

施 毓 湘 編

上海教育出版社

高中平面三角复习参考资料

高中平面三角复习参考資料

施 統 湘 編

上海教育出版社

一九六三年·上海

高中平面三角复习参考資料

施毓湘編

*

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

上海市书刊出版业营业许可证出(880)号

中华书局上海印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32 印张：4 3/4 字数：104,000

1963年4月第1版 1963年4月第1次印刷

印数：1—95,000本

統一书号：7150·1399

定 价：(八) 0.38 元

出版說明

为了帮助中学生复习好数学,本社曾于1958年出版了中国数学会上海分会中学教学研究委员会編写的“初中数学复习資料”和“高中数学复习資料”两书,提供教师們在指导学生复习数学时参考.这两书在1959年还曾作了一次全面修訂.为了符合当前中学数学各科教学的要求和使用上便利起见,此次特請上两书的原作者在原书各有关部分的基础上,并吸取几年来中学数学老师們指导学生复习数学的实际經驗,重行修訂,分册出版.

数学課的复习,是教师在平时所应注意的經常工作,只有在平时不断复习巩固的基础上来作最后系統的复习,才能收到較好的教学效果.因此,我們决不能放松平时的复习,而只重視毕业前的总复习.

“进行复习的目的,不仅是使学生在記憶上重现一下个别的公式、法則、定义、定理或者解答习题的方法,还要使学生能够对于新旧課題作更巩固而明确的联想以及邏輯的联系,能够确定解决同类問題的法則和方法的异同,并且能够以新的更全面的观点闡明所学习过的教材.”(中华人民共和国教育部編訂:《中学数学教学大綱(修訂草案)》,1956年第三版第4頁.)考虑到这一点,本书在复习系統的安排上,采用了按照本課程中的几个主要内容,分类集中,划分成若干个单元进行专题复习的办法,企图使学生对每一部分的知識,能够有比較完整的、系統的認識.另外,根据本課程內容的特点,在这些項目相互之間,又是

交錯联系的；为此，在例題和习题的選擇安排上，注意了尽可能使安排在前面复习的內容，不太多地牽涉到后面复习的知識，而在后面复习的內容里，多安排一些綜合性的題目，来巩固前面复习的知識，以期使学生通过复习能够达到反复巩固、灵活运用之目的。

本书每个单元里都包括前言、提要、例題和习题四个部分。“前言”里除了简单叙述本单元复习的主要內容和它在整个課程中的作用和地位以外，还提出了复习本单元的注意点。“提要”里系統地指出了本单元的重要知識。“例題”里安排了各种类型的題目，并作了示范性的解答；一部分例題里，在具体作出解答以前，还指出了思考方法，或者在解答以后提出了一般的注意，提供解題的指导。“习题”里配备了一部分最基本的題目，同时也配备了一部分較难的題目，提供了练习的材料。企图使讀者在运用这本复习参考資料时，可以首先在明确复习要求的基础上，整理一下学过的知識，熟悉解題的方法，进行必要的练习，从而巩固所学过的知識，发展解題的能力。

在重編本书的时候，曾邀請部分中学数学老师进行座談，承蒙提出了改編的意见，还提供了一些具体資料，謹向他們表示感谢。本书無論在选材上、編排体系上，可能还存在不少缺点，希望讀者批評指正，以便将来再作修訂，使它逐步趋于完善。

目 录

第一单元	三角函数的定义和基本性质	1
第二单元	加法定理	41
第三单元	三角形的性质和解法	74
第四单元	反三角函数	106
第五单元	三角方程	120

第一單元 三角函数的 定义和基本性质

I. 前 言

三角学建立在几何学的基础上，但是研究的方法主要是代数方法。因此，三角学实际上是代数学和几何学联系起来的一門学科。三角学的主要内容现在已分成两部分，一部分是三角函数性质的研究；另一部分是三角形解法的研究。这些内容既是解决生产实际问题的工具，也是将来学习高等数学的基础。

本单元主要复习角与弧的度量，同角的三角函数，任意角的三角函数（诱导公式）和三角函数的图象等内容。而同角的三角函数和诱导公式这两部分内容尤其重要，是今后经常要用到的。

