

主编：郭 刚
林 群

解密陷阱题

高中数学

解密陷阱
特级教师
夺取高分
亲历编写

东方出版社

解密陷阱题

高中数学

丛书主编：郭 刚

本书主编：林 群

本书编者：陈木孙 张金舜

方秦金 陈建国

东方出版社

责任编辑:汤丽琨

装帧设计:梁茗星

图书在版编目(CIP)数据

解密陷阱题——高中数学/郭刚 林群主编.

-北京:东方出版社,2004.9

ISBN 7-5060-1980-9

I. 解… II. ①郭… ②林… III. 数学课-高中-习题-升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 077754 号

解密陷阱题——高中数学

JIEMI XIANJINGTI——GAOZHONG SHUXUE

郭 刚 林 群 主 编

东方出版社 出版发行

(100706 北京朝阳门内大街 166 号)

北京新魏印刷厂印刷 新华书店经销

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月北京第 1 次印刷

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 印张:19.5

字数:336 千字 印数:0,001-6,000 册

ISBN 7-5060-1980-9 定价:29.00 元

邮购地址 100706 北京朝阳门内大街 166 号

人民东方图书销售中心 电话 (010)65250042 65289539

前言

现代教育特别重视能力的培养，考试方面也特别注重能力和素质的考查。现行试题多以能力立意，“陷阱题”因为迷惑性大，条件隐蔽而成为培养学生思维能力的重要手段，也是高考命题的重要命题形式。同学们在考试答题时往往因为试题信息的隐蔽性、迷惑性而造成失误。

一般地说，解答试题的过程，首先应认真分析和提取题示的有用信息，利用扎实的基础知识，进行缜密的科学思维——依题意认定解题所需要的原理、方法，再对事实材料进行分析与判断，从而得出结论、评价。“陷阱题”的难点大致来自几个方面：一、题目通过迷惑性的信息、限制性的条件设置干扰和障碍，使简单问题复杂化；二、题目有意增设无关条件，或用易错、易混、易漏的知识点设置障碍；三、利用考生思维定势，在考生分析概念、判断推理的常见错误和薄弱环节上设置障碍；四、题目呈现的条件隐蔽、“拐弯”，在知识迁移上设置障碍；五、变形隐蔽，通过图文转换等形式设置障碍等等。面对这些障碍，有的同学一筹莫展，或一做就错；其失误主要表现在：知识记忆性失误；题示判断性失误；思维准确性失误；考试心理性失误等。而要突破这些难点，避免失误，在学习与训练中，就要有意识地掌握以下几种方法：复杂问题简单化，抽象问题形象化，零散知识条理化，理论知识具体化，一般问题特殊化，善于对知识进行重新加工，改善思维能力，善于通过比较和归类、分析和综合、抽象和概括、判断和推理、知识迁移等方法解决问题。从而避免解题失误。

在教学过程中，常听见一些同学抱怨，基础知识熟练掌握，平时练习题也做了上千，可在考试中总出现失误，总是因为对题目的信息未能准确提取和判断，落入了试题所设的一个个“陷阱”。如何能最大程度地减少解这种“陷阱题”的失误率，使同学们一上手就能直接抓住解题的关键，熟练地识破题目的“障眼法”，直奔要害，正确解题？面对各种试题，如何解“隐”揭“秘”、去伪存真，引导学生正确支配学习心智，改善思维方法，积极高效地解答“陷阱题”，成为高考复习教学研究的重要课题。为此目的，我们邀请各科有丰富高三教学经验的著名教师，对此进行了探索，将教学实践中积累的资料进行整理提炼，编写了《解密陷阱题》这一套丛书，以供师生参考。

