

桂祖华 著

微积分新探

New Exploration on Calculus

上海交通大学出版社

微积分新探

桂祖华 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是对微积分基础理论研究 with 探索的学术著作. 全书分两部分共 8 章, 内容涉及积分学和多中心展开理论.

本书内容翔实, 概念清晰, 思路开阔, 别具一格, 理论与实际并重. 虽属基础数学范围, 但思想新颖, 方法独创, 对微积分的若干基础理论有所创新, 并得到广泛应用.

本书可供学习、讲授微积分及其爱好并有志于研究数学的大学生、研究生、教师和科研工作者阅读或参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分新探/桂祖华著. —上海: 上海交通大学出版社, 2004
ISBN 7-313-03609-4

I. 微... II. 桂... III. ① 微积分—研究 ② 级数—研究 IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 096948 号

微积分新探

桂祖华 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 张天蔚

上海交通大学出版社印务部 印刷 全国新华书店经销

开本: 880mm×1230mm 1/32 印张: 11.375 字数: 323 千字

2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1-1 050

ISBN 7-313-03609-4/O·162 定价: 19.00 元

版权所有 侵权必究

任何人一旦掌握了他所从事学科的基础理论,并且学会了独立思考和工作,他必定能找到自己的前进之路,而且与那些以获得知识细节为主要目的的人相比,他必定能更好地适应进步与变化。

爱因斯坦(Einstein)

前 言

17 世纪数学最伟大的成就是微积分,它是继 Euclid 几何之后全部数学中的一个最伟大的创造,其理论成熟,应用广泛.微积分是高校工科及部分文理科等学生的重要基础课之一,修读学生众多,对后继课程影响重大.1984 年,作者在上海交通大学进行微积分教学改革工作中,感觉到一般传统教材与教学方法较多地注重学生的分析问题和解决问题能力的培养,而对培养学生开拓思维、善于提出问题和创新意识能力方面,较为忽视.这也是当前教育工作中的一个薄弱环节.基础理论的进步不只是对它的简单重复,而是需要不断地创新,只有创新才能求得发展,创新是发展的灵魂.为此作者在教学实践中将自己的心得和体会书写成讲义《高等数学归纳、思考与探索》(八册,获 1990 年上海交通大学优秀教材奖),并且开设了多方面、深层次的课外讲座,以此来激发学生的积极思维、活跃思想和敢于创新的精神,受到众多学生的欢迎.几年来,作者发表有关微积分论文 50 余篇.部分内容曾应邀在国内若干所大学以及国际数学教学会议上报告发表.现在再加上一些尚未发表的书稿,汇集成本书《微积分新探》.

现在将多次整理和修改后的此书奉献给广大读者是作者多年的心愿.本书既不是传统式教材,也不是解题技巧方法,而是作者 20 余年来对微积分教学与研究工作的回顾与总结,是一本有趣和值得深入探讨的学术著作.本书旨在抛砖引玉,使读者在学习与教学,在研究数学与实践工作中,在开拓思路,活跃思维创新能力方面得到启发与帮助.

本书对微积分的若干基础理论有所创新,得到不少新的结果.同时也提出一些不成熟的想法和猜想,甚至有些地方还可能存在不足与错误,仅供读者参考,恳请批评指正.

本书得到上海交通大学出版基金的资助.我校党委书记王宗光教授和复旦大学胡和生院士都非常关心本书的编写和出版工作.在此一

并表示感谢.

对我们来说,在微积分中还有许多问题没有解决,这些问题有的还是很重要的.在阅读本书之前先让我们提出一些问题.

问题 1 牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

是微积分中最著名的公式之一,其中 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的任意一个原函数. 问题是如何去寻找上述 $F(x)$, 这是一个困难的、也是关键问题. 本书引入负导函数新概念, 从而得到一种新的特殊的原函数. 这是有趣和简便的新方法.

问题 2 大家知道,微积分中有理函数的积分由有理函数、三角函数和对数函数三部分组成. 一般来说,计算有理函数的积分是比较困难的. 著名的奥斯特洛格拉斯基公式用简单的代数方法对有理函数的积分进行分解:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$$

其中 $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$;

$$Q_1(x) = X_1^{h_1-1} X_2^{h_2-1} \cdots X_n^{h_n-1} (x^2 + r_1x + s_1)^{k_1-1} (x^2 + r_2x + s_2)^{k_2-1} \cdots (x^2 + r_mx + s_m)^{k_m-1};$$

$$Q_2(x) = X_1 \cdots X_n (x^2 + r_1x + s_1) \cdots (x^2 + r_mx + s_m); X_i \equiv x - x_i;$$

$$r_j^2 < 4s_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m); h_i, k_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m)$$

是 $(n+m)$ 个正整数;

$P(x)$ 是一个次数小于 $(n+2m)$ 的多项式; $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 是两个次数分别小于多项式 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 次数的多项式.