复习本单元时必须注意以下几点：

(1) 初等函数通常被分成代数函数和超越函数。简单地說，如果一个函数的值，可以从常数和自变量的值，借助于有限次的代数运算（加、减、乘、除、乘方、开方）得出的，这个函数就叫做代数函数。如果通过有限次的代数运算，不能求出函数值的一切函数，叫做超越函数。三角函数是超越函数中的一种。三角函数的自变量是角（或者弧），所以有时也把它叫做圆函数。三角学的主要内容之一，是三角函数性质的研究，所以复习本单元的时候，应该把函数的定义和一些有关的名词搞清楚。

(2) 角的概念不能局限于 0° 到 360° 的范围内，例如在研

究机器上輪盘的轉动問題的时候,我們就会遇到任何大小的角,这就需要把角的概念普遍化。同样的,弧的概念也必須加以扩展。

(3) 对三角函数进行运算的时候,要特別注意这样一类問題,就是不能从关系式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 不加区别地得出 $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ 的結論。因为角 x (或者弧) 如果在第三或者第四象限內, $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$ 。所以这里不但要注意到一个数的平方根應該有两个,而且还應該根据 x 所在的象限給以正确的符号。同样的,对于 $\sin x = m$, 如果没有指定角 x (或者弧) 在哪一个象限里,就不能认为字母 m 表示的一定是正值或者一定是負值。

(4) 三角函数的图象对于三角函数性质的研究有很大的帮助,所以應該經常把函数的图象和函数的性质进行对照。

II. 提 要

§ 1. 角的概念的普遍化

1. 任何一个角 AOB , 可以看做是由一条射綫繞着它的端点 O , 从 OA 的位置开始, 旋轉到 OB 的位置而生成的。 OA 叫做始边, OB 叫做終边, 而 O 叫做頂点。如果这条射綫旋轉的方向是反时針的方向, 我們規定它是正角; 如果是順时針的方向, 就規定它是負角。

2. 如果以角 α 的終边为始边, 作一个和角 α 方向相同的角等于 β , 那末, 由角 α 的始边和角 β 的終边所組成的角就等于 $\alpha + \beta$ 。如果以角 α 的終边为始边, 作一个和角 α 方向相反的角等于 β , 那末, 由角 α 的始边和角 β 的終边所組成的角就等于 $\alpha - \beta$ 。

3. 角是由一条射线绕着它的端点旋转而生成的, 这样, 由于旋转的方向、射线所在的位置的不同, 就可以得到任何大小的角(正角、负角和等于零的角)。在日常生活和生产中, 我们也会遇到这样的角, 例如分针、时针、飞轮等旋转的角度。因此, 通常所说的角的大小不限于 0° 和 360° 之间, 为了方便起见, 常把角的始边放在 x 轴上, 根据终边落在哪一个象限, 就把这个角叫做某一个象限的角。如果终边恰巧落在坐标轴上, 例如, 0° 、 90° 、 180° 、等等(就是 $n \cdot 180^\circ + 90^\circ$ 或者 $n \cdot 180^\circ$) 这些角就不属于哪一个象限。(在本书里以后见到的 n , 都代表整数。)

§2. 角与弧的度量

1. 角与弧的度量制 不论角或者弧都可以用以下两种单位来度量:

(1) 角度制 把等于整个圆的三百六十分之一的弧叫做含有1度的弧, 而1度的弧所对的圆心角叫做1度的角。用度做单位来量弧与角的制度叫做角度制。因为 $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$, 所以这种制度也叫做六十分制。

(2) 弧度制 把等于半径的长的弧叫做含有1弧度的弧, 而1弧度的弧所对的圆心角叫做1弧度的角。用弧度做单位来量弧与角的制度叫做弧度制。弧度也叫做厘。所以这种制度也叫做厘制。

用厘来表示角的大小的时候, 一般不加单位名称。例如 $\alpha = 2$, 就表示 α 是2厘。

2. 度与弧度的相互换算 度与弧度可以相互换算, 根据1个周角的弧度数是 $\frac{2\pi R}{R}$, 就是 2π , 得

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \approx 0.017 \text{ 弧度};$$

$$1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ} \approx 57.296^{\circ}.$$

