高等学校辅导教材

新编运筹学题解

与清华大学版《运筹学》同步配套

内容丰富 · 题型全 · 方法多 · 技巧好

■ 罗荣桂 主编

华中科技大学出版社

高等学校辅导教材

新编运筹学题解

主　编　罗荣桂
编　者　张　鹏　王　莉

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编运筹学题解/罗荣桂 主编
武汉:华中科技大学出版社, 2002年3月
ISBN 7-5609-2653-3

Ⅰ. 新…
Ⅱ. ①罗… ②张… ③王…
Ⅲ. 运筹学-高等学校-解题
Ⅳ. O22

新编运筹学题解 罗荣桂 主编

责任编辑:李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:蔡晓瑚 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉市彩艺广告工作室
印 刷:武汉首壹印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:14.75 字数:358 000
版次:2002年3月第1版 印次:2003年1月第3次印刷 印数:7 001—11 000
ISBN 7-5609-2653-3/O·249 定价:18.80元

内 容 提 要

本书是运筹学教材的辅导书，其内容有线性规划，对偶理论和运输问题，目标规划，整数规划、动态规划，排队论，存贮论，图与网络分析等. 内容丰富，题材广泛，循序渐进，通俗易懂、题型齐全，解法多样，技巧性强，是一本难得的教学参考书.

本书可供在校大学生学习辅导和考研者复习考试之用.

前　言

运筹学是一门广泛应用现有的科学技术知识和数学工具，以定性与定量相结合的方法研究和解决管理、经济和工程技术中提出的实际问题，为决策者选择最优决策提供定量依据的一门决策科学，它是管理类和经济类专业的一门重要的专业基础课.

由胡运权等《运筹学》教材编写组编写、清华大学出版社出版的《运筹学》目前已成为国内流行的普通高等学校管理类和经济类的规划教材，其发行量之大，使用该教材的学校和学生之多，在同类教材中尚属首位．然而，多年来我们在讲授这本教材中，常常听到学生们反映该书习题量太少，且每章的习题没有解答，更主要是此书内容广泛，抓不住要领，渴望能有一本贴近此书的参考书或题解书.其次，每年国内还有一批考管理类专业硕士学位研究生的学生要考这门课，他们迫切希望有一本针对性强的复习参考资料.本书编者根据多年讲授《运筹学》的经验，编写此本题解，力图满足学生们提出的上述要求.

本书的主要特点是：

一、以能力培养为主线，始终贯穿提出问题，分析问题和解决问题的宗旨.我们澄阅和研究运筹学中大量的各类实际问题，精选出相当数量的有启发性、代表性和针对性的思考题与练习题.

二、解决学生们做作业的困难.我们对清华版本的《运筹学》(修订版)中有关章节的每个习题都做了较详细的解答.通过这些习题解答，使学生们能举一反三，引导和促使学生的建模、分析和解决实际问题的能力.

三、书中每章首先是“内容提要”.通过提要将每章的重点、难点和公式概括在一起，使学生们感到书越读越薄，越读越精，无疑将起到纲举目张、立竿见影的效果.

全书共十一章，每章分为“内容提要”、“习题及解答”、“思考题与练习题”等三部分；最后，对“练习题”附上了答案. 这主要说明的是，虽然我们在“习题及解答”部分中对清华大学出版社出版的《运筹学》中的有关习题都一一作了较详细的解答，但希望读者特别是正在学习这门功课的学生们应该先独立思考并自己解答，然后才与“题解”对照，做到理解基本概念，熟悉建模思路，明确求解步骤、掌握解题方法. 只有这样，才能真正学习和掌握好这门课程. 如果只是为了省事而照抄题解，则可能导致相反的效果.

限于书的篇幅，更鉴于目前国内大多数工科院校在专、本科的《运筹学》教学中没有讲到非线性规划、对策论、决策论和多目标决策等四部分内容；或者有的学校用别的课程取代了上述有关内容，所以此“题解”也就没有包含上述几部分. 这也许是我们的疏漏，不过我们认为，这样处理或许是更恰当的.

