经济应用数学学习指导（二）

线性代数与概率论

钟冠国　许仁忠　刘雅梅
汪荣伟　林学杰　吴　红　编著

成都科学技术大学出版社

一九八八年·成都

经济应用数学学习指导

钟冠国 刘祖佑 许仁忠等编 著

成 都 科 技 大 学 出 版 社 出 版
四 川 省 新 华 书 店 发 行
四川省德阳市罗江印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32印张：13.4375
1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷
字数：285千字 印数：1—2000

ISBN 7—5616—0305—3/F·7

定价： 4.40 元

《经济应用数学学习指导》编写组成员

（以姓氏笔划为序）

付　平　许仁忠　李茂南　汪荣伟　刘祖佑
刘雅梅　吴　红　林学杰　张　俊　张云香
张宝丽　杨晓玲　钟冠国

主纂　钟冠国　许仁忠
主审　吴　怀

前　　言

《经济应用数学学习指导》是西南财经大学、北京财贸学院、贵州财经学院、云南财贸学院、重庆工业管理学院、浙江财经学院、重庆商学院等院校相关系室编写的经济管理类本科教材《经济应用数学》的配套辅助读物，由西南财经大学、贵州财经学院、云南财贸学院、北京财贸学院有关系室数学教师编著。

编写中进行了教材内容的提要、小结及疑难问题分析，通过对一些典型例题的剖析以增强对数学基本概念与基本理论的理解，提高数学基本运算的技能，并给出教材习题答案及部份习题选解。

本书由钟冠国、许仁忠、刘雅梅、汪荣伟、林学杰、吴红老师主编，由钟冠国、许仁忠老师主纂。编写与成稿过程中，得到西南财经大学经济信息管理系经济数学教研室教授吴怀先生的悉心指导，并承蒙他审定了全书。在此，向吴怀先生表示衷心的感谢。

编者水平有限，加之成书时间仓促，错误在所难免，恳请读者斧正，以利提高与改进。

《经济应用数学学习指导》编写组

一九八八年教师节

目　录

线性代数

概率论

第一章　行 列 式

一、内容提要及疑难重点分析

（一）内容提要

本章主要内容：n阶行列式，行列式元素的余子式与代数余子式，行列式的k阶子式及余子式的概念；行列式的性质，行列式依某行（列）展开，*laplace*定理及乘法公式。行列式的计算方法；解线性方程组的*Cramer*法则。

要求深刻理解行列式的概念，熟练掌握行列式计算的各种方法，特别是应用行列式性质与按行（列）展开计算行列式的方法，会应用*Laplace*定理与乘法公式。理解*Cramer*法则，先用*Cramer*法则求解n个未知数n个方程的线性方程组。

（二）疑难重点分析

1．行列式的计算　如何计算行列式的值，是本章所需认真讨论的重要问题之一。我们指出，若行列式中各元素均为具体数字，并且阶数较低时，往往采用的方法是，根据行列式的特点，把它逐步化成上（下）三角形行列式，由主对角线上的元素之积而得出行列式的值。

〔例1〕　计算 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

解　由于各行元素之和均为6

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{各列均加入第一列}} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{第一行乘}(-1)\text{加到各行}} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 6 \times 8 = 48$

一般的行列式不只是4阶，5阶而是n阶，行列式的元素也不一定再是具体的数字，往往有未知量存在。对于一般的n阶行列式，计算方法的采用存在着很多技巧性问题，大都是基本计算法的综合运用。主要计算方法有消元降阶法。升阶法、递推法及分析法。

（1）消元降阶法，即把行列的某行（列）乘以某个适当的数，加到另一行(列)，可使行列式的某些元素变为零，它不改变行列式的值，然而在适当的时候依某行(列)展开行列式或利用*laplace*定理高阶行列式变为较低阶的行列式以达到便于求其值的目的。它是行列式计算的最基本方法之一。

（2）升阶法，即是在所给定的行列式中增加若干适当的行与列，构成新的行列式，并以新的行列式为过渡，达到计算行列式值的目的，在升阶法中请注意，由于行列式的行、列相同，所以加入的行、列应相同，并要保持行列式与原行列式值的关系。

（3）递推法，即把行列式用较低阶的同型行列式A'表示

出来，这样的表达式称其为递推关系式，利用递推关系式来计算行列式（往往要用数学归纳法）的方法就是递推法。

（4）分拆法，即利用行列式的性质，把行列成分成若干个便于计算的同阶行列式之和。

（5）利用已知行列式计算所求，如*raneermond*行列式。

对于上述计算方法的应用，我们以下面的例子给予说明。

〔例2〕 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

由于行列式中各行元素之和均为$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)-m$，并且各列元素除去一个元素外均相同。所以，我们可以利用消元降阶法。

解 法一

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{提出}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)-m]{\text{各列加到第一列 再}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)-m \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加入各行}]{\text{第一行乘}(-1)}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)-m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(-m)^{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)-m\right]$$

