苏俄教育科学院初等数学全書

第二卷

代　　数

А. И. 烏茲科夫
Л. Я. 奧庫涅夫 著
А. П. 多摩利亞德

高等教育出版社

苏俄教育科学院初等数学全書

第 二 卷

代 数

А. И. 烏兹科夫　Л. Я. 奥庫涅夫
А. П. 多摩利亞德著
丁 寿 田 譯

高 等 教 育 出 版 社

这本書是由苏联苏俄教育科学院所編"初等数学全書"第二卷"代数学"的1951年初版翻譯过来的(原名：(Академия педагогических наук РСФСР: энциклопедияэлементарной математики, книга II. алгебра. гостехиздат, 1951)。

本書目的在給中学教师建立代学方面的理論基础，故可以供中学教师及师范学院学生作补充讀物。本書前兩篇的內容大致与大学高等代数教程的材料相当，而特别注意与中学教材的連系。最后一篇"方程式数学解法与圖解法"則为普通大学代数教本所沒有的。这部分材料不但对中学教师很有用处，对工業技术方面也很有用处。总起來說，第一篇目的在解决一次方程組問題，因此牽涉到行列式，行列陣及綫性变形等知識；第二篇目的在解决高次代数方程式問題，故牽涉到多項式环体及置換群等知識；第三篇則講方程式解法的实踐問題。由理論貫徹到实踐——这正是苏联数学的特色之一。

本書原由商务印書館出版，自1958年4月起改由本社出版。

苏俄教育科学院初等数学全書

第二卷

代数

А. И. 烏兹科夫　Л. Я. 奧库涅夫　А. П. 多摩利亞德著

丁寿田譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷　新华書店总經售

統一書号13010·436　開本850×1168 $\frac{1}{32}$　印張 $13\frac{3}{16}$　字数349,000　印数0001—1,000

1954年8月商務初版(共印11,500)

1958年4月新1版　1958年4月北京第1次印刷　定價(10)¥2.00

序

中學裏所謂“代數”這一門課程，實際上是由數學中幾個不同部門的知識所湊成的。其中包含有：(1)數的概念的推廣，即由有理數系到實數系再到複數系的逐步構成，這我們歸入“算術”部門，見本書第一册 И. В. 潑羅斯庫利亞科夫寫的那篇；(2)多項式環與有理函數體的研究，包括所謂有理式的恆等變形以及最簡單的代數方程式解法，這纔是屬於代數本身的材料而正是本書現在這第二册所要講的；(3)關於非代數的初等函數如冪函數、指數函數、對數函數等的知識以及關於極限、敍列與簡單級數如幾何級數等的知識，這實際上是分析方面的材料，在本書是歸第三册裏講的；(4)最後還有配列論的初步知識，這在本書是歸第六册裏講的——那裏讀者也可以找到概率論的基本知識。所以，讀者如關心中學代數教程的理論基礎，則要知道他們所需要的這些基礎知識並不完全屬於這部“初等數學全書”裏同一册的範圍，而要分別到本書講“算術”的第一册，講“代數”的第二册，講“分析”的第三册及講“各種問題”的第六册裏去找。

現在這一册是由三篇論著所構成的。А. И. 烏茲科夫的一篇講的是數學中由一次代數方程式或線性方程式的理論成長起來的那部分基本知識，即所謂“線性代數”。這部分(包括行列式論)是由統一的一般的觀點來闡明中學教程中許多零散的事實，並且還把某些幾何概念如向量、空間、運動等等推廣得涵義這麼寬泛而又深刻，因此也使其有了更廣大的應用範圍。

Л. Я. 奧庫涅夫的一篇講的是一元多項式及多元多項式的理論以及把代數方程式解成根式的這些問題。其中特別講到代數方程式在什麼條件下能解爲二次根式這個在初等數學上很重要的問題。

А. П. 多摩利亞德的一篇，嚴格說來，只有其第一章是屬於代數的。

這一章裏有 H. И. 羅巴契夫斯基解任意次數字係數代數方程式的一般方法。在全篇裏對代數方程式及超越方程式的重要數字解法與圖解法有很完備的介紹，並且各有具體的例子來說明。

