$$AD=p(\operatorname{tg} d-\operatorname{tg} a)=\frac{p\sin ad}{\cos a\cos d},$$

$$BD = p\,(\operatorname{tg} d - \operatorname{tg} b) = \frac{p \sin bd}{\cos b \cos d}.$$

由上列方程式消去决定割綫对于直綫束位置的元素，为此可組成下列比例

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin ac}{\sin bc} \cdot \frac{\cos b}{\cos a},$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin ad}{\sin bd} \cdot \frac{\cos b}{\cos a}.$$

我們可求得

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$$

或

$$k = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}. \tag{15.I}$$

由此可引出实用上很重要的結論。

由于以割綫的綫段表示的交叉比的表达式中不包含决定割綫对于直綫束位置的元素，所以公式(15.I)对于該直綫束之任何割綫均是适合的。

另一方面对于不同的直綫束來說，只要其各直綫通过割綫的同一些点，都能保持交叉比。

§6. 正射影交会

上節的結論可作为正射影交会的基礎。

"正射影交会"这一術語 H.Γ.盖尔教授在攝影測量学[1]中引用过。

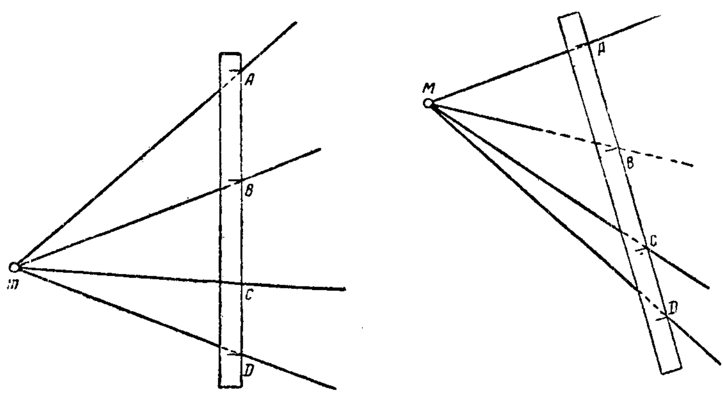

圖 5

[1] H.Γ.盖尔著"攝影与攝影測量学"，1937年于列宁格勒莫斯科出版。

假設有兩綫束 m 和 M（圖 5）。第一綫束有 4 条直綫，第二綫束有 3 条直綫。要求在第二綫束內構成对应于第一綫束的直綫 mB 的直綫。

为此以一紙条复于 m 綫束上，并在紙条上記下 A，B，C 和 D 点。然后把紙条轉放到 M 綫束上，而使第二綫束的三条直綫通过紙条上繪出的 A，C 和 D 点，連接 M 和 B 点，便得到 mB 直綫的对应直綫。

为了求出兩直綫交点的位置，顯然需要对另一对同素对应綫束重复上述的操作，以構成第二条直綫。最后，若再取第三对綫束，我們就可以得到示誤三角形，其大小可判明我們圖解構成的誤差。

§ 7. 沿对角綫交会

假設在兩平面場內示出帶有对角綫的兩个四边形（圖 6）。在第一平面場內載出 E 点。要求在第二平面場內建立 E 点的同素对应点。

不用上節所講的紙条而改用該四边形的对角綫。为此引一直綫 FE，并交对角綫 AD 于 C 点。用直尺量出这条对角綫各綫段之長：$AB=b$；$AC=c$，整条对角綫 $AD=d$，按下列公式計算交叉比，

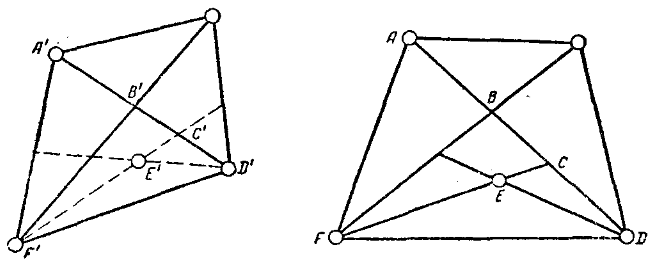

圖 6

$$k=\frac{c(d-b)}{d(c-b)}, \tag{16.I}$$

此一公式由（15.I）易于得出。

这一交叉比对于中心为 F' 的綫束也能保持。因此可寫为：

$$k=\frac{c'(d'-b')}{d'(c'-b')},$$

式中 $b'=A'B'$ 和 $d'=A'D'$ 可以量得，而 $A'C'=c'$ 是所求的綫段長。由此一公式可求得：

$$\frac{k}{c'}=\frac{k-1}{b'}+\frac{1}{d'}. \tag{17.I}$$

如果利用載于数学参考資料中的倒数表，則按这一公式的計算是十分簡便的。

計算出 c'，就可在对角綫 $A'D'$ 上得到 C'。这樣 $F'C'$ 就成为 FC 的同素对应直綫。