公式将复杂的有理函数的积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ 分离并转化为简单的有理函数的积分 $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$, 如何计算积分 $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$ 呢? 进一步我们要问是否可以摆脱待定系数法, 采用非待定系数的新公式计算上述积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ (包括 $P(x)$ 的次数分别大于或等于多项式 $Q(x)$ 次数)

呢?

问题 3 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta) = \{x \mid |X_0| < \delta\}$ 上, 具有 $(n+1)$ 阶导数, $\forall x \in U(x_0, \delta)$, 则存在一个值 $\xi \in (x_0, x)$, 或 (x, x_0) 使

$$f(x) = T_n(f) + R_{f,n+1}(x, x_0),$$

$$\text{其中 } T_n(f) = f(x_0) + f'(x_0)X_0 + \frac{f''(x_0)X_0^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)X_0^n}{n!} \text{ (泰勒多项式);}$$

$$R_{f,n+1}(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)X_0^{n+1}}{(n+1)!}$$

或 $\xi = x_0 + \theta X_0, X_0 \equiv x - x_0 (0 < \theta < 1)$ (泰勒余项).

这是著名的泰勒定理(一个中心 x_0), 如何寻找多中心泰勒定理

$$f(x) = T_Q(f) + R_{f,s}(x),$$

其中 $T_Q(f)$ 和 $R_{f,s}(x)$ 分别为关于 n 个中心 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的泰勒多项式和泰勒余项, 特别当 $n=1$ 时, 即常规的泰勒定理.

问题 4 设 $f(x)$ 是在区间 $D(x)$ 上一个函数, 给定 n 个点 $x_i, (i=1, 2, \dots, n)$ 且已知它的函数值 $f(x_i)$ 和各阶导数值 $f^{(j)}(x_i) (i=1, 2, \dots, n; j=0, 1, 2, \dots, h_i-1; f^{(0)}(x) \equiv f(x))$, 如何寻找 $f(x)$ 的一个高阶导数插值公式?

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{h_i-1} a_{ij}(x) f^{(j)}(x_i), \text{ 使 } F^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i),$$

其中 $a_{ij}(x) (i=1, 2, \dots, n; j=0, 1, 2, \dots, h_i-1)$ 为插值函数系数; $|R_{f,s}(x)| = |f(x) - F(x)| = ?$ (插值余项).

问题 5 设 $f(x, y)$ 是在区域 $D(x, y)$ 上一个具有 h 阶偏导数的函数, $h = \max[h_1, \dots, h_n]$, 给定 n 个点 $P(x_i, y_i)$ 及其函数值 $f(x_i, y_i)$ 和各阶偏导数值 $\frac{\partial^j}{\partial x^v \partial y^{j-v}} f(x_i, y_i) [i=1, 2, \dots, n; j=0, 1, 2, \dots, h_i-1; v=0, 1, 2, \dots, j; h_i-1]$ 是 n 个正整数. 如何寻找 $f(x, y)$ 的一个高阶偏导数插值公式

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{h_i-1} \sum_{v=0}^j a_{ijv}(x, y) \frac{\partial^j}{\partial x^v \partial y^{j-v}} f(x_i, y_i)$$

使

$$\frac{\partial^j}{\partial x^v \partial y^{j-v}} F(x_i, y_i) = \frac{\partial^j}{\partial x^v \partial y^{j-v}} f(x_i, y_i),$$

其中

$a_{ijv}(x, y)$ 为插值函数系数; $|R_{f,i}(x, y)| = |f(x, y) - F(x, y)| = ?$
(插值余项)

问题 6 如何考虑问题 3~问题 5 的离散情况即牛顿定理、多中心牛顿定理和高阶差商插值公式?

问题 7 曲线积分 $\int_{C(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz$ 与曲线路径无关, 仅与起点 M^* 、终点 M 有关, 这是大家所熟悉的问题. 那么曲面积分 $\iint_{S(x,y,z)} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$ 与曲面路径无关又是怎样一回事呢? 如何计算平行截面曲线为已知的曲面积分?

