

数学奥林匹克 初级读本(下)

四川省数学会 编
魏有德, 主编

M·O



四川大学出版社

责任编辑：谭同余

封面设计：蒋仲文

数学奥林匹克初级读本（下册）

四川省数学学会等编

主 编 魏有德

副主编 张仲辉 税德仲 张忠良

四川大学出版社出版发行 （成都四川大学内）

四川省新华书店经销 郫县犀浦印刷厂印刷

开本：787×1092mm 1/32 印张：5.38 字数：100千

1990年12月第一版

1990年12月第1次印刷

印数：1—30000册

ISBN 7-5614-0367-4/O·54 定价：1.80元

序 言

去年由省数学会和《中学生数理化》编辑部编写的《初中数学奥林匹克读本》出版时，我就希望有更多总结数学普及工作实践的好读本能陆续问世，现在摆在读者面前的这本《数学奥林匹克初级读本》就是相继问世的又一好读本。

近年来，全国各地对小学生的智力开发都比较重视，相继成立了不少的小学数学业余奥林匹克学校。我省更是后起直追，广大的小学数学普及工作者，在教育行政部门的支持下，利用课余时间为学生学有余力的小学数学爱好者开创了新的求知园地，学校的数学兴趣小组、各级的小学数学业余奥校也相继成立很多。他们在国际、国内的小学数学竞赛中已初露锋芒。在中国数学会普委会举办的全国小学数学竞赛中，在国际性的美国长岛邀请赛中都获得好成绩。本书正是在小学数学业余奥校第一线工作的教师们的经验总结。

这本书在编写上有其突出的特点。一方面，根据小学生的知识水平和思维能力，采取了起点较低、分层次循序渐进、螺旋上升逐步拓宽加深知识的办法；另一方面，针对小学生心理特征，从生动具体的例子出发，循循善诱地介绍了小学数学奥林匹克的基本内容，兴趣盎然。因此，小学四至六年级的学生，只要坚持不懈地读下去，就可以掌握其大部份内容。如果有教师、家长的指导掌握其全部内容也是不难的。该读本不失为中高年级小学生较好的数学课外读物，同

时也可作为小学数学教师开展第二课堂的数学参考资料。

最后，我应该感谢河南教育社《中学生数理化》（初中版）及《小学生学习报》编辑部对数学普及工作的支持及对本书出版的有力合作，感谢四川大学出版社对我省数学普及工作及本书出版的大力支持与合作。

国家教委科技委数学组成员 **刘应明**
四川省数学学会理事长

一九九〇年十月七日于四川大学

前 言

为了实现我国二十一世纪成为“数学大国”，为了培养杰出的中国数学家、科学家和四化建设人才，提高全民族的文化素质，从小抓起，搞好数学启蒙教育是必要的。为给学有余力的小学数学爱好者提供更适合的学习资料，我们根据小学数学教学大纲、教材以及国内外开展小学数学竞赛的识知要求编写了这一套书。

编写的基本原则是：上册内容从四年级下期起，基础知识基本上与课内教材同步，适当增加该年级课外可接受的竞赛基础知识，下册在上册基础上，以专题为主，适当加深、拓宽，逐步达到小学数学竞赛较高知识要求的水平。

为了实现上述原则，在具体编写过程中，考虑到知识的系统性，上册我们采取了四大“知识块”（实为三大块），即四大章的安排法：数、应用题、图形和分数小数。初次使用时，请小学生读者按四年级（下）、五年级、六年级分选出各年级同步内容来学习，而不要依次读下去。

我们建议，上册：

四年级（下）读一、二、三章的一、二讲；

五年级读一章的三、四、五讲，二章的三、四讲，三章的三、四、五讲（个别处略有提前，完全自学者也可放在六年级学）；

六年级读第四章

下册：

五年级可选读一些章（如五、六章等），更多的是六年级学生的学习材料。

本书的作者，除少数几位河南教育社〈小学生学习报〉的编辑外，都是我省各地市的小学数学奥校教练员、小学数学教师和教研员。这套书是他们多年从事数学课外活动和奥校教学的经验总结。我们相信她对小学数学教师指导课外活动、对小学数学奥校教学、对家长辅导子女都会起到较好的参考作用。其实，对未接受小学奥校系统培训的初一学生，也不失为一本较好的课外读物。但由于水平有限，经验不足，时间仓促，不妥甚至错误之处一定不少，恳请读者提出宝贵意见，更欢迎小读者的意见和建议，以利于今后的修改。