参加本书编写工作的有罗荣桂、张鹏、王莉和韩晓民. 另外，丁正平、江涛、原海英、胡雅敏、方澜等同志为此书的习题资料搜集，部分解答和整理做了一些工作，并提出了一些宝贵意见. 华中科技大学出版社的有关同志为本书的出版付出了辛勤的劳动，对此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请读者批评指正.

编 者

2001 年 4 月

目　　录

第一章　线性规划及单纯形法

一、内 容 提 要

1. 线性规划及数学模型

(1) 线性规划

线性规划主要研究以下两类问题：一类是给定一定的资源，研究如何运用这些资源更好地完成任务；另一类问题是如何统筹安排，尽量以最少的资源去完成既定的任务. 事实上这是一个问题的两个方面.

线性规划是对一个线性的目标函数在若干个线性约束条件下进行的最优化处理，即在一定的约束条件下，对一定的目标函数求得最好的结果.

(2) 线性规划模型的基本特征

1° 每一个问题都用一组决策变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$来表示某一方案；其值代表一个具体方案，一般这些变量的取值是非负的，即

$$x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

2° 每个问题都存在一组约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示.

3° 每个问题都有一个明确的目标，此目标是以一组决策变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的线性函数来表示；按问题的不同，可以使目标函数达到极大值，也可以使其达到极小值.

线性规划模型的一般形式为

$$\max(\text{或 }\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n;$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2; \\ \cdots \\ a_{m_1}x_1+a_{m_2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_m; \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

2. 线性规划的标准型及如何化为标准型

(1) 线性规划的标准型

1° 繁写形式

$$\max Z = c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1.1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n = b_2; \quad (1.2) \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n = b_m; \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0. \quad (1.3) \end{cases}$$

2° 矩阵形式或向量形式

$$\max Z = \boldsymbol{CX}; \tag{1.1$'$}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}; \\ \boldsymbol{X}\geqslant \boldsymbol{0}; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i; i=1,2,\cdots,m; \quad (1.2)' \\ \boldsymbol{X}\geqslant \boldsymbol{0}. \quad (1.3)' \end{cases}$$

(2) 任一模型如何化为标准型

1° 若原模型要求目标函数实现最小化：

$$\min \boldsymbol{CX} = -\max(-\boldsymbol{CX}).$$

2° 若原模型中约束条件为不等式

① 若原约束条件左端 $\leqslant$ 右端，则化为

左端 + 松驰变量 = 右端(松驰变量 $\geqslant 0$)；

② 若原约束条件左端 $\geqslant$ 右端，则化为

左端 − 剩余变量 = 右端(剩余变量 $\geqslant 0$)；

3° 若原模型中决策变量 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为自由变量，则在标准

型中.

$$x_k = x'_k - x''_k \quad (\text{其中 } x'_k, x''_k \geqslant 0);$$

4° 若原模型中某决策变量 $x_r(1 \leqslant r \leqslant n)$ 有上下界，即 $x_r \geqslant u$ 或 $x_r \leqslant v$，则在标准型中，令

$$x'_r = x_r - u, \text{即用 } x'_r + u \text{ 取代 } x_r, x'_r \geqslant 0,$$

或 $$x'_r = v - x_r, \text{即用 } v - x'_r \text{ 取代 } x_r, x'_r \geqslant 0.$$

3. 线性规划问题的解及其几何意义

(1) 线性规划的解

1° 可行解：凡满足约束条件(1.2)和(1.3)的解

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

称为可行解；

2° 最优解：满足(1.1)式的可行解，即使目标函数达到最大值的可行解称为最优解；

3° 基：已知系数矩阵 $A_{m\times n}$(不妨假定 $m<n$)的秩为 m，若 B 是 A 中一个 m 阶非奇异子矩阵(即 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$)，则称 B 为线性规划的一个基. 显然，$\boldsymbol{B}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 中 m 个线性无关的系数列向量组成的；

