

高 中 数 学

双 基 总 结 教 学

翟连林 王乾岭 主编

吴 康 审校

北京农业大学出版社

高中数学双基总结教学

主编 翟连林 王乾岭

审校 吴 康

编者 高国华 马法强 田光东

付银锋 余书占 侯光林

蔡光辉 付宝宇 孙治中

张守义 徐文健 韩旗峰

北京农业大学出版社

(京) 新登字164号

高中数学双基总结教学

翟连林 王乾岭 主编

*

北京农业大学出版社

(北京海淀区农大路)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销

保定六中印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 印张14.75 33千字

1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷

印数1—10,000 定价: 6.00元

ISBN7-81002-284-9/O·285

前 言

为了帮助高中毕业班学生总结学过的基本知识和基本技能（简称“双基”），为给高中毕业班数学教师提供一份实用的教学参考书，我们总结多年来从事毕业班数学总复习的教学经验，并参考近13年来数学高考试题和《全国高考数学学科说明》，编写了这本《高中数学双基总结教学》。

本书按教学顺序分12个单元，共67讲，每讲需2个课时，内容包括知识要点、例题和习题三部分，每个单元后面安排有检测题。本书的题目以中档题为主，既灵活、新颖又不偏不怪。考虑到教学的方便，书中例题和习题的解答另铅印成册，只供教师参考。使用本书宜采用议议——讲讲——练练的教学方法。

参加本书编写工作的还有：汪玉才、李家莹、靳全胜、翟雪怀等同志。另外，在编书过程中得到了李绍星、张玉云、朱振离、李景洲、王全铭等同志的支持与帮助，在此一并表示感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，难免有错漏和不妥之处，恳请读者批评指正！

编 者

一九九一年六月

目 录

第1讲	集合的概念及其运算	(1)
第2讲	映射、函数和反函数	(3)
第3讲	函数的定义域及解析式	(6)
第4讲	函数的值域及最值	(7)
第5讲	函数的奇偶性	(9)
第6讲	函数的单调性	(11)
第7讲	函数的图象及函数值大小的比较	(14)
第8讲	指数方程和对数方程	(17)
	集合、映射与函数单元检测题	(19)
第9讲	任意角的三角函数	(22)
第10讲	三角函数的定义域、值域及最值	(25)
第11讲	三角函数的奇偶性与单调性	(28)
第12讲	三角函数的周期性与图象	(31)
第13讲	三角函数式的求值 (一)	(34)
第14讲	三角函数式的求值 (二)	(37)
第15讲	三角恒等式的证明 (一)	(39)
第16讲	三角恒等式的证明 (二)	(41)
第17讲	三角条件等式的证明	(42)
第18讲	三角形内的三角函数问题	(44)
	三角函数单元检测题	(46)
第19讲	反三角函数的概念	(48)
第20讲	反三角函数的恒等式与不等式	(51)

第21讲	三角方程	(54)
	反三角函数和三角方程单元检测题	(56)
第22讲	等差数列与等比数列	(59)
第23讲	数列通项及前 n 项和的求法	(62)
第24讲	数列极限	(64)
第25讲	数学归纳法 (一)	(67)
第26讲	数学归纳法 (二)	(68)
第27讲	数列杂题	(69)
	数列单元检测题	(72)
第28讲	不等式的性质	(74)
第29讲	不等式的证明 (一)	(78)
第30讲	不等式的证明 (二)	(80)
第31讲	不等式在最值问题中的应用	(81)
第32讲	不等式的基本解法	(84)
第33讲	含参数的不等式的解法	(86)
	不等式单元检测题	(87)
第34讲	复数的概念及表达式	(90)
第35讲	复数的运算	(93)
第36讲	复数范围内方程的解法	(96)
第37讲	复数的模和共轭复数的性质	(99)
第38讲	复平面内点的轨迹	(102)
第39讲	复数的应用	(104)
	复数单元检测题	(106)
第40讲	排列与组合 (一)	(109)
第41讲	排列与组合 (二)	(112)
第42讲	二项展开式的性质	(115)
第43讲	二项式定理的应用	(117)