關於代數方程式理論及代數其他部門的發展情況，在這一册裏暫且不談；這些歷史知識將放在第七册的"數學史概要"裏面去講。

編輯委員會。

目　　次

序

向量空間及線性變形

（A. И. 烏茲科夫）

第一章　行列式及線性方程式解法

§ 1　平面上的向量……1
§ 2　數向量・任何階的行列式……8
§ 3　由定義直接推出的行列式基本性質……12
§ 4　排列・n階行列式的表出式……15
§ 5　行列式的又一些性質……20
§ 6　行列式依某行或某列諸元素的展開・行列式的計算……23
§ 7　方程組的解法……29

第二章　向量空間與線性方程組的研究

§ 8　向量空間・抽象觀點……33
§ 9　向量運算的最簡單性質……36
§ 10　向量的線性相倚……41
§ 11　子空間……48
§ 12　方程組上的應用……51
§ 13　空間的基底・坐標……54
§ 14　任意向量組的秩(秩數)……59
§ 15　任意線性方程組的解……62
§ 16　幾何的意義・三元方程組……66
§ 17　高次方程組上的應用……71
§ 18　補充的說明……73

第三章　平面上及三度空間中的線性變形

§ 19　量度法・向量的數積……76

§ 20 坐標的變換……80
§ 21 行列陣的運算……84
§ 22 線性變形(變換)……92
§ 23 線性變形的行列陣表出法……98
§ 24 線性變形的幾何性質及其代表行列陣的性質……103
§ 25 對稱變形・平面的場合……107
§ 26 三度空間的對稱變形……110
§ 27 任意線性變形的表爲直交變形與對稱變形之積……115
§ 28 二次曲線與二次曲面方程式的化簡……117
參考文獻……119

多項式環與有理函數體

(Л. Я. 奧庫涅夫)

第一章 一元多項式環

§ 1 多項式環……121
§ 2 一元多項式環的可除性的性質……135
§ 3 以線性二項式爲除數的除法・多項式的根……154
§ 4 有理數體上的多項式……164
§ 5 有理數體上多項式的分解爲不可約因子・不可約性指標……170
§ 6 代數學基本定理……184
§ 7 方程式解成根式的問題・二項方程式……198
§ 8 二次方程式及三次方程式……201
§ 9 四次方程式……217
§ 10 代數擴展及方程式解成根式的問題的另一種提法……223

第二章 多元多項式環與有理函數體

§ 11 多元多項式環……232
§ 12 代數分式體……241
§ 13 對稱多項式……252
§ 14 對稱多項式理論的一些應用……260

第三章 論代數方程式的解成根式

§ 15 置換……269

§ 16　論四次以上方程式的不能解成根式……272
§ 17　代數方程式的羣……282
§ 18　帶對稱羣的方程式……295
§ 19　論代數方程式解成二次根式的可能性問題……302
§ 20　論三次及四次方程式解成二次根式的可能性……307
參考文獻……313

方程式的數字解法及圖解法

(A. П. 多摩利亞德)

緒言

第一章　代數方程式解法

§ 1　問題的提出……319
§ 2　實根的界限的決定……319
§ 3　根的隔離……327
§ 4　霍納法……335
§ 5　拉格朗時法……340
§ 6　羅巴契夫斯基法……348
習題……360

第二章　超越方程式解法

§ 7　直線內插法與牛頓法……362
§ 8　牛頓法的推廣……368
§ 9　反復法……373
§ 10　數的各種開方法……378
習題……385

第三章　方程組解法

§ 11　牛頓法……387
§ 12　反復法……390
§ 13　關於代數方程式虛根算法的幾句話……397
習題……399

第四章 圖解法

§ 14 一元方程式 …… 400
§ 15 用諾模圖(標線譜)解方程式 …… 408
§ 16 方程組解法 …… 416
習題 …… 421

增補

1. 一點簡短的歷史知識 …… 423
2. 向教師們進一言並推薦幾種參考文獻 …… 426

第一章　行列式及線性方程式解法

§1　平面上的向量

所謂向量[1]，在初幾何學裏乃理解爲有方向的線段。向量通常在圖上用帶箭頭的線段來表示，箭頭卽指示它的方向。但有時我們也用兩個字母上面加一箭頭來表示向量，第一個字母指明其起點，第二個字母指明其終點。

兩個向量，如果能以平行遷移使其疊合，則我們稱其爲相等的。顯然，這樣下定義的向量相等概念也具有通常相等概念的這些性質：每個向量等於它自己；如果第一個向量等於第二個向量，則第二個向量也就等於第一個向量；兩個向量如都等於第三個向量，則它們彼此相等。

