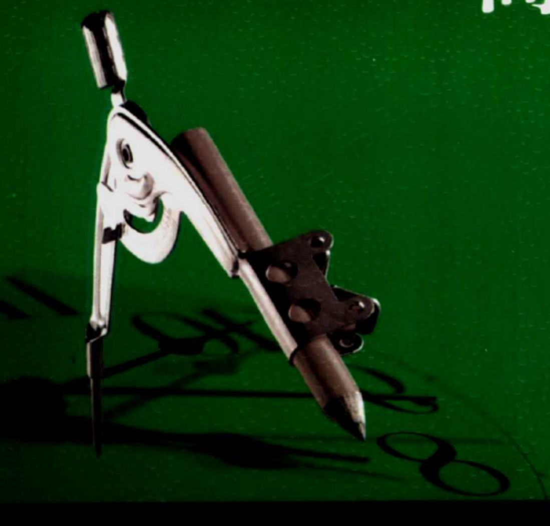
JIEJINSHUXI
捷进书系

HuangGang
JingDianJiangLian

黄冈精典讲练

高二数学（上）

双色 第2次修订



主编：洪鸣远

吉林人民出版社

黄冈

ingdianjianglian

精典讲练

修订版

高二数学（上）

执行主编：高少华

本册主编：陈　源

本册编者：陈　生　张爱良

吉林人民出版社

(吉)新登字01号

黄冈精典讲练·高二数学(上)

主　　编　洪鸣远
责任编辑　关铁宁　　封面设计　魏　晋
责任校对　陈洁美　　版式设计　洪　铭

出 版 者　吉林人民出版社(中国·长春人民大街4646号　邮编:130021)
网　　址　www.jlpph.com
发 行 者　各地新华书店
制　　版　北京佳佳图文制作中心
印 刷 者　北京新丰印刷厂

开　　本　880×1230　1/32
印　　张　9.25
字　　数　237千字
版　　次　2004年5月第2版第1次印刷
印　　数　30000

标准书号　ISBN 7-206-02636-2/G·1305
定　　价　12.50元

图示说明

亲爱的读者，感谢您独具慧眼，选择使用本同步辅导丛书！

近年来，素质教育、能力培养、综合创新……，一系列教改新特点、新要求扑面而来。为了更好地促进素质教育，加强学生创新能力的培养，更加适应新时期教改的要求，推动教学及教改的变革，我们对本丛书精心策划，在充分吸收全国各地广大师生意见的基础上全新修编，修改后本丛书具有以下鲜明特点：

一、课时编写，贴近课堂

依据教学大纲的要求严格按“课时”为单位编写，使学生每天学到的知识都能得到巩固、迁移和拓展，贴近课堂，更具方便性和实用性。

二、双色排版，双栏链接

在图标、章节名、需要掌握和引起注意的起始位置用彩色标注，在增加美感的同时，从视觉上给予强烈冲击，唤醒读者的潜在思维。为了使读者阅读思路更加清晰，我们开创性地将内容以“双栏链接”的形式进行排版，以期双色双栏对读者起到事半功倍之效。

三、名校名师，精讲精练

本次修编在突出黄冈教法和学法的同时，为更好地体现编写的内在质量，我们又吸收了山东、西安等地部分名师参与编写，力求使本丛书具有前瞻性、可读性、生动性和新颖性等鲜活特色。