排列、组合与二项式定理单元检测题	(119)
第44讲 平面的性质及两条直线的位置关系	(122)
第45讲 直线和平面 (一)	(124)
第46讲 直线和平面 (二)	(127)
第47讲 平面与平面 (一)	(129)
第48讲 平面与平面 (二)	(131)
第49讲 直线与平面综合问题	(133)
直线与平面单元检测题	(135)
第50讲 棱柱、棱锥和棱台	(138)
第51讲 圆柱、圆锥和圆台	(140)
第52讲 球及简单组合体	(143)
第53讲 侧面展开图及截面问题	(146)
第54讲 体积计算和应用	(150)
第55讲 立体几何综合问题	(153)
多面体和旋转体单元检测题	(154)
第56讲 数值问题及充要条件	(157)
第57讲 直线与直线系	(160)
第58讲 圆与圆系	(163)
第59讲 直线与圆的位置关系	(166)
第60讲 与直线和圆相关的轨迹和最值问题	(169)
直线与圆单元检测题	(171)
第61讲 圆锥曲线方程	(174)
第62讲 直线、圆与圆锥曲线的关系	(177)
第63讲 与圆锥曲线相关的轨迹问题	(179)
第64讲 平移问题及圆锥曲线系	(181)
第65讲 与圆锥曲线相关的定值和最值问题	(184)
圆锥曲线单元检测题	(186)

第66讲	参数方程及应用.....	(189)
第67讲	极坐标及应用.....	(193)
	参数方程与极坐标单元检测题.....	(196)

目 录

第1讲	集合的概念及其运算	(201)
第2讲	映射、函数和反函数	(204)
第3讲	函数的定义域及解析式	(207)
第4讲	函数的值域及最值	(211)
第5讲	函数的奇偶性	(216)
第6讲	函数的单调性	(218)
第7讲	函数的图象及函数值大小的比较	(220)
第8讲	指数方程和对数方程	(223)
	集合、映射与函数单元检测题	(227)
第9讲	任意角的三角函数	(229)
第10讲	三角函数的定义域、值域及最值	(230)
第11讲	三角函数的奇偶性与单调性	(235)
第12讲	三角函数的周期性与图象	(237)
第13讲	三角函数式的求值(一)	(239)
第14讲	三角函数式的求值(二)	(242)
第15讲	三角恒等式的证明(一)	(246)
第16讲	三角恒等式的证明(二)	(250)
第17讲	三角条件等式的证明	(253)
第18讲	三角形内的三角函数问题	(257)
	三角函数单元检测题	(261)
第19讲	反三角函数的概念	(263)
第20讲	反三角函数的恒等式与不等式	(267)

第21讲	三角方程	(271)
	反三角函数和三角方程单元检测题	(272)
第22讲	等差数列与等比数列	(277)
第23讲	数列通项及前 n 项和的求法	(279)
第24讲	数列极限	(283)
第25讲	数学归纳法 (一)	(285)
第26讲	数学归纳法 (二)	(288)
第27讲	数列杂题	(292)
	数列单元检测题	(297)
第28讲	不等式的性质	(298)
第29讲	不等式的证明 (一)	(299)
第30讲	不等式的证明 (二)	(304)
第31讲	不等式在最值问题中的应用	(309)
第32讲	不等式的基本解法	(312)
第33讲	含参数的不等式的解法	(316)
	不等式单元检测题	(320)
第34讲	复数的概念及表达式	(323)
第35讲	复数的运算	(326)
第36讲	复数范围内方程的解法	(331)
第37讲	复数的模和共轭复数的性质	(335)
第38讲	复平面内点的轨迹	(338)
第39讲	复数的应用	(342)
	复数单元检测题	(348)
第40讲	排列与组合 (一)	(350)
第41讲	排列与组合 (二)	(353)
第42讲	二项展开式的性质	(354)
第43讲	二项式定理的应用	(356)

排列、组合与二项式定理单元检测题	(358)
第44讲 平面的性质及两条直线的位置关系	(359)
第45讲 直线和平面(一)	(363)
第46讲 直线和平面(二)	(366)
第47讲 平面与平面(一)	(369)
第48讲 平面与平面(二)	(373)
第49讲 直线与平面综合问题	(375)
直线与平面单元检测题	(381)
第50讲 棱柱、棱锥和棱台	(384)
第51讲 圆柱、圆锥和圆台	(389)
第52讲 球及简单组合体	(393)
第53讲 侧面展开图及截面问题	(399)
第54讲 体积计算和应用	(404)
第55讲 立体几何综合问题	(412)
多面体和旋转体单元检测题	(421)
第56讲 数值问题及充要条件	(424)
第57讲 直线与直线系	(427)
第58讲 圆与圆系	(431)
第59讲 直线与圆的位置关系	(435)
第60讲 与直线和圆相关的轨迹和最值问题	(438)
直线与圆单元检测题	(441)
第61讲 圆锥曲线方程	(443)
第62讲 直线、圆与圆锥曲线的关系	(445)
第63讲 与圆锥曲线相关的轨迹问题	(448)
第64讲 平移问题及圆锥曲线系	(452)
第65讲 与圆锥曲线相关的定值和最值问题	(454)
圆锥曲线单元检测题	(456)

第1讲 集合的概念及其运算

(一) 要点: 集合的三个特性、表示方法, 元素与集合、集合与集合间的关系, 子集、真子集、全集的概念及表示方法, 集合相等的定义, 集合间的交、并、补运算, 运算性质: $A \cup \bar{A} = I$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 等.