本丛书不同于一般题解类辞书，也有别于一般的错解类书籍，它追求实效和兴趣，把全面复习与讲究解题技巧结合起来。本丛书从学生的角度出发，以现行教学大纲和考试说

明为经，以现行教材(试验修订本)为纬，汇集近年各方名题进行思维训练。是一部“准确、高效、快捷、实效”，可用最短时间获取最佳复习效果、提高实战能力的高考备考用书。

本丛书依现行教材知识体系为线索分章节写作，每章分设几大特色栏目，适合于高三毕业班学生，也适合于高一、高二学生平时训练与备考之用。

参加本丛书编写的都是有丰富经验的著名特、高级教师，至今仍在教学第一线。多人具有多次参与省质检命题经验，本丛书也是他们多年来学习与实践、教学与科研的结晶。本丛书总主编为郭刚(特级教师)。数学分册主编为林群(特级教师，享受国务院津贴专家)；物理分册主编为翁延桂(特级教师，奥赛教练)；化学分册主编为石碧希(特级教师)；英语分册主编为陈珊(高级教师，省骨干教师)。参加编写的全是特、高级教师。

本丛书难免有许多不足与疏漏之处，恳请提出批评与修改意见。

本丛书在编写过程中，参阅了一些资料，在此向有关作者表示谢意。

郭 刚

2004年7月1日

编写说明

在教学实践中发现：有些题目同学们可能一错再错。在高三数学总复习中如果重视这一现象，及时总结和积累，有利于提高数学复习效率，起到事半功倍的效果。

本书以数学《教学大纲》和《考试说明》为依据，每节下设四个栏目：要点分析、陷阱分析、典例分析、实践模拟。各栏目具有不同的功能与特色：

1. 知识要点：总结归纳该部分的重要考点、数学思想方法及考试要求，以指明高考复习的方向和目标。

2. 陷阱分析：总结归纳该部分学习和考试中容易犯错的题型，进行评析，帮助学生提高纠错改错的本领，使读者融会贯通，错误不再重演。

3. 典例分析：精心设计题型，不搞题海战术，在重视通性通法的同时，关注解题技巧，务求实效性、典型性和启发性，意在培养学生的学科思想与悟性。

4. 实战模拟：模拟高考“实战”演练，提高对数学知识点、数学知识体系和数学思想方法的整体掌握水平，以及灵活应用数学知识的能力。

每一章的综合能力检测题，体现了近几年来高考改革的最新特点，把握最新考试命题趋向，题型选择新颖、典型，使考生准确把握“考什么”和必须“会什么”，全面检验学生迎考意识和应试能力。

本书适合高三学生总复习用，相关章节也适用于高一学生、高二学生。本书既重视易错题的分析，又重视基础知识的强化；既重视知识的系统性，又重视突出主干知识；既重视数学思想方法的归纳总结，又重视综合解题技巧的训练提高。通过本书的学习有助于学生在有限时间内获得最佳的复习效果，避免不应有的弯路、折回路及险路。

参加本册编写的有：陈木孙(第二、三、七、八章)、张金舜(第一、四、十二章)、方秦金(第五、九、十、十一章)、陈建国(第六章)，本书由陈木孙统稿，林群主编。

本书难免有不足与疏漏之处，恳切师生在使用过程中发现问题，提出批评与修改意见。

编者

2004年7月



郭刚简介

郭刚，男，1947年生。

特级教师，现任国家示范性高中龙岩第一中学副校长。1995年被国家教委聘为高中生物新大纲编订小组成员，参与了高中生物新大纲的编订工作。主要论文论著有：《生物解题方法与技巧》、《如何学好高中生物》、《认真学习新大纲、全面提高生物教学质量》、《谈研究性学习》等40余篇（部）。现为中国教育学会生物专业委员会理事。

目 录

第一章 集合与简易逻辑	1
本章综合能力检测	7
第二章 函数	9
第一节 函数与反函数	9
第二节 函数的图像	17
第三节 函数的性质	24
第四节 函数综合问题	33
本章综合能力检测	44
第三章 数列和数学归纳法	47
第一节 等差数列和等比数列	47
第二节 数列的综合应用	54
第三节 数学归纳法	63
本章综合能力检测	70
第四章 三角函数	73
第一节 三角函数的概念、性质和图像	73
第二节 两角和与差的三角函数	81
本章综合能力检测	89
第五章 平面向量	91
第一节 向量及其运算	91
第二节 定比分点及平移公式	98
第三节 解斜三角形	104
本章综合能力检测	112
第六章 不等式	115
第一节 不等式的证明	115
第二节 解不等式	123
第三节 不等式的应用	130
本章综合能力检测	138
第七章 直线和圆的方程	140
第一节 直线	140
第二节 圆	147