4° 基向量、非基向量：基 $\boldsymbol{B}$ 中的列向量称为基向量，基 $\boldsymbol{B}$ 共有 m 个列向量；$\boldsymbol{B}$ 以外的 $\boldsymbol{A}$ 中其余 $n-m$ 个列向量称为非基向量，A 中共有 $n-m$ 个非基向量；

5° 基变量与非基变量：与基向量 $\boldsymbol{P}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{mi})^{\mathrm{T}}$ 对应的变量 x_i 称为基变量，基变量共 m 个；与非基向量 $\boldsymbol{P}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}}$ 相对应的变量 x_j 称为非基变量，非基变量共有$(n-m)$个；

6° 基本解与基本可行解：令所有非基变量为零，求出的满足约束条件(1.2)的解称为基本解；而又满足约束条件(1.3)的基本解就称为基本可行解. 不满足(1.3)的基本解就是非可行解；

7° 最优基本可行解：满足(1.1)式的基本可行解称为最优基本可行解；

8° 退化解：若在基本解(或基本可行解或最优化基本可行解)

中出现基变量为零的情况，则称为退化解.

(2) 线性规划的解的几何意义

1° 若线性规划问题有可行解，其所有可行解构成的区域称为可行域，则此可行域.

$$D = \{X \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i; i = 1,2,\cdots,m; x_j \geqslant 0\}. \quad (1.4)$$

必是一个凸集.

2° 线性规划问题的基本可行解与可行域 D 的顶点一一对应.

3° 如果线性规划问题有有限的最优解，则其目标函数的最优值一定可以在可行域的顶点上达到.

线性规划问题的基的数目不超过 C_n^m 个，因此其基本解或基本可行解也不超过 C_n^m 个. 相对应地可行域的顶点最多也是 C_n^m 个. 虽然不是顶点也可能是最优解，但我们不去管它，只从顶点中找最优解就行了. 即线性规划问题的求解可以归结为求最优基本可行解.

4. 线性规划的求解方法

(1) 图解法：图解法简单直观，求解线性规划问题时不需将数学模型化为标准型，可以直接在平面上作图，但此法只适用于二维问题，故有一定局限性.

用图解法求解，有助于了解线性规划问题求解的基本原理. 它可以直接看出线性规划问题解的几种情况：

1° 有唯一最优解；

2° 有无穷多组最优解；

3° 无可行解；

4° 无有限最优解(即为无界解).

(2) 单纯形法

丹捷格(G. B. Dantjig) 提出的单纯形法的基本思路是从可行域中的某个基本可行解(一个顶点) 开始，转换到另一个基本可行解(顶点)，每次转换要使新的基本可行解对应的目标函数比前一次的要更优，直到目标函数达到最优就得到了问题的最优解.

单纯形法的基本步骤如下：

1° 找出初始可行基，确定初始基本可行解，建立初始单纯形表.

2° 检验此基本可行解是否为最优解. 即检验各非基变量 x_j 的检验数 σ_j，若所有 $\sigma_j \leqslant 0(j = m+1,\cdots,n)$ 则已经得到最优解，计算停止；否则，转下一步.

3° 在 $\sigma_j > 0(j = m+1,\cdots,n)$ 中若有某个检验数 σ_k 对应的非基变量 x_k 的系数列向量 $\boldsymbol{P}_k = (a_{1k},a_{2k},\cdots,a_{nk})^{\mathrm{T}} \leqslant 0$，则此问题为无界解，停止计算；否则转下一步.

4° 根据 $\max(\sigma_j > 0) = \sigma_k$，确定非基变量 x_k 为换入变量；再根据 θ 法则

$$\theta = \min_i \left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0 \right) = \frac{b_l}{a_{lk}} \qquad (1.5)$$

确定基变量 x_l 为换出变量.