下面是几个经常用到的度和弧度的换算表：

度	0°	15°	30°	45°	60°	90°	
弧 度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	

换算时通常应用的公式是： $\frac{\theta \text{ 弧度}}{2\pi \text{ 弧度}} = \frac{\alpha^{\circ}}{360^{\circ}}.$

除以上两种单位外，在军事上还采用另外一种单位叫做密位。1 密位 = $\frac{1}{6000}$ 周角 = $\frac{\pi}{3000}$ 弧度 $\approx 3'36''$ 。

3. 圆心角、半径和弧长间的关系 如果用 R 表示圆的半径， l 表示弧长， α 表示这弧所对圆心角的弧度数，根据弧度的定义就得

$$\alpha = \frac{l}{R}.$$

这个公式在物理学上计算角速度的时候也经常要用到。例如：

设飞轮的半径是 1.20 米，用每秒 10π 弧度的角速度旋转。求：

- (1) 这个飞轮每分钟旋转的次数；
- (2) 这个飞轮边沿上一点的线速度；
- (3) 飞轮上任意一点的线速度与角速度的关系。

解 (1) 设这个飞轮每分钟旋转 N 次，那末

$$N = \frac{10\pi \times 60}{2\pi} = 300 \text{ (次)}.$$

(2) 设这个飞轮边沿上一点的线速度是 v ，那末

$$v = \frac{1.20 \times 2\pi \times 300}{60} = 12\pi \approx 37.7 \text{ (米/秒)}.$$

(取三位有效数)

(3) 設 R 是飞輪上任意一点跟轉动軸的距离, 那末

$$v = \frac{2\pi R \times 300}{60} = \frac{R(2\pi \times 300)}{60},$$

$$\therefore \frac{2\pi \times 300}{60} = 10\pi,$$

$$\therefore v = R\omega. \quad (\omega \text{ 代表角速度})$$

§ 3. 任意角的三角函数

1. 三角函数的定义 三角函数的定义, 我們已經学过三种. 一种是用直角三角形里两边的比来规定的; 一种是用直角坐标給出的; 还有一种是用函数綫給出的. 实际上这三种定义是一致的. 因为把一个角的正、余弦綫分別投影到 x 軸和 y 軸上, 就得出了一点的坐标; 如果角的大小局限在第一象限, 就得出直角三角形里作为一个銳角的对边和邻边. 用直角三角形里两边的比所給出的三角函数的定义只适用于銳角, 是三角函数在特殊条件下的表现形式. 用直角坐标或者函数綫給出的定义适用于任意角; 实际上它們是銳角的三角函数定义的推广. 由于我們所研究的角不只是銳角, 而是一般的角, 所以就要采用坐标法和函数綫法来給出三角函数的定义.

(1) 用坐标法給出的定义 用角 α 的頂点 O 为原点, 用它的始边为横坐标軸的正方向, 作横坐标軸 $X'X$ 和纵坐标軸 $Y'Y$ (图 1). 在角 α 的終边上任意取一点 P , 它的坐标是 $P(x, y)$, $|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 那末不論点 P 在哪一个象限, 角 α 的六个三角函数是:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r},$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y},$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

这些比的大小和 α 的大小有关, 而和点 P 在終边上的位置

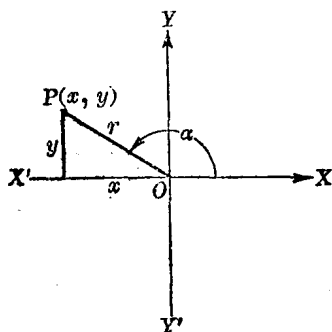


图 1

无关。 r 是 OP 的绝对值, 常取正值。坐标 (x, y) 的符号根据 P 点所在的象限决定。

必须注意, 上面的定义只适合于任意一个象限里的角。但是, 如果点 $P(x, y)$ 恰巧落在坐标轴上, 对于这样的角上述定义就不适合了。例如, 当 P 点落在正向的 y 轴上, 也就是 $\alpha = 90^\circ$ 时,