本章综合能力检测	154
第八章 圆锥曲线	156
第一节 椭圆	156
第二节 双曲线	164
第三节 抛物线	172
第四节 圆锥曲线综合问题	180
本章综合能力检测	192
第九章 直线、平面、简单几何体	195
第一节 空间直线与平面	195
第二节 空间向量及其应用	202
第三节 简单多面体与球	210
本章综合能力检测	217
第十章 排列与组合、概率与统计	220
第一节 排列与组合及其应用、二项式定理	220
第二节 概率	225
第三节 离散型随机变量的分布列, 期望与方差	231
第四节 统计	236
本章综合能力检测	242
第十一章 极限与导数	244
第一节 数列与函数的极限	244
第二节 函数的连续性	250
第三节 导数及其应用	255
本章综合能力检测	262
第十二章 复数	264
本章综合能力检测	270
综合能力检测答案	272

第一章 集合与简易逻辑

一、知识要点

集合的初步知识与简易逻辑知识,是掌握和使用数学语言的基础,在学习中学函数、不等式及后续内容时,将得到充分的运用.

要求理解集合的有关概念,掌握有关术语、符号及运算法则.集合的概念及运算是重点的考查内容.逻辑联结词、四种命题与充要条件这部分内容,以充要条件为重点考查内容.考题大部分为容易的选择题.

通过本章复习训练,进一步掌握运用数形结合、等价转化和分类讨论的思想方法分析和解决有关问题,形成良好的数学思维品质.

本章各知识点的考试要求是:

1. 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念;了解空集及全集的意义,了解属于、包含、相等的意义,掌握有关术语、符号及集合的运算法则并能解决一些简单问题.
2. 理解逻辑连词“或”、“且”、“非”的含义;理解四种命题及其相应关系;掌握充要条件的意义,能够判断两个命题的充要关系.

二、陷阱分析

例1 设集合 $A = \{x \mid 2a-1 \leq x \leq a+2\}$, $B = \{x \mid 3 \leq x \leq 5\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【错解】
$$\begin{cases} 2a-1 \geq 3 \\ a+2 \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 2 \leq a \leq 3$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $2 \leq a \leq 3$

【答案】 分两种情况讨论,

i) 当 $A = \emptyset$ 时, $2a-1 > a+2$, $a > 3$;

ii) 当 $A \neq \emptyset$ 时, 由上述解法得 $2 \leq a \leq 3$;

综上所述, a 的取值范围是 $a \geq 2$

【解析】 由于思维的不严谨, 忽视“空集是任何集合的子集”这一性质的应用, 要重视分类讨论思想的训练.

例2 若集合 $A = \{3-2x, 1, x\}$, $B = \{1, x^2\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 x .

【错解】 由 $A \cup B = A$ 得 $B \subseteq A$.

$$\therefore 3-2x = x^2, \text{ 或 } x = x^2$$

解得 $x=1$, 或 $x=-3$, $x=0$

【答案】化成 $\begin{cases} x^2=3-2x \\ x^2 \neq 1 \\ x^2 \neq x \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2=x \\ x^2 \neq 1 \\ x^2 \neq 3-2x \end{cases}$

解得 $x=-3$, 或 $x=0$

$\therefore$ 实数 $x=-3$, 或 $x=0$

【解析】错解原因在于忽视了集合中元素互异性的应用.