相信本书的使用会给你一个惊喜！为了帮助你更好地使用本书，请首先阅读本书图示说明。

教材精讲

精讲教材框定的知识、方法、能力等核心要点。

考试要点一网打尽！

名师精析

精析知识点，名师助你实现能力和方法的转变！

解析精辟，真精彩！

新题展示

基础题、创新题、应用题、提高题……，全新题型开阔视野，点评解析深入透彻。

新题、好题真丰富！

高考在线

解读高考要求，原汁原味展示本课时知识中各类高考原题。

高考一点儿都不神秘！

实力演练

精选与本讲内容密切相关的各类好题，全方位地演练本课时的内容，并用星级区分难度，使您和各类习题零距离接触。

全力挑战高分极限！

指点迷津

名师经验再现，突出解题难点、盲点、误区并予引导，详细揭秘解题技巧、核心与关键。

解题确实可以变得轻松！

参考答案及点拨

详尽解析答题要点和思路，规范、全面、精确地点拨。

真正举一反三，真棒！

本丛书自去年面世后，购销踊跃，好评如潮。上万封读者来信充满了肯定、支持、建议。广大中学师生对本书的关注和厚爱既让我们诚惶诚恐，也令我们备感振奋。同时考虑到各地的教学实际情况，我们还配备了七、八年级的新课标同步辅导书。调整后的丛书不但融入了更新的课改理念，所选题目更加突出“精、新、活、典、宽”的特色，讲解也更加具有针对性且精确到位。

新学期将至，我们相信《黄冈精典讲练》丛书会成为更多师生喜爱的品牌。我们深信品牌的背后离不开大家的支持！这里，我们也诚挚地希望读者继续给我们来信，把您们的建议、希望和要求一并附上，以利于我们再版时更好地修订。

来函请寄：北京市西城区车公庄大街甲4号物华大厦A座2204室《黄冈精典讲练》研究组　汪丽丽老师　收

邮政编码：100044

《黄冈精典讲练》丛书编委会

2004年4月 · 北京

目　录

第六章

不等式

本章概述

本章主要内容包括不等式的性质;不等式的证明;不等式的解法.

一、学习要求

1. 掌握不等式的性质及推导,性质及其条件要记准、记熟,并灵活加以应用.

2. 掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数定理,并能准确、灵活的应用其解题.

3. 掌握一元一次、一元二次、简单的一元高次、含绝对值不等式和分式不等式的基本解法. 达到准、快的要求.

4. 掌握绝对值不等式$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

二、学法指导

1. 要注意与一元一次不等式、一元二次不等式、方程、函数等知识的联系,以便对不等式知识有一个全面、深刻的了解与认识.

2. 要特别注意不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$和$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$的适用条件,会正确、灵活创设两不等式运用的条件和变形式的应用.

3. 本章的重点内容之一是不等式的证明,证明不等式没有固定的模式可以套用,它的方法灵活多样,技巧性强,综合性强,要处理好不等式的证明问题应:(1)要对不等式的基本性质能熟练运用,尤其是对两个重要不等式定理的运用;(2)要领会不等式证明的比较法、综合法、分析法及有关方法;(3)注意与其它知识联系和综合运用;(4)要清楚各种证明方法的优越性和局限性并总结规律和技巧.

4. 强化不等式的应用. 历届高考中除单独考查不等式外,常在函数、数列、几何和实际应用中涉及,因此,学习时要运用联系的观点提高应用意识和解决生活中与不等式相关的问题.

5. 在学习过程中加强等价转化思想的训练,加强化归思想的应用,深化分类讨论思想. 这是学好本章的关键.

6.1 不等式的性质

第一课时 不等式的性质(一)

教材精讲

1. 数轴上的点与实数是一一对应的. 数轴上右边的点表示的数比左边的点表示的数大.

2. 如果 $a>b$,那么 $a-b$ 是正数;如果 $a<b$,那么 $a-b$ 是负数;如果 $a=b$,那么 $a-b$ 等于零. 它们的逆命题都正确,即有:

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$

$a<b \Leftrightarrow a-b<0$

$a=b \Leftrightarrow a-b=0$

高考在线

一、高考要求

1. 数轴上的点与实数的对应是最基本的数形结合思想的体现,常在求解交集、并

名师精析

一、方法指导

1. 实数的运算性质与大小顺序之间的关系是建立不等式的理论体系的基石,为实数的大小比较,不等式的证明及解不等式提供了依据,学习时要领会其实质.

2. 对命题中双向箭头"$\Leftrightarrow$"的含义要注意理解

二、解难释疑

3. 数轴上相对位置与实数大小的对应关系常用来数形结合分析直观解题.