5° 实施枢轴运算，即以 a_{lk} 为主元素进行枢轴运算(亦即进行矩阵的行变换)，使 $\boldsymbol{P}_k$ 变换为第 l 行的元素为 1，其余的元素为 0；并将 X_B 列中的 x_l 换为 x_k，从而得新的单纯形表；重复 2° ～ 5°，直到终止.

5. 初始基本可行解的确定与解的判别

(1) 初始基本可行解的确定方法

1° 直接从 $\boldsymbol{A}$ 中观察找出一个初始可行基.

2° 当所有约束条件(1.2) 是“$\leqslant$”形式的不等式时，利用化标准型的方法，将每个约束条件的左端加入一个松弛变量，这 m 个松弛变量就成为基变量，而对应的 m 个向量组成的单位矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是线性规划问题的一个可行基.

3° 当所有约束条件是“$\geqslant$”形式的不等式和等式约束的情况时，采用人造基的方法. 即对不等式约束，其左端减去一个非负的剩余变量后，再加上一个非负的人工变量；对于等式约束，左端再

加上一个非负的人工变量，则这些人工变量就成为基变量，对应的列向量组成的单位矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就是一个可行基.

(2) 最优性检验与解的判别

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i' + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}' \right) x_j \\
&= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j \cdot x_j.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

1° 最优解的判别：若 $x^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为对应于基 B 的一个基本可行解，且对所有的 $j = m+1, \cdots, n$ 有 $\sigma_j \leqslant 0$，则 $x^{(0)}$ 为最优解.

2° 无穷多最优解的判别：若 $x^{(0)} = (b'_1, b'_2, \cdots, b'_m, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 为一个基本可行解，对一切 $j = m+1, \cdots, n$，有 $\sigma_j \leqslant 0$，又存在某一非基变量的检验数 $\sigma_{m+k} = 0$，则此线性规划问题有无穷多最优解.

3° 无界解的判别：若 $x^{(0)}$ 为一基本可行解，其中有某个非基变量 x_{m+k} 的检验数 $\sigma_{m+k} > 0$，且有 $P'_{m+k} = (a'_{1,m+k}, \cdots, a'_{m,m+k})^{\mathrm{T}} \leqslant 0$，则该线性规划问题具有无界解(或称无最优解).

6. 人工变量法

当约束条件(1.2)中每一个加入人工变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 时，得到

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad = b_1; & (1.7)\\
\qquad\qquad\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \quad + \quad x_{n+m} = b_m; \\
x_1, \cdots, x_n \geqslant 0; x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0. & (1.8)
\end{cases}
$$

此时人工变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 为 m 个基变量，并得到一个 m 阶单位矩阵 B，构成一个可行基. 因为人工变量是人为地加入等式约束中的基变量，它不同于问题中的决策变量和松弛变量，所以要求它们最终都为零以保持原约束条件成立. 即要求它们最终从基变量中全部退出；若经过基的变换，在基变量中不再含人工变

量，则表示问题有解，否则，若最后在基中还含有一个或几个人工变量，则表示原问题无可行解.

引入人工变量后用单纯形法求解线性规划，问题有以下两种方法.

(1) 大 M 法

因为我们希望在约束条件中加入人工变量后对目标函数取值不受影响，因此只有在迭代过程中将人工变量换出去，使之成为非基变量. 为此，假定人工变量在目标函数中的系数取为 $-M$(其中 M 为充分大的正数). 这样，显然只要在基变量中还存在人工变量，目标函数就不可能实现最大化. 类似地，在目标函数求最小值时，取人工变量的价值系数为 M

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \cdots - Mx_{n+m} \tag{1.9}$$

或
$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \cdots + Mx_{n+m}. \tag{1.10}$$

(2) 两阶段法

此方法是将加入人工变量后的线性规划问题分成两个阶段来求解.