例 3 (2003 年上海高考题) 设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 均为非零实数, 不等式 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 和 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集分别为集合 M 和 N , 那么 “ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ” 是 “ $M = N$ ” 的

()

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分又非必要条件

【错解】C

【答案】D

【解析】若 a_1, a_2 异号, 则 $M \neq N$; 若 $M = N = \phi$, 则 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ 不成立.

三、典例分析

例 1 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + mx - 3 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 2\}$, 如果 $A \cap B \neq \phi$, 求实数 m 的范围.

【解答】依题意圆与线段总有公共点.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + mx - 3 = 0 & ① \\ x - y + 1 = 0 (0 \leq x \leq 2) & ② \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + (m+2)x - 2 = 0 \quad ③$$

$\therefore A \cap B \neq \phi$, $\therefore$ 方程(3)在区间 $[0, 2]$ 上至少有一个实数解.

由于 $\Delta = (m+2)^2 + 16 > 0$, 且 $x_1 x_2 < 0$.

因此方程(3)在 $[0, 2]$ 上不可能有两个实数解.

$\therefore$ 必需且只需 $f(0) \cdot f(2) \leq 0$.

即 $-2(2m+10) \leq 0$, 解得 $m \geq -5$.

所以实数 m 的取值范围是 $[-5, +\infty)$.

【注意】本题是一道综合题. 集合符号是一幅“面纱”, 它的实际背景是“圆与线段”总有公共点, 考查了多种数学思想的运用.

例 2 关于实数 x 的不等式 $\left| x - \frac{(a+1)^2}{2} \right| \leq \frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0 (a \in R)$ 的解集分别是 A 与 B , 若使 $A \subseteq B$, 求 a 的取值范围.

【解答】 $\therefore -\frac{(a-1)^2}{2} \leq x - \frac{(a+1)^2}{2} \leq \frac{(a-1)^2}{2}$

$\therefore 2a \leq x \leq a^2 + 1$. $\therefore A = \{x \mid 2a \leq x \leq a^2 + 1\}$

又 $\therefore (x-2)[x-(3a+1)] \leq 0$

当 $a = \frac{1}{3}$ 时, $B = \{2\}$

当 $a > \frac{1}{3}$ 时, $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3a+1\}$

当 $a < \frac{1}{3}$ 时, $B = \{x \mid 3a+1 \leq x \leq 2\}$

又 $A \subseteq B$, 排除 $a = \frac{1}{3}$, 化成下列两不等式组:

$$\begin{cases} a > \frac{1}{3} \\ 2a \geq 2 \\ a^2 + 1 \leq 3a + 1 \\ a^2 + 1 \geq 2a \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a < \frac{1}{3} \\ 2a \geq 3a + 1 \\ a^2 + 1 \leq 2 \\ a^2 + 1 \geq 2a \end{cases}$$

解得: $1 \leq a \leq 3$ 或 $a = -1$

综上所述: 所求 a 的取值范围是 $1 \leq a \leq 3$ 或 $a = -1$.

【注意】 本题以集合关系为载体, 实际上考查含参数的不等式的解法, 解题时运用了分类讨论、数形结合、化归等数学思想.

例 3 求证一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 最多有两个不相等的根.

【证明】 假设方程有三个不相等的根 x_1, x_2, x_3 , 则

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c_1 = 0 & \text{①} \\ ax_2^2 + bx_2 + c_2 = 0 & \text{②} \\ ax_3^2 + bx_3 + c_3 = 0 & \text{③} \end{cases}$$

① - ② 得: $a(x_1 + x_2) + b = 0$

① - ③ 得: $a(x_1 + x_3) + b = 0$

④ - ⑤ 得: $a(x_2 - x_3) = 0 (a \neq 0)$

$\therefore x_2 = x_3$, 这与假设 x_1, x_2, x_3 互不相等矛盾.

故原方程最多只有两个不相等的根.

【注意】 涉及“最多”与“最少”的问题, 由于分类较多给证明带来麻烦, 只要证明它们的反面不成立, 则原命题成立, 本题的反面是“有多于两个不相等的根”.