4. 作差比较法的三个步骤:作差→变形化简→判断差式与零的大小关系. 其中关键是为判断差式的符号而采用的变形技巧(如分解因式、配方等). 有时还利用函数的单调性求最值来判断符号. 必要时还需对所含字母进行分类讨论来确定符号.

三、实际应用

数学来源于生活生产实践,日常生活中有等量,于是产生了等式;有不等量,于是就产生了不等式,实际日常生产生活中不等量的情况常常发生,往往实际中的"不等"关系是绝对的,所以不等式在日常生活中的应用更为广泛.

新题展示

【例1】(1)已知 $x\neq0$,比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小;

(2)已知 a、$b\in\mathbf{R}$,比较 a^4+b^4 与 a^3b+ab^3 的大小;

集、补集、判别二次方程根的大小、绝对值等方面应用数轴的几何意义直观解题.

2. 把比较两个量的大小转化为两个量作差后判断符号的思想是证明不等式和解决不等式问题常用到的方法，常在选择、解答题中渗透考查. 如：比较两数（式）大小，判断单调性，判断不等式是否成立等问题中就要求自觉熟练应用作差法.

二、考题举例

【例1】（全国高考）若 $-a>-b>0$，则下列不等式不成立的是（　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C. $|a|>|b|$

D. $a^2>b^2$

【答案】B

【点拨】善于抓住数轴的几何意义并由形联想到其性质.

【例2】（黄冈调考）已知 $\alpha\in(0,\pi)$，证明 $2\sin2\alpha\leqslant\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

【答案】左边 - 右边 $=-\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot(2\cos\alpha-1)^2\leqslant0$（当且仅当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，取“=”号）. 即原不等式获证.

【点拨】采用作差法和配方技巧是关键.

(3)已知 $a\geqslant1$，试比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 和 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 的大小；

(4)已知 $x\geqslant1$，试比较 $P=2^x+2x^2$ 和 $Q=2x^2+1$ 大小.

【答案】(1) $(x^2+1)^2>x^4+x^2+1$ (2) $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$ (3) $M<N$ (4) $P>Q$

【解析】比较两个数或式的大小，只需考查它们差与零的大小关系.

(1)作差：$(x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)=x^2>0$；($\because x\neq0$)

(2)作差：$a^4+b^4-(a^3b+ab^3)=(a-b)\cdot(a^3-b^3)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)=(a-b)^2\cdot[(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2]\geqslant0$；

(3)作差：$M-N=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}$，$\because a\geqslant1$，$\therefore\sqrt{a-1}<\sqrt{a+1}$，即 $\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}<0$. $\therefore M-N<0$.

(4)作差：$P-Q=(2^x+2x^2)-(2x^2+1)=2^x-1$，令 $g(x)=2^x-1$，则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数.

故 $g(x)\geqslant g(1)=1>0$，即 $P-Q=2^x-1>0$. 故 $P>Q$.

【例2】若 $b>a>0$，试比较 ac 与 bc 的大小.

【解析】作差：$ac-bc=c(a-b)$.

(1)当 $c>0$ 时，由已知有 $a-b<0$，则 $c(a-b)<0$，即 $ac<bc$；

(2)当 $c=0$ 时，$c(a-b)=0$，即 $ac=bc$；

(3)当 $c<0$ 时，$c(a-b)>0$，即 $ac>bc$.

心得体会

我们遇到比较两数（式）大小问题，基本思想是转化为作差然后判断符号，但关键是变形的技巧，如常见的因式分解、配方、遇到根式分子或分母有理化等，即是要设法把差式变为因式的积或平方形式才便于判断符号；有时还要借助函数的单调性来判断，当差式的符号不确定时，还需要对所含字母进行分类讨论来确定，这也是解决含参数问题的重要思想方法

实力演练

*1 (1)若 $a\in\mathbf{R}$,则 a^2+3 与 $2a$ 的大小关系是____.