在處理向量時宜以下面這方式來給各種向量運算下定義：所謂向量與數之間的乘法就是要形成一個這樣的新向量，這向量的長等於所給向量的長，乘以所給那數的絕對値，而其方向則或與所給向量一致（如果所給乘數是正的話），或與所給向量相反（如果所給乘數是負的話）。除去向量與數之間的乘法以外我們還規定向量與向量之間的加法。這只要對兩個同起點的向量來下定義就够了。在這情形，所謂兩個向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 之和就是指以這兩個向量作邊的平行四邊形的對角線 $\overrightarrow{AD}$ 所表示的向量而言（圖 1）。

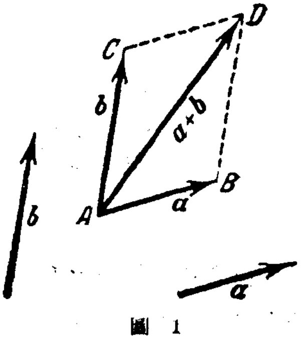

圖 1

這些運算使我們能構成像 $k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$ 這樣的式子，其中 $\boldsymbol{a}_i$ 是所給的向量而 k_i 是任意的實數。這樣的式子

1）向量又譯作矢量——譯者。

叫做所給諸向量的線性組合(一次組合)。

長度爲零的"線段",卽起點與終點重合的線段,亦稱之爲向量。所有這種"零向量"在上面所給那定義的意義之下認爲彼此都是相等的。零向量還認爲與任何向量都是平行的。

上面所規定的向量運算具有許多與實數運算相同的性質,例如:和與各項的次序無關,並且結合律亦成立: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$; 如果我們有若干向量與一個數的乘積之和,則同一乘數可以提到括弧外面去(圖 2);類此等等。此外,加法的逆運算(減法)亦永遠是可以施行的:要由向量 $\boldsymbol{a}$ 減去向量 $\boldsymbol{b}$, 只要做出 $\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}$ 這個和就行了。有了這些向量運算的基本性質,我們就能像在初等代數中一樣來進行等式的形式變換(將等式一邊的項移到另一邊;用同一數乘等式兩邊或以同一向量加於等式兩邊;也可以把幾個等式的左邊與右邊各加在一起而得一個也眞確的等式)。

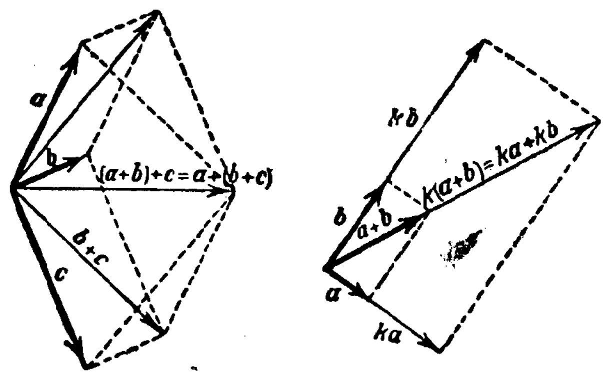

圖 2

如果兩個向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 平行於同一直線並且 $\boldsymbol{a}\neq 0$ (零向量),則向量 $\boldsymbol{b}$ 總可以表示成 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ 的形狀,這裏 k 是一個數。不平行於向量 $\boldsymbol{a}$ 的向量就不能表示成這種形狀,這可以立刻由向量與數的乘法的定義推知。

我們至今只限於討論在同一平面上的向量。在這情形，由以上所說的話我們能把任一向量表示成兩個彼此不平行的已知向量的線性組合：比方說，如果 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 是所給的向量，而 $\boldsymbol{x}$ 是同平面上任一向量，則首先可以藉平行遷移使所有三個向量的起點彼此叠合（圖 3），然後通過向量 $\boldsymbol{x}$ 的終點作兩直線各平行於向量 $\boldsymbol{b}$ 與 $\boldsymbol{a}$，使各與向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 所在的直線相交。於是由圖可見，$\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX_1}+\overrightarrow{OY_1}$，而既然向量 $\overrightarrow{OX_1}$ 與 $\overrightarrow{OY_1}$ 各平行於向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$，則可以選擇這樣兩個乘數 x 與 y，使 $x\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OX}$，並且 $y\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OY_1}$。代入前面的等式裏去，得 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，如此向量 $\boldsymbol{x}$ 就表示成向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的線性組合的形狀了。