四、实战模拟

(一) 选择题

- (2004 年福建省高考题) 命题 p : 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $|a| + |b| > 1$ 是 $|a+b| > 1$ 的充要条件. 命题 q : 函数 $y = \sqrt{|x-1| - 2}$ 的定义域是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$, 则: ()
A. “ p 或 q ”为假 B. “ p 且 q ”为真 C. p 真 q 假 D. p 假 q 真
- (2003 年北京高考题) 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x \mid \log_2 x > 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
A. $\{x \mid x > 1\}$ B. $\{x \mid x > 0\}$ C. $\{x \mid x < -1\}$ D. $\{x \mid x - 1 < \text{或 } x > 1\}$
- (2003 年北京高考题) “ $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ”是“ $x = K\pi + \frac{5\pi}{12}, K \in \mathbb{Z}$ ”的 ()
A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

4. 下列集合中表示空集的是 ()

- A. $\{0\}$ B. $\left\{x \mid \tan x = \frac{\pi}{2}\right\}$ C. $\{x \mid \cot x = 0\}$ D. $\left\{x \mid \sin x = \frac{\pi}{2}\right\}$

5. 有下面四个命题:

- ①“直线 a, b 为异面直线”的充分非必要条件是“直线 a, b 不相交”;
②“直线 $l \perp$ 平面 α 内所有直线”的充要条件是“ $l \perp \alpha$ ”;
③“直线 $a \parallel$ 直线 b ”的充要条件是“ a 平行于 b 所在的平面”;
④“直线 $a \parallel$ 平面 α ”的必要非充分条件是“直线 a 平行于 α 内的某一条直线”.

其中正确命题的序号是

- A. ①③ B. ②③ C. ②④ D. ③④

6. 若不等式 $|x-1| < a$ 成立的充分条件是 $0 < x < 4$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[3, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, 3]$ D. $(-\infty, 1]$

7. 设 $f(x), g(x)$ 都是 R 上的奇函数, $\{x \mid f(x) > 0\} = \{x \mid 4 < x < 10\}$, $\{x \mid g(x) > 0\} = \{x \mid 2 < x < 5\}$, 则集合 $\{x \mid f(x) \cdot g(x) > 0\}$ 等于 ()

- A. $(2, 10)$ B. $(4, 5)$
C. $(-10, -2) \cup (2, 10)$ D. $(-5, -4) \cup (4, 5)$

8. 已知 $\vec{a} = (x, y)$, 其中 $x \in \{1, 2, 4, 5\}$, $y \in \{2, 4, 6, 8\}$, 则满足条件的不共线的向量共有 ()

- A. 16 个 B. 13 个 C. 12 个 D. 9 个

9. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, A 与 B 都是 U 的子集, 若 $A \cap B = \{1, 3\}$, 则称 (A, B) 为一个“理想配集”. 那么符合此条件的“理想配集”的个数是 (规定 (A, B) 与 (B, A) 是两个不同的“理想配集”) ()

- A. 4 B. 8 C. 9 D. 16

(二)填空题

10. 设集合 $A = \{x \mid 2\log_+ x - \log_+^2 x \geq 0\}$, $B = \{x \mid |x-a| < 4\}$. 如果 $A \subsetneq B$, 那么实数 a 的取值范围是_____.

11. 在给出的 4 个条件: ① $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x \in (-\infty, 0) \end{cases}$; ② $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ x \in (0, +\infty) \end{cases}$; ③ $\begin{cases} a > 1 \\ x \in (-\infty, 0) \end{cases}$; ④ $\begin{cases} a > 1 \\ x \in (0, +\infty) \end{cases}$ 下, 能使函数 $f(x) = \log_a \frac{1}{x^2}$ 为单调减函数的充要条件是_____ (把正确的条件的序号都填上).

12. 给出下列四个命题:

- ①若命题“ $p: x > 2$ ”为真命题, 则命题“ $q: x \geq 2$ ”为真命题;
②如果一个简单多面体的所有面都是四边形, 那么 $F = V - 2$ (其中 F 是面数, V 是顶点数);
③函数 $y = 2^{-x} (x > 0)$ 的反函数是 $y = -\log_2 x (x > 0)$;
④在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A > \sin B$ 的充要条件是 $A > B$.