(2)若 $a>1$,则 $\log_a(1+a)$ 与 $\log_a(1+\frac{1}{a})$ 的大小关系是____.

*2. 已知 a、$b\in\mathbf{R}$,当 $a>b$ 和 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 同时成立时,a、b 必须满足的条件是____.

**3. 若集合 $A=[a,+\infty)$,集合 $B=[b,+\infty)$,要使 $B\subseteq A$ 成立,则 a、b 的关系为____.

**4. 下列命题中正确的有____.

①若 $a>b$,则 $a^2>b^2$;

②若 $a>b$,则 $\frac{b}{a}<1$;

③若 a、$b\in\mathbf{R}$,则 $a^2+b^2+ab\geqslant0$.

**5. 设实数 x、y、z 满足:① $y+z=6-4x+3x^2$;② $z-y=4-4x+x^2$,试确定 x、y、z 之间的大小关系.

***6. 已知 $a\in\mathbf{R}$,试比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小.

***7. (创新·应用)甲乙两车从 A 地沿同一路线到达 B 地,甲车一半时间的速度为 a,另一半时间的速度为 b,乙车用速度为 a 行走一半路程,用速度为 b 行走另一半路程 $(a\neq b)$,试判断哪辆车先到达 B 地?

指点迷津

←作差

←借助数轴

←借助数轴

←否定结论可用特值法;配方变形技巧很有效!

←确定 x、y、z 大小化归为两两作差.构造"$y-x$"式是关键!

←要注意分类讨论

←将实际问题("先后"问题)转化为数学问题(两个量"时间"大小问题).别忘比较大小的基本方法——作差法

第二课时 不等式的性质(二)

教材精讲

定理 1:如果 $a>b$,那么 $b<a$,如果 $a<b$,那么 $b>a$.

定理 2:如果 $a>b$ 且 $b>c$,那么 $a>c$.

名师精析

一、方法指导

1. 不等式的性质及其证明的方法,是学习不等式的基础,为了达到深刻理解、准确记忆不等式性质的目的,学习时,要注意抓住不等式性

定理3：如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

移项法则：不等式中任何一项改变符号后可把它从一边移到另一边.

推论：若 $a>b$ 且 $c>d$，则 $a+c>b+d$.

定理4：若 $a>b$ 且 $c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b$ 且 $c<0$，则 $ac<bc$.

推论1：$\left.\begin{array}{l}a>b>0\\c>d>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd>0$.

推论2：如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）.

定理5：如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$）.

质的条件，认真分析它们的相同点、不同点，并能通过反例加深理解和记忆.

2. 在学习性质的证明时，要仔细体会各性质的证明思路和方法，逐步养成用逻辑推理进行数学证明的习惯和能力.

二、解难释疑

3. 在学习定理3时，式中的字母 c 可以是任意实数或代数式，若代数式为整式时，所得不等式与原不等式同向且同解（等价），若为分式时，所得不等式与原不等式只同向但不同解；其推论实质是同向不等式加法原理，它还可以推广到有限个同向不等式两边分别相加所得不等式与原不等式同向. 运用时特别应注意两点：一是"同向"才能相加；二是不等式只能作"相加"变形、不能作相减变形. 如 $\left.\begin{array}{l}a>b\\c>d\end{array}\right\}\not\Rightarrow a-c>b-d$，但可作变形：

$$\left.\begin{array}{l}c>d\Rightarrow -c<-d\\a>b\Rightarrow b<a\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{相加}}b-c<a-d.$$

4. 定理4是不等式变形中的重要法则，即是不等式方向是否改变的依据. 尤其是在不等式两边作乘除变形、分式中去分母常应用这一重要定理依据. 往往在不等式两边进行乘除代数式或字母时易忽视对其正负性的考虑和讨论，应引起足够重视.

5. 学习定理4的推论1、推论2及定理5时都需注意 $a>b>0$，即不等式两边都为正这一重要前提条件.