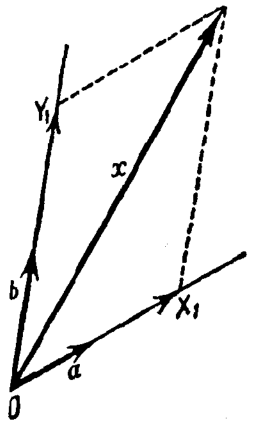

圖 3

在此值得注意的是，同一個向量不能表示所給諸向量的兩種不同的線性組合。如其不然，設 $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x'\boldsymbol{a}+y'\boldsymbol{b}$，則等式 $(x'-x)\boldsymbol{a}==(y'-y)\boldsymbol{b}$ 即使在向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 互不平行時亦將成立，這是不可能的。

上面所說的實際上包含着解析幾何裏坐標方法的概念：如果在平面上給了兩個向量 $\boldsymbol{e}_1$ 與 $\boldsymbol{e}_2$，則由於任何向量 $\boldsymbol{x}$ 都能表示成所給向量的線性組合的形狀，即 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$ 的形狀，這就使每個向量 $\boldsymbol{x}$ 都與兩個數 x_1 與 x_2 相應，而這兩個數本身即由所給的向量惟一地決定出來。這些數稱爲向量 $\boldsymbol{x}$ 對 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 這一對向量的坐標。有時這一對向量亦稱爲我們這平面上的基底（或坐標系）。上面指明過，以不平行向量的線性組合來表出一個向量，這種表示法是具有惟一性的，因此推知：要兩個向量相等，則其必要而充分的條件是要它們的坐標相等。爲便利起見，以後向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標將寫成行的形狀$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$。

如果給了兩個向量 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2$ 及 $\boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2$，則由上面所

說的向量運算的性質可推知 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1)\boldsymbol{e}_1+(x_2+y_2)\boldsymbol{e}_2$ 這等式亦成立，這意思就是說，兩個向量之和的坐標就等於各向量的相應坐標之和。同樣亦可得到一條關於向量與數相乘的法則：以一數乘一向量，則其坐標爲該數所乘。

我們現在已掌握充分的知識可以把它們試用來研究具體問題了。

作爲這種應用的對象，我們先由中學教材裏選出很熟悉的二元一次方程組來研究，卽研究一組像

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y&=c_1,\\a_2x+b_2y&=c_2,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

這種形狀的方程式，其中 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 是給定的數，目下我們假設它們都是實數。

解方程組 (1) 的問題無非就是要決定"未知數" x 與 y 的這樣的數值，它們代入方程式(1)能使其化爲眞確的數字等式。由中學教本裏知道，方程式(1)有時有惟一的解，卽只有一組 x 與 y 的數值能同時"滿足"兩方程式，有時則完全無解，而有時有無窮多解。

以上所說關於向量的知識使我們能把所有這些情形很直接地看明白。比方說，我們在平面上來考慮一組坐標系及三個向量：具有坐標 a_1 與 a_2 的向量 $\boldsymbol{a}$，具有坐標 b_1 與 b_2 的向量 $\boldsymbol{b}$ 及具有坐標 c_1 與 c_2 的向量 $\boldsymbol{c}$。如果暫且把 x 與 y 看作是已知數，則方程(1)的左邊成爲向量 $\boldsymbol{a}x+$ $+\boldsymbol{b}y$ 的坐標。但旣然這些坐標等於向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐標，則向量 $\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y$ 應該等於向量 $\boldsymbol{c}$。反過來說，如果我們能以任何方式選得了這樣的數 x 與 y，使等式 $\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y=\boldsymbol{c}$ 成立，則這些數就成方程組(1)的解。

如此，要解一組方程式(1)就等於要解一個向量方程式

$$\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{b}y=\boldsymbol{c},\tag{2}$$

所以這無非就是要把向量 $\boldsymbol{c}$ 表示成所給向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的線性組合的形狀而已。