(二) 例题

1. 非空集合 A, B 满足关系 $A \subset B \subset I$, 则下列集合中 (C) 是空集.

(A) $A \cap B$; (B) $\bar{A} \cap B$; (C) $A \cap \bar{B}$; (D) $\bar{A} \cap \bar{B}$.

2. $A \cap B = A$ 是 $A \subset B$ 的 () 条件.

(A) 充分不必要; (B) 必要不充分;

(C) 充分且必要; (D) 不充分且不必要.

3. 设 $I = \{2, 4, x^2 - x + 1\}$, $A = \{x + 1, 2\}$, $\bar{A} = \{7\}$, 则 $x = ()$.

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

4. 设 $I = \{(x, y) | 3x - y - 2 = 0\}$, $A = \{(x, y) | \lg(y - 4) - \lg(x - 2) = \lg 3\}$, $B = \{(x, y) | \frac{y - 4}{x - 2} = 3\}$,

则 $\bar{A} \cap \bar{B} = ()$.

(A) $\{(2, 4)\}$; (B) $\{2, 4\}$; (C) $(2, 4)$; (D) $\emptyset$.

5. 已知集合 P 满足 $\{0, 1\} \subseteq P \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 则这种集合 P 共有 () 个.

(A) 5; (B) 6; (C) 7; (D) 8.

• 本书中的选择题均为单项选择题. 即在给出的代号为 (A)、(B)、(C)、(D) 的四个答案中有且仅有一个是正确的.

6. 已知 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$, $M = \{x | x \subset A\}$, $N = \{x | x \subseteq B\}$, 则 $M \cap N =$ _____.

7. 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap \bar{B} = \{2\}$, $\bar{A} \cap B = \{4\}$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, 则 $\bar{A} \cap \bar{B} =$ _____.

8. 设 $A = \{x | x^2 - 16 < 0\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

9. 设 $I = \{\text{非负整数}\}$, $A = \{\text{正奇数}\}$, $B = \{\text{质数}\}$, $C = \{\text{合数}\}$, 则 $\bar{A} \cap B =$ _____, $\bar{A} \cap C =$ _____.

10. 已知 $A = \{y | y = x^2 - 4x + 6, x \in R\}$, $B = \{y | y = -x^2 - 2x + 18, x \in R\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

11. 已知 $A = \{a, ab, \lg(ab)\}$, $B = \{0, |a|, b\}$, 且 $A = B$, 求 a, b 的值. (提示: 注意集合的特性)

12. 若集合 $A = \{x | \lg(x^2 + 3x) < 1\}$, $B = \{x | x = |y + 1|, y \in A\}$, 求 B .

13. 已知集合 A, B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素, 求同时满足下面条件的集合 C 的个数:

(1) $C \subset A \cup B$; (2) $C \cap A \neq \emptyset$; (3) C 中恰有 3 个元素.

14. 设集合 $A = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, $B = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-a)^2 \leq 1, a \in R\}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

15. 设集合 $A = \left\{ x \mid x = \cos \frac{n\pi}{3}, n \in Z \right\}$,

$B = \left\{ y \mid y = \sin \frac{(2m-3)\pi}{6}, m \in Z, \right\}$ 求证: $A = B$.

(三) 习题

1. 若集 A 中有3个元素, B 中有6个元素, 则 $A \cup B$ 中至少有 6 个元素, $A \cap B$ 中至多有 3 个元素.

2. 满足 $A \cup B = \{a, b\}$ 的集合 A, B 的组数为().

(A) 6; (B) 7; (C) 8; (D) 9.

3. 若集合 $X = \{0, 1\}$, $Y = \{x | x \subseteq X\}$, $Z = \{x | x \in X, x \in N\}$, 那么下列关系正确的是().

(A) $X \subset Y$; (B) $Z \in X$; (C) $Z \subset Y$; (D) $X \in Y$.

4. 设 $M_1 = \{x | x = 2n, n \in Z\}$, $M_2 = \{x | x = 2n + 1, n \in Z\}$, $P = \{x | x = 4n + 1, n \in Z\}$, 且 $a \in M_1, b \in M_2$, 那么().

(A) $a + b \in P$; (B) $a + b \in M_1$;

(C) $a + b \in M_2$; (D) 以上都不对.

5. 已知 $f(x) = x^2 + ax + b$, $A = \{x | x = f(x)\}$, $B = \{x | x = f[f(x)]\}$, 如果 $A = \{-1, 3\}$, 求集合 B ; 如果 $A = \{2\}$, 求 $A \cap B$.