这时它的横坐标是 0, 纵坐标是 y , $|OP| = r = y$ 。因为

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{y} = 0,$$

从算式来看, 90° 角的正余弦似乎仍有意义; 但这时 $\operatorname{tg} 90^\circ$ 却没有意义(绝对不能写成 $\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{y}{0} = \infty$)。因此遇到这些角的时候, 只能在原有的基础上, 给出补充定义。这样我们就把 90° 角的三角函数值规定为

$$\sin 90^\circ = 1; \quad \cos 90^\circ = 0; \quad \operatorname{tg} 90^\circ \text{ 没有意义};$$

等等(0° 、 180° 、 270° 角的情况相类似)。

图 2 说明在不同象限里角 α 的三角函数值的符号, 图上没

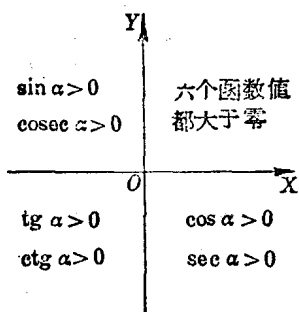


图 2

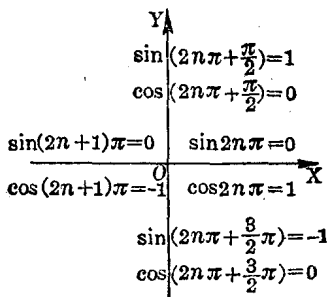


图 3

有指出的函数都是負值。图 3 說明終边在坐标軸上的角 α 的正余弦函数值；其余的三角函数的值，請讀者自己补充完整。

(2) 用函数綫給出的定义 以坐标軸的原点 O 为圓心，以等于单位长的綫段为半径所作的圓叫做单位圓。如果单位圓和角 α 的始边（橫坐标軸的正方向）交于 A ，和角 α 的終边交于 B ， OA 就叫做不动徑， OB 叫做动徑（图 4、图 5）。

(i) 从 B 点作不动徑 OA 的垂綫 CB ，因为 $\sin \alpha = \frac{CB}{OB}$ ，

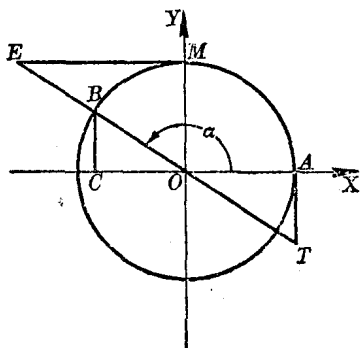


图 4

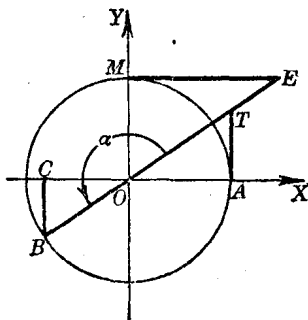


图 5

$\cos \alpha = \frac{OC}{OB}$, 而 OB 是一个单位, 所以 CB 和 OC 的量数連同它們的符号, 可以用来分別表示 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值. CB 的符号的規定和 y 軸一样, OC 的符号的規定和 x 軸一样. CB 和 OC 分別叫做角 α 的正弦綫和余弦綫.

(ii) 过点 A 和 M (单位圓和两軸的交点) 分別作圓的切綫和角 α 的終边的延长綫(或者反向延长綫)分別交于 T 和 E . 因为 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AT}{OA}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{ME}{OM}$, 所以 AT 和 ME 的量数連同它們的符号, 可以用来分別表示 $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{ctg} \alpha$ 的值. AT 的符号的規定和 y 軸一样, ME 的符号的規定和 x 軸一样. AT 和 ME 分別叫做角 α 的正切綫和余切綫.

(iii) 从原点 O 到正切綫和余切綫終点的綫段 OT 和 OE , 分別叫做角 α 的正割綫和余割綫. OT 和 OE 的量数連同它們的符号, 用来分別表示 $\sec \alpha$ 和 $\operatorname{cosec} \alpha$ 的值. 正割綫和余割綫的符号, 規定和 OB 的方向相同的是正; 方向相反的是負.