三、实际应用

不等式的"对称性"、"传递性"、"可加性"、"可乘性"等性质是不等式变形的依据. 解不等式、证明不等式都必须应用它们，它还可以解决很多函数、方程等方面的问题. 因此，还要注意善于把非不等式问题转化为不等式问题，再依据不等式的性质等价变形来解决.

高考在线

一、高考要求

1. 不等式的性质定理是不等式运算变形的依据和规则，是历年高考重点考查的内容. 但往往不单独命题，以其它知识为载体渗透考查. 比如求函数定义域、值域、解不等式、证明不等式等都要对不等式进行正确的变形，还常与常见函数的单调性综合考查.

2. 高考命题以“能力立意”为原则，因此对不等式性质考查的重点是理解和运用. 要求能分清每一性质的条件和结论以及条件和结论的关系，并注意条件的放宽或加强，尤其是性质成立的前提条件和解不等式过程中的同解变形，须引起足够重视并加强训练.

二、考题举例

【例 1】(1999，上海）若 $a<b<0$，则下列结论正确的是（　　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不能成立

C. 不等式 $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$ 均不能成立

D. 不等式 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 和 $(a$

新题展示

【例 1】求证：

(1) 若 $a>b>0, c<d<0$，则 $ac<bd$；

(2) 若 $a>b>0, c>d>0$，则 $\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

【解析】(1) 应用不等式的性质并创设定理推论成立的条件，把 $c<d<0 \Leftrightarrow -c>-d>0$ 后则与 $a>b>0$ 都为两边均为正. (2) 中只需证 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$，由定理 4 只需证 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$ 即可.

【证明】(1)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a>b\\ d<0\end{array}\right\}\Rightarrow ad<bd\\ \left.\begin{array}{l}c<d\\ a>0\end{array}\right\}\Rightarrow ac<ad\end{array}\right\}\Rightarrow ac<bd.$$

或：

$$\left.\begin{array}{r}c<d<0\Rightarrow -c>-d>0\\ a>b>0\end{array}\right\}\Rightarrow -ac>-bd\Rightarrow ac<bd.$$

(2)
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=\frac{c-d}{cd}\\ c>d>0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0\\ \qquad\qquad a>b>0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{d}>\frac{b}{c}>0\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

【例 2】已知 $2<m<4, 3<n<5$，试求下列各式的范围

(1) $m+2n$；(2) $m-n$；(3) $m\cdot n$；

(4) $\frac{m}{n}$；(5) $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$.

【解】

(1) 由 $\left.\begin{array}{r}3<n<5\Rightarrow 6<2n<10\\ 2<m<4\end{array}\right\}\Rightarrow 8<2n+m<14.$

(2) 由 $\left.\begin{array}{r}3<n<5\Rightarrow -5<-n<-3\\ 2<m<4\end{array}\right\}\Rightarrow -3<m-n<1.$

(3) 由 $2<m<4$ 且 $3<n<5$ 得 $6<mn<20$.

(4) 由 $\left.\begin{array}{r}3<n<5\Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{1}{n}<\frac{1}{3}\\ 2<m<4\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2}{5}<\frac{m}{n}<\frac{4}{3}.$

(5) 由 $\left.\begin{array}{l}2<m<4\Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{m}<\frac{1}{2}\\ 3<n<5\Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{1}{n}<\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{1}{3}<-\frac{1}{n}<-\frac{1}{5}\end{array}\right\}$

$+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$

均不能成立

【例2】若 a、b 是任意实数且 $a>b$，则（　　）

A. $a^2>b^2$

B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$

D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

【答案】1. B　2. D

【点拨】1 题主要利用性质的变形结论：若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；若 $a<b<0$，则 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$. 2 题是不等式性质与常见函数性质综合运用.

$\xRightarrow{\text{相加}}-\frac{1}{12}<\frac{1}{m}-\frac{1}{n}<\frac{3}{10}$.