若把行列式的第一列元素均看成两项之和，则可将行列式拆成两个同阶行列式之和，而后一行列式依第一行展开后与原行列式相同，这样我们可以利用递推法来计算 行 列 式的值。

法二

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1+0 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1+0 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1+0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} -m & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2-m & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & x_2 & x_3-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} + (-m)\Delta_{n-1}
$$

$$
=(-m)^{n-1}x_1-m\Delta_{n-1}
$$

由递推关系

$$
\Delta_{n-1}=(-m)^{n-2}x_2-m\Delta_{n-2}
$$

$$
\Delta_{n-2}=(-m)^{n-3}x_3-m\Delta_{n-3}
$$

$$
\cdots \qquad \cdots
$$

$$
\Delta_2=-mx_{n-1}-m\Delta_1
$$

代入$\Delta_n=(-m)^{n-1}x_1-m\Delta_{n-1}$得

$$
\Delta_n=(-m)^{n-1}x_1+(-m)^{n-1}(x_2+x_3+\cdots+x_n)+(-m)^{n}
$$

$$
=(-m)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i+(-m)^n
$$

$$
=(-m)^{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)-m\right]
$$

〔例3〕 计算

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n\end{vmatrix}$$

行列式除第1列与第n列外，各列元素相加后均为0。把各行加到第n行后，按第n行展开就可利用递推法。

解

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n\\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+2}a_1\begin{vmatrix}a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n\end{vmatrix}+\Delta_{n-1}$$

即 $\Delta_n=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n+\Delta_{n-1}$

$\Delta_{n-1}=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}+\Delta_{n-2}$

$\cdots \qquad \cdots$

$\Delta_{n-k}=(-1)^{n-k}a_1a_2\cdots a_{n-k}+\Delta_{n-k-1}$

$\cdots \qquad \cdots$

$\Delta_3=(-1)^3a_1a_2a_3+\Delta_2=-a_1a_2a_3+a_1a_2-a_1+1$

$$\therefore \quad \Delta_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_1 a_2 \cdots a_i$$

〔例4〕 计算n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

此行列式主对角线上的元素均相同，其余元素均有a。我们可以通过消元化成上三角或下三角行列式。此法这里不予介绍，请读者自己完成。我们给出利用升阶法计算此行列式的解题过程。

解 当$x=a$时，此行列式之值为0。

当$x \neq a$时，将D加一行一列变成$n+1$阶行列式。

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

第一行乘(-1)加其它各行，从$2,3,\cdots,n+1$列提出$(x-a)$后加入第一列

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^n\begin{vmatrix} 1 & \frac{9}{x-a} & \frac{9}{x-a} & \cdots & \frac{9}{x-a} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^n\begin{vmatrix} 1+\frac{na}{x-a} & \frac{a}{x-a} & \frac{a}{x-a} & \cdots & \frac{a}{x-a} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\ (x-a)^{n-1}$$

如何利用*laplace*定理与乘法公式计算行列式的值，我们举一个简单的例子加以说明。

〔例5〕 计算7阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 16 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 16 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 将第四行乘以(-1)加第三行，依前三行利用*laplace*定理

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 16 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

第一个行列式为三阶$Vandermond$行列式，设第二个行列式为D_1，可以利用消元计算D_1，但这里利用乘法公式计算

$$因\quad D_1 \cdot D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4^4$$

所以 $D_1 = 16$

故 $D=(3-2)(4-2)(4-3)\times 16 = 2\times 16 = 32$

从上面的例题分析和计算中可以看出，计算行列式的方法技巧性较强。因此，在计算行列式之前应认真仔细地考察行列式在构造上的特点，利用行列式的性质对其进行比较明显的变换后，再考察它是否符合上述提到的几种计算方法。复杂的行列式计算往往一次是不能成功的，要通过多次"分析""试算"才能实现，如果行列式形式不典型，一般我们

说先采用消元把行列式行（列）中的元素化为含有较多零元素的形式，用降阶来解决。因此，我们说消元降阶法是行列式计算中最基本的方法，但应注意在逐步降阶中，观察新行列式的特点，以求计算过程最简单最迅速。

2。Cramer法则　Cramer法则是行列式在解线性方程组中的一个重要应用。

对于n个变量n个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

我们可以利用其系数行列式D来判定其解的情况，我们有若$D\neq 0$，则方程组(1)有唯一解，并且其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D},\quad D_j=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$(j=1,2,\cdots,n)$$

即利用Cramer法则解上述方程组(1)，需计算$n+1$个n阶行列式。从Cramer法则，有下面的结论，若$b_1, b_2, \cdots, b_n$均为0，方程组(1)只有零解。有必要指出，在线性方程组一章中，有下面重要结论，$D\neq 0$是方程组(1)有唯一解的充分必要条件。利用上述结论，我们可以求解下述类型的方程组。