衷心感谢四川大学出版社的领导和编辑，由于他们的热心支持，这套书才得以早日与读者见面。

魏有德

一九九〇年十二月于四川大学

目 录

第五章	数字谜(二)·····	刘绍宽(1)
第六章	包含与排除·····	魏常俊(12)
第七章	整除(二)·····	李明进(21)
第八章	筛选与枚举·····	范永刚 冯存平(30)
第九章	你会制作“数学抽屉”吗?·····	朱志嘉(42)
第十章	有趣的逻辑推理与二人对策·····	·····周先忱 孙耀学(53)
第十一章	排列与组合·····	钟 波(68)
第十二章	浅谈统筹规划的应用·····	张忠良(79)
第十三章	计数制·····	师广智(94)
第十四章	奇偶性分析·····	师广智(100)
第十五章	智解难题诸法·····	税德仲 张仲辉(112)
附:	练习题答案、提示或略解·····	(150)

附:上册目录

第一章 数——奥妙无穷

第一讲	速算与巧算·····	邹明国
第二讲	数字谜(一)·····	邹明国
第三讲	整数 ABC ·····	税德仲
第四讲	整除(一)·····	张仲辉

第五讲	数列(一)·····	胡开勇
第二章 应用题——妙趣横生		
第一讲	整数应用题·····	王仕尧
第二讲	整数应用题解法种种·····	高幼年
第三讲	典型应用题·····	王世太 柏宏成 张忠国
第四讲	方程·····	宋毓文
第三章 图形——千姿百态		
第一讲	点、线、角·····	李素芬
第二讲	平面图形(一)·····	张光荣
第三讲	平面图形(二)·····	姚长淮
第四讲	立体图形·····	骆小柳
第五讲	几何图形问题的补遗——再谈图形的 计数、图形的剪拼、一笔画问题·····	张培根 张世蓉
第四章 分数、小数		
第一讲	分数与小数巧算·····	李文玲
第二讲	分数应用题·····	汤仕东
第三讲	数列(二)·····	张锦清
附: 练习题答案、提示或略解		

第五章 数字谜 (二)

这一章，我们将进一步学习乘、除式的数字谜问题，使同学们在前面学习的基础上，不断提高解数字谜问题的分析判断能力和逻辑推理能力。

一、乘法

例1 在下面右边算式的□内，填上一个合适的数字，使算式成立。

分析 为叙述方便，不妨设：

$$A = \square 1 \square,$$

$$B = 3 \square 2,$$

$$C = \square 3 \square,$$

$$D = 3 \square 2 \square,$$

$$E = \square 2 \square 5,$$

$$F = 1 \square 8 \square 3 0.$$

$$\begin{array}{r} \square 1 \square \leftarrow A \\ \times 3 \square 2 \leftarrow B \\ \hline \square 3 \square \leftarrow C \\ 3 \square 2 \square \leftarrow D \\ \square 2 \square 5 \leftarrow E \\ \hline 1 \square 8 \square 3 0 \leftarrow F \end{array}$$

由 F 的末位数是0和 C 的十位数字是3，可知 A 的末位数是5， C 的末位数为0。

由 F 的十位数字是3，可知 D 的末位数字是0。

由 F 的首位数是1，可知 E 的首位数是1。

由 E 是 $3 \times A$ 的积，可知 E 的十位数字是4， A 的首位数是4。

于是, 可知 C 的首位数是 8, F 的百位数字是 5; D 的百位数字是 3; F 的万位数字是 5.

最后, 由 $\overline{415} \times \square = 3\overline{320}$, 确定 B 的十位数字只能是 8.

根据以上分析, 每个 $\square$ 内应填的数字就都知道了.

例 2 已知两个三位数相乘 $\overline{abc} \times \overline{bac}$ 的竖式, 求 a, b, c (a, b, c 表示不同的数字).

分析与解 由 $\overline{abc} \times c = \text{****}$ 是四位数, 可知 $c \neq 1$.

$\overline{abc} \times a = \text{***}a$ 是三位数, 所以 a 最多取 3, 而 $c \times a$ 的末位数是 a , 因此 $a = 2, c = 6$.

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \\ \times b \ a \ c \\ \hline *** * \\ ** a \\ \hline *** b \\ \hline **** * \end{array}$$

由 $\overline{abc} \times b = \overline{2b6} \times b = \text{***}b$, c, b 表示不同数字, $b \neq 6$, 要使 $6 \times b$ 的末位数为 b , 且 $\overline{abc} \times b$ 得四位数, 因此 $b = 8$. 经验证 $a = 2, b = 8, c = 6$ 符合要求.

例 3 根据下面乘法算式, 你能很快地填写出被乘数和乘数吗?