其中所有正确命题的序号是_____.



(三)解答题

13. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$, $C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求 a 的值.
14. 已知集合 $A=\{(x, y) \mid y=-x^2+mx-1\}$, $B=\{(x, y) \mid x+y=3, 0 \leq x \leq 3\}$, 若 $A \cap B$ 中恰有两个元素, 求实数 m 的范围.
15. 已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a} < 0$ 的解集为 M .
- (I) 当 $a=4$ 时, 求集合 M ;
- (II) 若 $3 \in M$ 且 $5 \notin M$, 求实数 a 的取值范围.
16. 设集合 $A=\{x \mid x^2-x-6 < 0\}$, $B=\{x \mid x^2+2x-8 > 0\}$, $C=\{x \mid x^2-4ax+3a^2 < 0\}$.
- (I) 试确定 a 的取值范围使 $C \supseteq A \cap B$;
- (II) 试确定 a 的取值范围使 $C \supseteq (C \cup A) \cap (C \cup B)$.

【答案】

(一)选择题

1. D 【解析】 $|a| + |b| > 1$ 是 $|a+b| > 1$ 的必要非充分条件, 故 p 假 q 真.
2. A 【解析】 $x > 1$ 或 $x < 1$, 且 $x > 1$ 得 $x > 1$.
3. A 【解析】 $\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 成立的充要条件是 $2\alpha = 2K\pi \pm \frac{5\pi}{6}$.
4. D 【解析】 $|\sin x| \leq 1$.
5. C
6. A 【解析】 $1-a \leq 0$ 且 $1+a \geq 4$, 得 $a \geq 3$.
7. D 【解析】 $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) \cdot g(x) > 0$ 的解是 $4 < x < 5$. 再由对称性求之.
8. C 【解析】 $C_4^1 \cdot C_4^1 - 4 = 12$.
9. C 【解析】当 $A=\{1, 3\}$ 时, $B=\{1, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 2, 4\}$; 当 $A=\{1, 3, 2\}$ 时, $B=\{1, 3, 4\}$; 再交换 A, B 的排序.

(二)填空题

10. $-3 < a < \frac{17}{4}$ 【解析】 $A=\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $B=(a-4, a+4)$.
11. ①、④ 【解析】作出 $f(x)=-2\log_a |x|$ 图像后解答.
12. ①、②、④ 【解析】对于③ $y=2^{-x}(x>0)$ 的反函数是 $y=-\log_2 x (0 < x < 1)$; 对于④, 分两种情况讨论: $\frac{\pi}{2} > A > B > 0$ 或 $\frac{\pi}{2} > \pi - A > B > 0$.

(三)解答题

13. 解: $B=\{2, 3\}$, $C=\{2, -4\}$, 则由 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 有 $3 \in A$, $2 \notin A$, $-4 \notin A$. 得 $9-3a+a^2-19=0$. 解得: $a=-2$, 或 $a=5$.
- (i) 当 $a=-2$ 时, $x^2+2x-15=0$, $x_1=-5$, $x_2=3$
- $\therefore A=\{-5, 3\}$, 符合题意;
- (ii) 当 $a=5$ 时, $x^2-5x+6=0$, $x_1=2$, $x_2=3$

$\therefore A=\{2, 3\}$, 不符合题意, 舍去.

综上所述, $a=-2$.

【评析】 本题考查集合的概念及其运算、解方程等基本知识, 考查分类讨论思想的应用.

14. 解: 转化成抛物线与线段有两个公共点的问题, 即方程组 $\begin{cases} y=-x^2+mx-1 \\ x+y=3(0\leq x\leq 3) \end{cases}$ 有两组解.