由幾何圖形可以立刻提示我們在此所能出現的那些可能性，卽：

1. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 不平行，則每一向量都能以這些向量的線性組合表示出來，並且這種表示法是惟一的[即只能找到一對 x 與 y 的數值使方程式(2)滿足]。這意思就是說，不論自由項(常數項) c_1 與 c_2 的數值如何，所給這組方程式在這場合總有一個解。

2. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 平行，則方程式的解只有在向量 $\boldsymbol{c}$ 平行於向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的場合解纔能存在；在相反的場合，所需要的 x 與 y 的數值就找不出來。

3. 如果所有 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 與 $\boldsymbol{c}$ 這三個向量都平行，而向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一個不是零，則所有解都可以由如下方式得到（爲確定起見以下認爲向量 $\boldsymbol{a}$ 不等於零）：給未知數 y 一個任意數值並且把向量 $\boldsymbol{b}y$ 遷到右邊去：$\boldsymbol{a}x=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}y$。既然向量 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}y$ 平行於向量 $\boldsymbol{a}$，則可能選取這樣一個 x 的數值，使上面這等式成立。

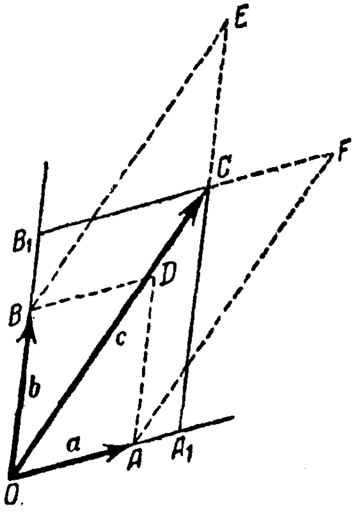

圖 4

剩下未討論的當 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 都等於零的這一場合完全沒有什麼困難；如果向量 $\boldsymbol{c}$ 異於零，則解不存在。如果向量 $\boldsymbol{c}$ 亦等於零，則任何一對 x 與 y 的數值都是所給這組方程式的解。

由所講的這種想法甚至還能得出方程組(1)當向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 不平行時方程組(1)的解的公式。的確，由圖 4 可以看出，滿足方程組的 x 與 y 的數值各等於 $\frac{OA_1}{OA}$ 與 $\frac{OB_1}{OB}$ 這兩個線段比率。

這些比率中第一個由圖可以看出是等於平行四邊形 $OCEB$ 與 $OADB$ 的高的比率，在此向量 $\boldsymbol{b}$ 看作是底邊。但由於這兩行四邊形的底邊是共同的，故高的比率就等於面積的比率，即

$$x=\frac{OCEB\text{ 的面積}}{OADB\text{ 的面積}}\tag{3}$$

同樣，$\frac{OB_1}{OB}$ 這比率等於平行四邊形 $OCFA$ 與 $OBDA$ 的面積之比，亦就是說，

$$y=\frac{OCFA\text{ 的面積}}{OBDA\text{ 的面積}}\tag{3'}$$

現在不難算出這些圖形的面積，這只要把它們分成三角形就行了；並且這樣就得到明白的公式，把未知數的數值以所給方程式的係數表示出來。但在我們這情形，還是按尋常的手續來做簡單得多：以 b_2 乘所給方程組(1)中第一式的兩邊，而以 $-b_1$ 乘其第二式的兩邊，然後加起來，如此我們得到

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1\tag{4}$$

這方程式來決定 x。

同樣，我們可得到

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1\tag{4'}$$

這方程式來決定 y。

容易看出這些公式與公式(3)，(3′)相似的地方：如果做成 x 與 y 的表出式，則其中也如在公式(3)與(3′)裏一樣出現共同的分母；此外，這分母只依濕着係數 a_1, a_2, b_1, b_2，它們是向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的坐標，而在公式(3)與(3′)裏則分母是畫在這些向量上的平行四邊形的面積。這就使我們想起要來闡明 $a_1b_2-a_2b_1$ 這式子的幾何意義。我們在平面上選取一組基底，由兩個互相垂直的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 所組成，這些向量每個的長都等於 1（圖 5）；然後構成向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2$ 及 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2$。於是 OA_1, OB_1, OA_2 與 OB_2 諸線段取適當的符號時將各等於 a_1, b_1, a_2 與 b_2 諸數(在圖上它們都假定是正的)。那麼平行四邊形 $OACB$ 的面積就顯然可以表示成這樣：

$$S_{OACB}=2S_{OAB}=2[S_{OB_1B}+S_{B_1A_1AB}-S_{OA_1A}]=$$
$$=2\left[\frac{b_1b_2}{2}+\frac{a_2+b_2}{2}(a_1-b_1)-\frac{a_1a_2}{2}\right]=a_1b_2-a_2b_1.$$