分析与解 怎样很快地写出被乘数和乘数? 我们看到被乘数 $\square\square\square$ 是 1578 和 2367 的公约数, 因此用求公约数的方法, 就可以迅速地找出被乘数和乘数.

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ \times \square\square \\ \hline 2367 \\ 1578 \\ \hline 18147 \end{array}$$

用短除的方法, 得右边的式子, 于是被乘数是 $263 \times 3 = 789$, 乘数是 23, 或者被乘数 263, 乘数是 69, 即 789×23 或 263×69 .

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 1578 \quad 2367} \\ \underline{1578} \quad \underline{2367} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 263 \overline{) 1578 \quad 2367} \\ \underline{526} \quad \underline{789} \\ 2 \quad 3 \end{array}$$

注：也可把积分解因式 $18147 = 3 \times 23 \times 263$ 所以， 263×69 或 789×23 。

例4 下面给出的算式是 $\overline{ABCD} \times \overline{ABCD}$ 的乘法算式，其中 A 、 B 、 C 、 D 的每一个字母代表一个数字，根据这个算式，请你确定出 $\overline{ABCD}$ 所表示的四位数吗？

分析 因为 $\overline{ABCD} \times D$ 的积的个位数字是 D ，故 D 只能是1、5、6三个数。但 $\overline{ABCD} \times D = \text{*****}$ 是五位数，因而 $D \neq 1$ 。

$$\begin{array}{r} \overline{ABCD} \\ \times \overline{ABCD} \\ \hline \text{*****} \\ \text{*****} \\ \text{*****} \\ \text{*****} \\ \hline \text{*****} \overline{ABCD} \end{array}$$

如果 $D = 5$ ，由于末位数是5的数的平方，其末两位数是25，于是 C 只能是2。而末两位数是25的数的平方，其末三位数是625，所以 $B = 6$ 。又末三位数是625的数的平方，其末四位数是0625，这样 $A = 0$ ，但 $A = 0$ 不合题意，所以 $D \neq 5$ 。

如果 $D = 6$ ，则由下面左边的算式，可知

$$6C + 3 + 6C = C + 10N \quad (N \text{ 为自然数})$$

$$\text{故 } 11C + 3 = 10N, \text{ 因而 } C = 7.$$

$\begin{array}{r} C\ 6 \\ C\ 6 \\ \hline *6 \\ * \\ \hline C\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} B\ 7\ 6 \\ B\ 7\ 6 \\ \hline *5\ 6 \\ 3\ 2 \\ * \\ \hline B\ 7\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} A\ 3\ 7\ 6 \\ A\ 3\ 7\ 6 \\ \hline *2\ 5\ 6 \\ 6\ 3\ 2 \\ 2\ 8 \\ * \\ \hline A\ 3\ 7\ 6 \end{array}$
--	--	---

B 表示的数字是几？可由上面中间算式

$$6B + 4 + 3 + 6B = B + 10N \quad (N \text{ 为自然数})$$

求得，即 $11B + 7 = 10N$ ，故 $B = 3$ 。

同样, A 表示的数字, 可由上页右边算式

$$6A + 2 + 6 + 2 + 6A + 1 = A + 10N \quad (N \text{ 为自然数})$$

求得, 即 $11A + 11 = 10N$, $A = 9$.

于是, $\overline{ABCD} = 9376$

例 5 下面算式中的偶字代表 0、2、4、6、8 中的一个数, 奇字代表 1、3、5、7、9 中的一个数。不同位置的奇和偶可能是相同的数, 也可能是不相同的数, 试求左边算式中每个奇、偶是什么数时, 算式成立。

$$\begin{array}{r} \text{偶偶奇} \\ \times \quad \text{奇奇} \\ \hline \text{偶奇偶奇} \\ \text{偶奇奇} \\ \hline \text{奇奇奇奇奇} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2ab \\ \times \quad 3c \\ \hline \text{偶奇偶奇} \\ \text{偶奇奇} \\ \hline \text{奇奇奇奇奇} \end{array}$$

分析 因为被乘数是偶偶奇, 它和算式中的第二个积偶奇奇排列不同, 所以乘数的十位数字奇不能是 1, 又因为第二个积偶奇奇是三位数, 所以被乘数百位上的偶只能是 2, 乘数十位上的奇只能是 3。