【例3】(1)解关于 x 的不等式 $a(x-1)(x+2)\geqslant 0$；

(2)解分式不等式 $\frac{x^2+2x}{x+2}>1$.

【解】(1)①当 $a=0$ 时，解集为 $\mathbf{R}$.

②当 $a>0$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow(x-1)(x+2)\geqslant 0$，此时解集为 $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -2\}$.

③当 $a<0$ 时，原不等式 $\Leftrightarrow(x-1)(x+2)\leqslant 0$，此时解集为 $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$.

(2) 原不等式等价于：$\begin{cases}x+2>0\\x^2+2x>x+2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+2<0\\x^2+2x<x+2\end{cases}\Leftrightarrow x>1$ 或 $x\in\varnothing$. 故解集为 $\{x|x>1\}$.

心得体会

不等式的性质定理重在运用，并会创设运用条件. 不等式的每一步变形都要有根有据——性质定理.

实力演练

指点迷津

*1. (1)已知 $m>n$，$a<b$，则 $m-a$ ____ $n-b$.　←应用性质或"作差"

(2)已知 $a<0$，$-1<b<0$，则 a、ab、ab^2 从大到小顺序为 ____________.　←应用性质或作差或特值

*2. (1)已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\beta\in(\pi,2\pi)$，则 $2\alpha-3\beta$ 的范围是 ____________.　←不等式可不能"相减"！

(2)若 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的范围是____.　←要小心，别忘"$\alpha<\beta$"

*3. 若 $a>b$，则下列式子：① $a+c>b+c$；② $a-c>b-c$；③ $ac\geqslant bc$；④ $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}(c>0)$；⑤ $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；⑥ $a^n>b^n$ 其中正确的有____.　←考查性质.

*4. 不等式 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的充要条件是____.　←考查"等价变形"

*5. 若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{1}{a^3}>\frac{1}{b^3}$ 成立的一个充分不必要条件是（　　）　←注意审题！选项⇒已知条件，但已

A. $ab>0$　　B. $b>a$

C. $a<b<0$　　D. $ab(a-b)<0$

知条件⇒选项

*6. 若 $a>b>0,c<d<0$，试证明$\sqrt[3]{\frac{a}{d}}<\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$.

*7. 用不等式的性质解不等式：

(1) $|x|>|4x-1|$；　(2) $\frac{x^2+2x}{x^2+1}>1$.

←去绝对值还有"平方法"！去分母要对其正负性作判断

**8. 实数 a、b、c、d 满足下列三个条件：①$d>c$；②$a+b=c+d$；③$a+d<b+c$. 你能将 a、b、c、d 从大到小排列吗？并证明你的结论.

←比较大小，找"差式"

**9. 试证明：若 $a>b,n\in\mathbf{N}$，则 $a^{2n+1}>b^{2n+1}$.

←注意分类讨论，并创设定理成立条件，充分利用已有的性质定理

6.2　算术平均数与几何平均数

教材精讲

1. 若 $a>0,b>0$，则称 $\frac{a+b}{2}$、$\sqrt{ab}$分别为两正数 a、b 的算术平均数和几何平均数.

2. 重要不等式：如果 a、$b\in\mathbf{R}$，那么 $a^2+b^2\geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）.

3. 定理：若 a,b 是正数，则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时取"="号）. 即两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

名师精析

一、方法指导

1. 重要不等式和定理都是利用$(a-b)^2\geqslant 0$来推导的. 学习时，要注意两点：一是它们成立的条件不同，二是对其中的"当且仅当……取'='号"含义要弄清楚.

2. 本课时内容是证明不等式、求解最值问题的重要工具，要灵活创设不等式适用的条件，应用它们去解决有关的数学问题.

二、解难释疑

3. 使用重要不等式和定理应注意两点：一是两不等式成立的条件不同，不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 只需要求 a,b 都是实数，而$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$要求

定理的几何意义:圆的半径不小于半弦(圆的直径为 $a+b$).

a、b 都是正数;二是对两不等式中"当且仅当 $a=b$ 时取等号"的理解,即"$a=b$"是不等式取"="号成立的充分必要条件.