第一阶段：其目的是为原问题求初始基本可行解. 为此，对于求极大化(或极小化)的线性规划问题，建立一个新的人工变量的目标函数 —— 人工变量的系数均为 -1 或($+1$)，对新的问题：

$$\max w = -x_{n+1} - x_{n+2} - \cdots - x_{n+m}$$

或
$$\min w = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}; \tag{1.11}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_1, \cdots, x_n \geqslant 0, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m} \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

用单纯形法求解. 若 $w = 0$，即所有的人工变量都变换为非基变量，说明原问题已得到了初始基本可行解；反之，若目标函数 w

的值为负(或为正),则人工变量中至少有一个为正,这表示原问题无可行解,应停止计算.

第二阶段:将第一阶段求得的基本可行解对原问题的目标函数进行优化,即将目标函数换成原目标函数,以第一阶段得到的最终单纯形表除去人工变量的列后作为第二阶段计算的初始表,继续用单纯形法以求得问题的最优解.

7. 单纯形法解线性规划中可能遇到的问题和解决的方法

单纯形法计算中用 θ 规则确定换出变量时,可能出现两个以上相同的最小比值,因而在下一次迭代中就有一个或几个基变量等于零,即出现退化解.此时,即使原问题存在最优解,也可能产生计算过程的循环现象,永远达不到最优解.为避免循环产生,常用摄动法和勃兰特(Bland)法.其中勃兰特提出了如下两个简单的法则以避免出现循环.

(1) 在极大化问题中,若有几个检验数 $c_j - z_j > 0$,则选其中下标最小者的非基变量 x_k 作为换入变量,即

$$k = \min(j \mid c_j - z_j > 0).$$

(2) 在极大化问题中,当按 θ 法则计算存在两个或两个以上的最小比值时,则应选其中下标最小的基变量 x_l 为换出变量,即

$$l = \min\left\{i \,\middle|\, \theta = \min_i\left(\frac{b'_i}{a'_{ik}} \,\middle|\, a_{ik} > 0\right)\right\}. \tag{1.13}$$

8. 检验数的几种表示形式

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^{m} c_i b'_i + \sum_{j=m+1}^{n}\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij}\right) x_j \\ &= Z_0 + \sum_{j=m+1}^{n}(c_j - z_j)x_j, \end{aligned}$$

或 (1.14)

$$Z = \sum_{i=1}^{m} c_i b'_i - \sum_{j=m+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a'_{ij} - c_j \right) x_j$$

$$= Z_0 - \sum_{j=m+1}^{n} (z_j - c_j) x_j. \tag{1.15}$$

(1) 当要求目标函数实现最大化时，若令 $\sigma_j = c_j - z_j$ 就得出 $\sigma_j \leqslant 0, (j = 1,2,\cdots,n)$ 的判别准则；若令 $\sigma_j = z_j - c_j$ 就得出 $\sigma_j \geqslant 0 (j = 1,2,\cdots,n)$ 的判别准则.

(2) 当要求目标函数实现最小化时，若令 $\sigma_j = c_j - z_j$，就得到 $\sigma_j \geqslant 0 (j = 1,2,\cdots,n)$ 的判别准则；

若令 $\sigma_j = z_j - c_j$，就得到以 $\sigma_j \leqslant 0 (j = 1,2,\cdots,n)$ 的判别准则.

9. 一个实际问题要建立线性规划模型需具备的条件

(1) 要求该问题的目标函数能用数值指标反映，并能表示成线性函数；

(2) 该问题存在许多个方案；

(3) 要求达到的目标是在一定的约束条件下实现的，而这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表示.

二、习 题 解 答

1.1 用图解法求解下列线性规划问题；并指出问题是具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解？

$$\max Z = x_1 + 3x_2;$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leqslant 50, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ x_2 \leqslant 4, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$