问题 8 大家知道 $\int_a^a f(x) dx = 0$. 那么假设 $\lim_{b \rightarrow a} \int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx \neq 0$ 又会发生什么样的情况呢? 这样的假设是否合理, 有什么几何意义与实用价值? 本书将带您进入一个有趣的多维积分世界.

目 录

第一编 积分学

1 积分	3
1.1 一类无理函数积分	3
1.1.1 $\int R[x, (ax+b)^{\frac{1}{2}}, (cx+e)^{\frac{1}{2}}]dx$	3
1.1.2 $\int R[x, (ax^2+bx+c)^{\frac{1}{2}}, (px^2+qx+r)^{\frac{1}{2}}]dx$	6
1.1.3 $\int R[x, (a_1x^2+b_1x+c_1)^{\frac{1}{2}}, (a_2x^2+b_2x+c_2)^{\frac{1}{2}},$ $(a_3x^2+b_3x+c_3)^{\frac{1}{2}}]dx$	11
1.2 积分中值定理的改进	13
1.2.1 积分中值定理的改进	13
1.2.2 积分中值定理的推广	15
1.2.3 重积分中值定理	17
1.2.4 两个不等式的猜测	19
1.3 多重曲积分	21
1.3.1 正交与半正交曲线族	21
1.3.2 多重曲积分	22
1.4 曲面积分与曲面路径无关	24
1.4.1 曲线积分与曲线路径无关的等价条件	24
1.4.2 曲面积分与曲面路径无关	25
1.5 重积分化为定积分	29
1.6 平行截面曲线为已知的曲面积分	30

1.7	格林公式的推广	35
1.8	格拉斯曼法则的解释	42
1.8.1	格拉斯曼法则	42
1.8.2	格拉斯曼法则的解释	43
1.9	第一类闭曲线(曲面)积分	47
1.9.1	公式	47
1.9.2	弧长、面积和体积的计算	48
1.10	重积分的牛顿公式	50
1.10.1	第一类牛顿公式	50
1.10.2	第二类牛顿公式	52
1.11	隐函数曲线(曲面)积分可积的充分条件	53
1.11.1	隐函数曲线积分可积的充分条件	53
1.11.2	隐函数曲面积分可积的充分条件	55
1.12	多维积分	57
1.12.1	段积分和点积分	57
1.12.2	一维积分与拟牛顿公式	61
1.12.3	二维积分	62
1.12.4	三维积分	64
1.12.5	统一公式	66
1.12.6	四维积分	70
2	负导函数	74
2.1	引言	74
2.1.1	基本问题	74
2.1.2	导数公式	74
2.1.3	原函数	75
2.2	可导函数列	76
2.2.1	若干记号的推广	76
2.2.2	可导函数列	80
2.2.3	定理	84

2.2.4	幂函数导数的推广	90
2.3	负导函数的应用	94
2.3.1	基本积分表的证明	94
2.3.2	积分公式的证明	98
2.3.3	不定积分	99
2.3.4	定积分	110
2.3.5	微分方程	115
2.4	负导函数的若干计算方法	116
2.4.1	莱布尼兹公式的推广	116
2.4.2	展开法	121
2.4.3	代数法	122
2.4.4	微商法	125
2.4.5	数学归纳法	128
2.4.6	级数法	128
2.4.7	微分方程法	129
2.4.8	实数的等比级数表示	129

第二编 多中心展开理论

3	多中心泰勒定理	135
3.1	泰勒定理	135
3.1.1	泰勒的生平	135
3.1.2	泰勒多项式	137
3.1.3	泰勒定理	140
3.1.4	泰勒定理的余项	144
3.1.5	泰勒定理的辩证思想	148
3.2	多中心泰勒多项式	149
3.3	多中心罗尔定理	151
3.4	多中心泰勒定理	155