4. 定理实质是"和""积"互化的关系,在应用中要灵活把握. 在求函数最值时定理有其特殊的作用,但必须注意三点:(1)各项(因式)均为正;(2)"和"或"积"为定值;(3)等号在取值范围内成立;必要时采用配凑、配系等适当变形以满足上述前提. 即要注意"一正二定三相等".

5. 利用定理求最值与函数法求最值有区别:前者要求在定义域内等号取得到,否则只能借助函数法求最值,后者要求必须清楚函数图象及其单调性. 如求函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}(x\geqslant 2)$ 的最值只能利用函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上的单增性质来求.

6. 重视两不等式的灵活变形及变形式的应用. 熟练推导并应用变形式:$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$;$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$;$(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$;$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$

$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 等.

三、实际应用

均值不等式应用范围很广泛,它在函数、几何、三角中都有着广泛的应用;还与其它学科的联系非常紧密,一些求最值问题可借助于均值不等式求解. 应用均值不等式解决实际问题,要注意:(1)先理解题意. 设变量一般把要求最值的变量定为函数,并注意变量范围;(2)建立相应的函数关系,把实际问题抽象为函数的最值问题;(3)在定义域内,求出函数的最值.

【例1】已知两个函数 $y=x^2+ax+2$ 与 $y=x+1(0<x\leqslant 2)$ 的图像有公共点. 求实数 a 的范围.

【解】由题意即要方程 $x^2+ax+2=x+1$ 在 $0<x\leqslant 2$内有解,进一步转化为 $a=1-(x+\frac{1}{x})(0<x\leqslant 2)$. 即要求关于 x 的函数在$(0,2]$内的值域. $\because x+\frac{1}{x}\geqslant 2$(当且仅当 $x=1$ 时取"="号)故 $a\leqslant -1$. 故实数 $a\in(-\infty,-1]$.

【点拨】本题很巧妙的使用等价化归的思想,将函数、方程、不等式有机的统一起来. 利用均值定理求函数的范围,不是起常规的利用根的分布解题和图像法解题方便快捷很多.

【例 2】一份矩形的印刷品的排版面积为 $432cm^2$,它的左、右两边都留有4cm 的空白,上、下底部都留有3cm 的空白,问长、宽如何设计,用纸最省?

【解】设矩形长为 $x$cm,宽为 $y$cm,则印刷品用纸的长为$(x+8)$cm,宽为$(y+6)$cm. 记其面积为 S,则 $S=(x+8)(y+6)=xy+6x+8y+48=432+48+6x+8y\geqslant 480+2\sqrt{6x\cdot 8y}=480+2\sqrt{48\times 432}=768(cm^2)$. 当且仅当 $6x=8y$,即 $6x^2=8xy$,$x=24$,$y=18$ 时等号成立. 故应设计为纸面长为 32cm,宽为 24cm 时纸的面积最小. $S_{\min}=768cm^2$.

【点拨】应首先建立目标函数再应用不等式来求函数值域.

高考在线

一、高考要求

均值不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$是不等式一个重要的变形依据. 常用它来证明不等式,比较大小,求函数的最值,求变量的取值范围,求解实际问题中的最值问题. 高考中常与函数、方程、一元二次不等式、几何等知识综合考查,遍布

新题展示

【例 1】(1)已知 $x<0$,求 $y=x+\frac{1}{x}$的最大值;

(2)已知 $x<\frac{5}{4}$,求函数 $y=4x-2+\frac{1}{4x-5}$的最大值;

(3)求函数 $y=2x\cdot\sqrt{4-x^2}(0<x<2)$的最大值.

【答案】(1)$y_{\max}=-2$,当 $x=1$ 时;(2)$y_{\max}=1$,当 $x=1$ 时;(3)$y_{\max}=4$,当 $x=\sqrt{2}$时.

【解析】创设应用不等式的条件"一正二定三相等".