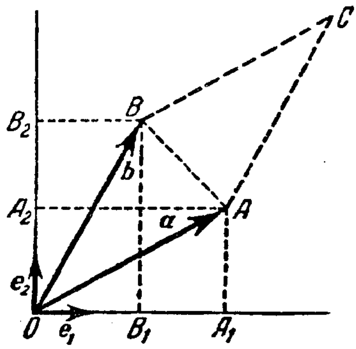

圖 5

如此，這面積原來恰好等於我們所感覺興趣的這個式子。

固然，在我們全部作圖中有一點欠精確的地方：在初等幾何的意義上面積是正的數量；而 $a_1b_2-a_2b_1$ 這式子則亦能是負的。我們以前不注意這種情況只是因為在我們圖上所有感覺興趣的數量都得出是正的。這種缺點是可以消除的，只要對平行四邊形的面積賦以一定的符號：一個畫在向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 上平行四邊形，如果由它的一邊 $\boldsymbol{a}$ 開始(以 $\boldsymbol{a}$ 的方向)沿其邊界繞行，這時候該形的面積與由 $\boldsymbol{e}_1$ 開始沿畫在向量 $\boldsymbol{e}_1$ 及 $\boldsymbol{e}_2$ 上的平行四邊形的邊界繞行時看來在觀察者的同一側，則該平行四邊形的面積通常算作是正的。讀者只要仿圖 5 畫幾次圖，就可以相信這樣規定的面積符號恆與 $a_1b_2-a_2b_1$ 這式子的符號一致。

我們要注意，這種憑繞行方向來給圖形面積規定符號的辦法不只是應用在平行四邊形上，亦在許許多多問題上表現有用處，它使我們能以最一般的並且最透徹的方式來陳述結果。

像 $a_1b_2-a_2b_1$ 這樣的式子叫做二階的行列式並且以這樣的符號來表示：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

這種表示法强調指明我們這式子是行的函數，這些行由向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的坐標所組成。由以上所說容易看出，這式子等於零時就表示向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 是平行的。如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，則方程組(1)的解由公式

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{5}$$

給出，而這公式是由等式(4)與(4′)推出的。由我們所闡明的行列式的幾何意義知道，這些公式恰好表示與公式(3)及(3′)同樣的意義。

以上我們需要一些行列式的性質。在此爲求更便利起見，將採用更簡化的符號：我們把行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$簡寫爲$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}|$，把它公然看作是兩個向量的函數。

A) 行列式是每個自變數的線性函數(一次函數)。

這裏所謂“線性”乃理解爲具備下列兩種性質[1]：

1) 如果自變數的數值以某數乘之，則函數的新數值即由原數值乘以某數而得。

2) 如果自變數的數值等於幾個數的和，則函數的數值等於自變數取各項數值時所得諸函數值之和。

如果對於我們這函數的兩個自變數而言，性質1)與2)施於每一自變數上都成立，則我們說這函數對每個自變數都是線性的。

除去線性以外，行列式還具有兩種性質：

Б) 如果組成行列式的兩個向量彼此相等，則行列式的值等於零。

В) 由基底向量所組成的行列式，即由坐標爲$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$與$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$的向量(在這順序之下)所組成的行列式，等於1。

所有這些性質的存在可直接由計算來證驗。它們也能由幾何方式得出。我們只來證驗性質A的第二部分作一個例子：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1'+b_1'' \\ a_2 & b_2'+b_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1' \\ a_2 & b_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1'' \\ a_2 & b_2'' \end{vmatrix} = a_1(b_2'+b_2'') - a_2(b_1'+b_1'').$$

§2 數向量·任何階的行列式

現在我們自然會想到要來看看，如何能把上一節所說的應用到未

---

[1] “線性”這名稱的來源是由於“線性”函數$f(x)=kx$(k是常數)具有這些性質。在這場合由數的運算律直接推得$f(x+y)=k(x+y)=f(x)+f(y)$及$f(mx)=mf(x)$，可見這函數具有下面陳述的性質1)與2)。