第2讲 映射、函数和反函数

(一) 要点: 对应、映射、一一映射的概念, 函数的三要素, 函数存在反函数的条件, 反函数的求法, 函数与其反函数图象间的关系, 表示同一图象的函数的判定方法.

(二) 例题

1. 设 f 是 A 到 B 上的一种对应, “ f 不是映射” 是 “ f 不是一一映射” 的() 条件.

(A) 充分不必要; (B) 必要不充分;

(C) 充要; (D) 不充分且不必要.

2. 函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f^{-1}(-x)$ 的图象关于()
对称.

(A)原点; (B) $y=-x$; (C) y 轴; (D) x 轴.

3. 下列各组函数中图象完全相同的是().

(A) $y=x^2$ 与 $y=2x$, $x \in \{0, 2\}$;

(B) $y=\arcsin(\sin x)$ 与 $y=\arccos(\cos x)$;

(C) $y=\log_2 2^{|x|}$ 与 $y=2^{\log_2 |x|}$;

(D) $y=\sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $y=(\sec x)^0$.

4. 下列映射中, 哪一个是从 X 到 Y 的一一映射? 答:
().

(A) $X = \{x | x \in \mathbb{R}\}$, $Y = \{y | y \in \mathbb{R}^+\}$, $f: x \rightarrow y = e^x$;

(B) $X = \{x | 0 \leq x \leq 2\pi\}$, $Y = \{y | -1 \leq y \leq 1\}$,

$f: x \rightarrow y = \cos x$;

(C) $X = \{x | 0 \leq x \leq \pi\}$, $Y = \{y | -1 \leq y \leq 1\}$,

$f: x \rightarrow y = \sin x$;

(D) $X = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, $Y = \{y | 0 \leq y \leq 4\}$,

$f: x \rightarrow y = x^2$.

5. 函数 $y = \log_2 x + 3 (x \geq 1)$ 的反函数的定义域为
().

(A) $\{y | y \geq 2\}$; (B) $\{y | y > 3\}$;

(C) $\{y | y \geq 3\}$; (D) $\mathbb{R}$.

6. 点 (x, y) 在映射 f 下的象是 $(x+y, x-y)$, 则点 $(1, 2)$
在 f 下的原象是_____.

7. 已知函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的反函数为 $y = -\sqrt{1-x^2}$,
则原函数的定义域为_____.

8. 函数 $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 (x > 0)$ 的反函数为
_____.

9. 已知 $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, 则 $f^{-1}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f^{-1}(2x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 若集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$, 则从 A 到 B 的映射有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个, 其中一一映射有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.

11. 求函数 $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ 的反函数及其定义域.

12. 给定实数 a , $a \neq 0$, 且 $a \neq 1$, 设函数 $y = \frac{x-1}{ax-1}$ ($x \in \mathbb{R}$, 且 $x \neq \frac{1}{a}$). 证明: 这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

13. 给定实数 a , $a > 1$, 证明: 函数 $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ ($x > 0$) 的反函数为 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x > 1$).

(三) 习题

1. 已知函数 $y = \frac{x+a}{2x-a}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则实数 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知函数 $y = \frac{1}{2}x - m$ 与 $y = -nx + 12$ 互为反函数, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 如果直线 $y = ax + 2$ 与直线 $y = 3x - b$ 关于直线 $y + x = 0$ 对称, 那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 从 A 到 A 的一一映射共有多少种? 其中有且仅有两个元素成自身对应的有多少种?

5. 求函数 $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$ 的反函数, 并画出原函数

和反函数的图象.

6. 已知 $f(e^x+1)=2e^x+1$, $g(\lg x)=\lg \frac{x^2}{10}$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否为同一函数? 并说明理由.

7. 证明: 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

第3讲 函数的定义域及解析式

(一) 要点: 根式函数、分式函数、幂函数、对数函数及一般函数定义域的求法, 根据简单的函数方程求函数的解析式.

(二) 例题

1. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x+3)}$ 的定义域为_____.

2. $y=\lg[x(1-x)]$ 的定义域为_____.

3. $y=\log_{(x+1)}(4-x^2)$ 的定义域为_____.

4. $y=\frac{(x+4)^0}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ 的定义域为_____.

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 则 $f(x+1)$ 的定义域为_____, $f(2^x)$ 的定义域为_____, $f(\sin x)$ 的定义域为_____.

6. 已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$, 则 $f(x)=$ _____.

7. 若 $f\left(\frac{1+x}{x}\right)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$, 则 $f(x)=$ _____.

8. 若 $f(e^x)=x^3+\sin x$, 则 $f(x)=$ _____.

9. 设 $f(\operatorname{tg} x)=\sin x+\operatorname{tg} x$, 则 $f(\operatorname{ctg} x)$ 的一个表达式为_____.