这里只作了角 α 是第二和第三象限角的三角函数綫 (图 4、图 5), 至于角 α 在其他象限里, 作法完全类似, 可以参閱課本.

2. 三角函数值的变化 从函数綫的消长, 很容易看出角 α 从 0° 到 360° 的变化过程中, 各三角函数的值的变化情况. 現在列表如下頁所示.

从表里可以看到, 当角 α 从 0° 变到 360° 的时候, 角 α 的正、余弦的絕对值不能大于 1; 正、余割的絕对值不小于 1; 正、余切可以取任何数值. 当角 α 等于 90° 的时候, $\operatorname{tg} \alpha$ 不存在; 但当角 α 充分接近 90° 的时候, 函数还是有定义的. 因此从三角函数的自变量的允許值來說, 絕对沒有一个角, 它的大小能够使它的函数值具有双重性的, 所以 $\operatorname{tg} 90^\circ = \pm \infty$ 是不成立的. 90°

变 化 函 数	角 α	0°	$\nearrow$	90°	$\nearrow$	180°	$\nearrow$	270°	$\nearrow$	360°
$\sin \alpha$		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos \alpha$		1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\operatorname{tg} \alpha$		0	$+\infty$	不存在	$-\infty$	0	$+\infty$	不存在	$-\infty$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$		不存在	$+\infty$	0	$-\infty$	不存在	$+\infty$	0	$-\infty$	不存在
$\sec \alpha$		1	$+\infty$	不存在	$-\infty$	-1	$-\infty$	不存在	$+\infty$	1
$\operatorname{cosec} \alpha$		不存在	$+\infty$	1	$+\infty$	不存在	$-\infty$	-1	$-\infty$	不存在

的正切根本没有定义, 我们只能写做 $\lim_{x \rightarrow 90^\circ} \operatorname{tg} x = +\infty$ (如果 $x < 90^\circ$), 或者 $\lim_{x \rightarrow 90^\circ} \operatorname{tg} x = -\infty$ (如果 $x > 90^\circ$), 显然两者的意义不同。

关于三角函数值的变化范围, 也可以简单地用图 6 表示:

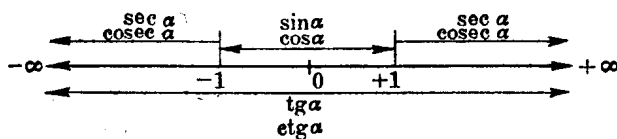


图 6

§ 4. 同角的三角函数

1. 五个基本公式 同角的三角函数間都有下面的各种关系:

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1; \quad (1)$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1; \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad (4)$$

$$\left[\text{或者 } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right]$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (5)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{或者 } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha; \\ \text{或者 } 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha. \end{array} \right]$$

上面的关系式都是对于使它的两边具有意义的那些角而說的,以后遇到的关系式也是这样。

三角学上絕大部分的公式都可以从以上五个公式导出。

2. 用角 α 的一个三角函数表示角 α 的其他各三角函数
这里只举一个用角 α 的正弦函数表示 α 的其他三角函数的例子。利用前面五个公式,得

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

綜上所述,如果知道了一个角的一个三角函数,我們就可以求出它的其他三角函数,但特別需要注意符号的正确选择。一

般可以分以下三种情况:

(1) 如果已知角 α 所在的象限, 那末就只有一组解. 例如:

已知 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, 并且 α 在第二象限, 那末

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = 3, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = -\frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -2\sqrt{2}.$$

(2) 如果已知三角函数的值, 但没有给出角 α 所在的象限, 那末就要根据已知的函数值先确定角 α 可以存在的象限, 然后再求解. 例如:

已知 $\operatorname{tg} \alpha = 2$, 因为 α 可以在第一或者第三象限, 所以:

如果角 α 在第一象限, 那末

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

其他各三角函数的值可以象(1)里那样求出.

如果角 α 在第三象限内, 那末

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

其他各三角函数的值可以象(1)里那样求出.

(3) 如果已知的三角函数的值是一个用字母表示的数, 但