为叙述方便, 我们用 a 、 b 分别表示被乘数十位上的偶、个位上的奇, 用 c 表示乘数中个位上的奇, 如上面右边算式所示。

由于 $a \times 3$ 的积的个位数应是偶数, 而算式中却是奇数, 这意味着 $b \times 3$ 的积有进位, 而且进位数必须是奇数, 因此 b 只能是 5。这时算式变为右边上式。

$$\begin{array}{r} 2a5 \\ \times \quad 3c \\ \hline \text{偶奇偶奇} \\ \text{偶奇5} \\ \hline \text{奇奇奇奇奇} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 285 \\ \times \quad 39 \\ \hline 2565 \\ 855 \\ \hline 11115 \end{array}$$

因为 $\overline{2a5} \times c$ 的积应为四位数 $\overline{\text{偶奇偶奇}}$ ，故 $c=9$ 。

又因为 a 是 2、4、6 时，都不合题意，故 $a=8$ 。

解 由以上分析，可知被乘数偶偶奇应为 285，乘数奇奇应为 39，其所求算式如上一页右边下式所示。

二、除 法

例 6 已知四位数 $A = \overline{6***8}$ 能被 236 整除，则 A 除以 236 的商是_____。

分析与解 此题可以看成是一道除法数字谜问题。容易判定 $\overline{6***8} \div 236$ 的商一定是二位数。这是因为 $236 \times 9 = 2124 \div \overline{6***8}$ 。因此，如果用除法竖式表示 $\overline{6***8} \div 236$ ，就是右边那种形式。

由 $236 \times 3 = 708$ ，易知商的首位数只能是 2。因为 $***8$ 是末位数为 8 的四位数，所以商的个位数字只能是 8。

于是， $\overline{6***8}$ 除以 236 的商是 28。

例 7 在右边除法算式的各□内，各填上一个合适的数，使算式成立。

分析 因为 $\square\square \times \square = \square 77$ ，所以商的百位数字可能是 3 或 9。若商的百位数字是 3，则除数的个位数字是 9，十位数字是 5，但

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{**} \\
 236 \overline{) 6***8} \\
 \underline{***} \\
 ***8 \\
 \underline{***8} \\
 0
 \end{array} \\
 \begin{array}{r}
 \square 7 \square \\
 \square\square \overline{) \square\square\square\square\square\square} \\
 \underline{\square 7 7} \\
 \square 7 \square \\
 \underline{\square 7 \square} \\
 \square\square \\
 \underline{\square\square} \\
 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$59 \times 7 = 413$ 不符合 $\square\square \times 7 = \square 7 \square$ ，因此商的百位数字应是 9，除数的个位数字是 3，十位数字是 5。

由 $53 \times \square = \square\square$ ，可以确定商的个位数字只能是 1。除数和商都知道了，其余 $\square$ 内的数字便可一一填出来了。

例 8 下列除法算式里，只知道商中的一个数字 8，并且连除数是几位数都不知道，请你把被除数、除数和商都求出来。

分析与解 观察算式可以看出，商的十位、千位、百万位数字都是 0。（为什么？）

本题的“突破口”是从 $? \times 8 = \square\square$ 是两位数，可以确定除数的最大值是 12。与此同时还可以判定：商中凡与除数的乘积是三位数的数字只能是 9，因此除数一定是 12，商是 90990809。

至此，除数和商都知道了，被除数就是 1091889708。

例 9 在上列右边除法算式的每个 * 处，填上一个合适的数字，使算式成立。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccccccc}
 * & * & * & * & * & 8 & * & * \\
 \hline
 * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 * & * & * & & & & & & & \\
 \hline
 * & * & * & & & & & & & \\
 * & * & * & & & & & & & \\
 \hline
 * & * & * & & & & & & & \\
 * & * & * & & & & & & & \\
 \hline
 & * & * & & & & & & & \\
 & * & * & & & & & & & \\
 \hline
 & & * & * & * & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & \\
 \hline
 & & & * & * & * & & & & \\
 & & & * & * & * & & & & \\
 \hline
 & & & & 0 & & & & &
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccccccc}
 * & * & * & * & * & 7 & * & * & * & * \\
 \hline
 * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * & & & & & \\
 \hline
 * & * & * & * & * & & & & & \\
 * & * & * & * & * & & & & & \\
 \hline
 * & * & * & * & * & & & & & \\
 * & * & * & * & * & & & & & \\
 \hline
 & * & * & * & * & & & & & \\
 & * & * & * & * & & & & & \\
 \hline
 & & & 0 & & & & & &
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