$\therefore$ 方程 $x^2-(m+1)x+4=0$ 在区间 $[0, 3]$ 内有两个不相等实根, 则

$$\begin{cases} \Delta=(m+1)^2-16>0 \\ 0\leq \frac{m+1}{2}\leq 3 \\ f(0)=4\geq 0 \\ f(3)=13-3(m+1)\geq 0 \end{cases}$$

解得: $3<m\leq \frac{10}{3}$.

【评析】 本题考查解方程、解方程组等基础知识. 考查转化思想和数形结合思想的应用.

15. 解: (I) $\because \frac{4x-5}{x^2-4}<0 \quad \therefore x<-2$ 或 $\frac{5}{4}<x<2$

$\therefore$ 集合 $M=\{x|x<-2 \text{ 或 } \frac{5}{4}<x<2\}$

(II) 依题意得: $\begin{cases} \frac{3a-5}{9-a}<0 \\ \frac{5a-5}{25-a}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>9 \text{ 或 } a<\frac{5}{3} \\ 1\leq a<25 \end{cases}$

$\therefore 1\leq a<\frac{5}{3}$ 或 $9<a<25$.

则 a 的取值范围是 $\left[1, \frac{5}{3}\right) \cup (9, 25)$.

【评析】 本题考查集合的概念, 解不等式等基本知识, 考查转化思想的应用.

16. 解: $\because x^2-x-6<0, \therefore -2<x<3$. 则 $A=(-2, 3)$. 同理可得 $B=(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.

(I) $A\cap B=(2, 3), x^2-4ax+3a^2<0$ 即 $(x-3a)(x-a)<0$,

$\therefore A\cap B\subseteq C, \therefore C\neq\emptyset$.

$\therefore$ 当 $a>0$ 时, 由 $a<x<3a$ 得: $\begin{cases} a\leq 2 \\ 3a\geq 3 \end{cases}$, 则 $1\leq a\leq 2$.

当 $a<0$ 时, $3a<x<a<0$, 不合题意.

(II) $(C\cup A)\cap(C\cup B)=[-4, -2]\subseteq C, \therefore C\neq\emptyset$

当 $a<0$ 时, 同(I)方法得 $\begin{cases} 3a<-4 \\ a>-2 \end{cases}, \therefore -2<a<-\frac{4}{3}$;

当 $a>0$ 时, $0<a<x<3a$, 不合题意.

综上所述, 当 $1\leq a\leq 2$ 时, $C\supseteq A\cap B$;

当 $-2<a<-\frac{4}{3}$ 时, $C\supseteq (C\cup A)\cap(C\cup B)$.

本章综合能力检测

(一) 选择题(每小题 5 分, 共 60 分)

1. 设全集 $U=Z$, 集合 $P=\{x \mid x=2n, n \in Z\}$, $Q=\{x \mid x=4m, m \in Z\}$, 则 U 等于 ()
A. $P \cup Q$ B. $(C_U P) \cup Q$
C. $P \cup (C_U Q)$ D. $(C_U P) \cup (C_U Q)$
2. $0 < x < 5$ 是 $|x-2| < 3$ 的 ()
A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 设集合 $M=\{(x, y) \mid y=2^x, x \in R\}$, $N=\{(x, y) \mid x=1, y \in R\}$, 则 $M \cap N$ 的元素个数为 ()
A. 0 个 B. 1 个 C. 0 个或 1 个 D. 无数个
4. 已知集合 $A=\{0, 1\}$, $B=\{y \mid y^2=-x+1, x \in A\}$, 则 ()
A. $A=B$ B. $A \cap B = \emptyset$ C. $B \subseteq A$ D. $A \subseteq B$
5. 已知集合 $M=\{a, 0\}$, $N=\{x \mid x^2-3x < 0, x \in Z\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 a 等于 ()
A. 1 B. 2 C. 1 或 2 D. 8
6. 已知命题 $p: \begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$, 命题 $q: \begin{cases} x_1+x_2 > 2 \\ x_1x_2 > 1 \end{cases}$, 则 p 是 q 的 ()
A. 充分但不必要条件 B. 必要但不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 设集合 $P=\{(x, y) \mid y=-1+x-2x^2, x \in R\}$, 若点 $M(x, y) \in P$, 那么点 M 在 ()
A. 第一或第二象限 B. 第二或第三象限
C. 第三或第四象限 D. 以上都不成立
8. 设集合 $M=\{x \mid x=\frac{K}{2}+\frac{1}{4}, K \in Z\}$, $N=\{x \mid x=\frac{K}{4}+\frac{1}{2}, K \in Z\}$, 则 ()
A. $M=N$ B. $M \subsetneq N$ C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N \neq \emptyset$
9. 如果不等式 $\sqrt{x+a} \geq x (a > 0)$ 的解集为 $\{x \mid m \leq x \leq n\}$ 则 $|m-n| = 2a$, 则 a 的值等于 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
10. 给出以下四个命题: ①若 $\log_2(x^2-3x+2)=1$, 则 $x=0$, 或 $x=3$; ②若 $2 \leq x < 3$, 则 $2^{(x-2)(x-3)} \leq 1$; ③若 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$; ④若 $x, y \in N$, $x+y$ 为偶数, 则 xy 为奇数. 则 ()