3.5	函数的多中心泰勒展开	161
3.6	二中心泰勒定理	163
3.7	二中心泰勒边值定理	166
3.8	高阶多中心泰勒定理	167
3.9	不同形式的多中心泰勒定理	170
3.10	多一中心泰勒定理	173
3.11	复因式泰勒定理	176
3.12	两个函数积的泰勒定理	180
4	多中心泰勒定理的应用	185
4.1	有理函数的分解	185
4.2	有理函数的高阶导数	188
4.2.1	有理函数的高阶导数	188
4.2.2	有理函数高阶导数值的计算	189
4.2.3	半有理函数高阶导数值的计算	190
4.3	奥斯特洛格拉斯基公式的改进	191
4.4	有理函数积分的公式解	195
4.5	近似值	200
4.6	不等式	202
4.7	高阶导数的插值公式	203
4.8	高阶多中心泰勒定理的应用	212
4.9	最大值与最小值	214
5	多中心牛顿定理	217
5.1	牛顿插值公式	217
5.2	牛顿多项式	218
5.3	牛顿定理	222
5.3.1	牛顿定理	222
5.3.2	泰勒定理与牛顿定理的统一	226
5.4	多中心牛顿多项式	228

5.5	多中心牛顿定理	230
5.6	泰勒-牛顿定理	237
5.7	导数与微商的若干关系	240
6	二元函数泰勒定理	249
6.1	二元函数泰勒多项式	249
6.2	二元函数泰勒插值公式	256
6.2.1	二元函数拉格朗日插值公式	256
6.2.2	低阶偏导数插值公式	261
6.2.3	高阶偏导数插值公式	265
6.2.4	三元函数插值公式	266
6.3	二元函数泰勒定理	268
6.3.1	二元函数一中心泰勒定理	268
6.3.2	二元函数二中心泰勒定理	272
6.3.3	二元函数三中心泰勒定理	278
6.3.4	二元函数多中心泰勒定理	281
6.3.5	复合泰勒定理	283
7	二元函数牛顿定理	285
7.1	二元函数牛顿多项式	285
7.2	二元函数牛顿插值公式	292
7.3	二元函数牛顿定理	294
8	其他类型的泰勒定理	298
8.1	双向泰勒定理	298
8.1.1	双向泰勒定理	298
8.1.2	双向泰勒级数	302
8.1.3	负向泰勒定理	305
8.1.4	双向泰勒定理的其他形式	310
8.1.5	二元函数的双向泰勒定理	313

8.2 有理幂泰勒定理	314
8.2.1 有理阶导数	314
8.2.2 有理幂泰勒定理	318
8.2.3 二中心有理幂泰勒定理	321
8.2.4 拟有理幂函数的积分	325
8.3 复域上的多中心泰勒定理	326
8.4 无穷个中心泰勒定理	333
8.4.1 无穷个中心泰勒定理	333
8.4.2 无穷个中心泰勒级数	336
作者论文目录	345
关于作者	348

第一编

积 分 学

1 积 分

1.1 一类无理函数积分

1.1.1 $\int R[x, (ax+b)^{\frac{1}{2}}, (cx+e)^{\frac{1}{2}}] dx$

如何解形如 1.1.1 的积分?

记 $R(u, v, w)$ 为变量 u, v, w 的有理运算的表示式.

解 1 设 $t = (ax+b)^{\frac{1}{2}}$, 则 $x = \frac{t^2-b}{a} \equiv \varphi_{11}(t)$,

$$(cx+e)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{ct^2}{a} + e - \frac{bc}{a} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(1) 若 $ac > 0$, 取 $\left(\frac{ct^2}{a} + e - \frac{bc}{a} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{2}} t \pm u$,

$$t = \frac{\left(e - u^2 - \frac{bc}{a} \right)}{\pm 2 \left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{2}} u} \equiv \varphi_{12}(u), (cx+e)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{2}} [\varphi_{12}(u) \pm u] \equiv \varphi_{13}(u),$$

$dx = \varphi'_{11}[\varphi_{12}(u)] \varphi'_{12}(u) du \equiv \varphi_{14}(u) du$ 有

$$\begin{aligned} & \int R[x, (ax+b)^{\frac{1}{2}}, (cx+e)^{\frac{1}{2}}] dx \\ &= \int R\{\varphi_{11}[\varphi_{12}(u)], \varphi_{12}(u), \varphi_{13}(u)\} \varphi_{14}(u) du, \end{aligned}$$

其中 $\varphi_{1i}(u), (i=1, 2, 3, 4)$ 是有理函数; $u = \pm \left[(cx+e)^{\frac{1}{2}} - \left(cx + \frac{bc}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$.

(2) 若 $ac < 0$, 则 $e - \frac{bc}{a} > 0$ (否则 $(cx+e)^{\frac{1}{2}}$ 为虚数).

记