分析 算式中只知道一个数7，怎样填补其余的数字呢？我们的思路是从算式中每一层的位数，确定商的各个数位上的数字，商确定后再估算除数。

从算式最后一层的位数知：商的十位数字是0。

为叙述方便，我们用①②③④表示算式中间两层的各行表示的数。

因为① - ② = ***，③ - ④ = **，且③ > ①，所以④的三位数大于②的三位数。因此，商的百位数字应大于7。

又除数与商的首位和末位数字之积都是四位数，于是可确定商的首位和末位数字一定都大于商的百位数字。这表明商的百位数字是8，商的首位和末位数字都是9，至此商是97809。

因为除数 *** × 8 不能大于 999，所以除数不能大于 124。由于⑤的前两位数不能大于 11，并且③大于 1000，因此④大于 988，而 $123 \times 8 = 984$ ，所以除数一定大于 123，于是除数只能是 124。

解 由上述分析，知被除数 = $97809 \times 124 = 12128316$ 。有了被除数、除数和商，在各个*处填上一个合适的数就是容易的事了。

通过分析和解答以上各题，我们可以得到这样的启示：解除法算式的数字谜问题，关键是确定商和除数，一般的思路方法是先确定商和除数的首位数字，然后根据算式各层的差决定除数。

有时，我们也要根据题目的各自特点，采用另外一些方法。请看下例。

例10 下面除法算式中，画“□”的表示被擦掉的数字，请你把被擦掉的数字再补出来，使算式成立并使商最大。

分析 我们把除数□□□看成一个整体。设除数□□□ = x ，由算式 $8 \times \square\square\square = \square\square\square$ ，知 $8x < 900$ ，故 $x < 112.5$ 。同理，知商的个位数字是9、百位数字是8。这样商为889。因为 $9x > 999$ ，所以 $x > 111$ 。由于 x 是三位整数，综合两个估算 $x < 112.5$ 和 $x > 111$ ，知 $x = 112$ 。

$$\begin{array}{r}
 \square 8 \square \\
 \square \square \square \overline{) \square \square \square \square \square} \\
 \underline{\square \square \square} \\
 \square \square \square \\
 \underline{\square \square \square} \\
 \square \square \square \square \\
 \underline{\square \square \square \square} \\
 0
 \end{array}$$

解 由上面分析知，被除数 = $889 \times 112 = 99568$ ，由此便可把被擦掉的数字一一补出来。

*商的百位数可是1,2,3,4,5,6,7,8,由于题目要求“商最大”，则取8。

练习 5

1. 在下列各题中的每一个□内，填上一个合适的数字，使算式成立。

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \square\square\square 7 \\
 \times \quad \square\square\square \\
 \hline
 \square\square\square\square 6 \\
 \square\square 2 0 3 \\
 \square 3 7 \square\square \\
 \hline
 \square\square\square\square\square\square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad \square\square\square \\
 \square 6 \square \overline{) \square\square\square\square 6} \\
 \underline{\square\square\square} \\
 \square\square\square \\
 \underline{\square\square\square} \\
 \square\square\square \square \\
 \underline{\square\square\square \square} \\
 0
 \end{array}$$

2. 下列各题中的每一个字母都代表一个数字，不同的字母代表不同的数字，试求它们各代表什么数字时，算式成立。

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 A B C \\
 \times A C D \\
 \hline
 E A D \\
 C E F \\
 A B C \\
 \hline
 A E E G D
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (2) \quad \begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 G A D \\
 FG \overline{) A B C D E} \\
 \underline{A C G} \\
 H H D \\
 \underline{I A} \\
 A J E \\
 A J E \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

3. 下面算式中的每一个□内，只许填质数2、3、5、7中的一个数字，试问怎样填才能使算式成立。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \square \square \square \\
 \times \quad \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \\
 \square \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \square
 \end{array}
 \end{array}$$

4. 在下列各竖式中的□内填上一个合适的数字，使竖式成立：

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \begin{array}{r}
 2 \square \square \\
 \times \quad \square \square \\
 \hline
 \square \square 6 \square \\
 2 \square \square \\
 \hline
 \square \square \square 7
 \end{array}
 \quad (2) \quad \begin{array}{r}
 \square 2 \square \square \\
 \times \quad \square 6 \\
 \hline
 \square \square 0 4 \\
 \square \square 7 0 \\
 \hline
 \square \square \square 0 4
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad \begin{array}{r}
 6 \square \\
 \times \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \\
 \square \square \\
 \square \square \\
 \hline
 \square \square \square 6
 \end{array}
 \quad (4) \quad \begin{array}{r}
 6 \square \square \\
 \times \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \\
 \square \square \square \square \\
 \square 5 \square 5 \\
 \hline
 \square \square 5 \square 4 \square
 \end{array}
 \end{array}$$