A. ①的否命题为真

B. ②的否命题为真

C. ③的逆命题为假

D. ④的逆命题为假

11. 设 P 、 S 、 T 为三个非空集合, 已知 $x \in P$ 是 $x \in S$ 或 $x \in T$ 成立的充分必要条件, 那么 $x \in S$ 是 $x \in P$ 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

12. 设 M 、 N 为非空集合, 若规定: $M - N = \{x \mid x \in M, \text{但 } x \notin N\}$, 那么 $M - (M - N)$ 等于 ()

A. $M \cup N$

B. $M \cap N$

C. M

D. N

(二) 填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

13. 已知 $A = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{x \mid |x| = y + 2, y \in A\}$, 则 $B =$ _____.

14. 若 $f(x)$ 是 R 上的减函数, 且 $f(x)$ 的图像经过点 $A(0, 3)$ 和 $B(3, -1)$, 则不等式 $|f(x+1) - 1| < 2$ 的解集是 _____.

15. 设集合 $A = \{(x, y) \mid 2x^2 + y^2 = a^2\}$, $B = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, 1 \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则正数 a 的取值范围是 _____.

16. 已知集合 $M = \{(x, y) \mid |x| + |y| = a, a > 0\}$, $B = \{(x, y) \mid |xy| + 1 = |x| + |y|\}$, 若 $M \cap N$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合, 则 a 的值是 _____.

(三) 解答题 (共 6 小题, 共 74 分)

17. (12 分) 已知 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 < 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 < 0\}$, $C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 < 0\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

18. (12 分) 某村民小组有 54 人参与评选村民小组长, 在甲、乙两人是否可以当选村民小组长的选举中, 同意甲的人数是全体人数的 $\frac{2}{3}$, 其余的不同意, 同意乙的人数比同意甲的多 4 人, 其余的不同意. 另外, 对这两人都不同意的人数是对这两人都同意的人数的 $\frac{1}{4}$ 还少 1 人. 问对这两人都同意和都不同意的人数各有多少人?

19. (12 分) 已知 $P = \{(x, y) \mid (x+2)^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$, $Q = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + (y-m)^2 < \frac{1}{4}\}$, 且 $P \cap Q = Q$, 求 m 的取值范围.

20. (12 分) 已知 $a, b, c \in R$, $a+b+c > 0$, $ab+bc+ca > 0$, $abc > 0$, 求证: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

21. (13 分) 已知 $p: |1 - \frac{x-1}{3}| \leq 2$, $q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

22. (13 分) 要使满足关于 x 的不等式 $2x^2 - 9x + a < 0$ (解集非空) 的每一个 x 的值至少满足不等式 $x^2 - 4x + 3 < 0$ 和 $x^2 - 6x + 8 < 0$ 中的一个, 求实数 a 的取值范围.