陆传赉 编著

随机过程习题解析

SUIJI GUOCHENG XITI JIEXI

北京邮电大学出版社
http://www.buptpress.com

随机过程习题解析

陆传赉　编著

北京邮电大学出版社
·北　京·

内 容 简 介

本书集编著者在随机过程学科对本科生与研究生30余年之教学实践，将工科、理科及经济或管理学科中常见的马尔可夫链、泊松过程与更新过程、二阶矩过程、平稳过程、高斯过程与布朗运动、窄带过程、马尔可夫过程，以及随机过程通过线性或非线性系统等内容中的典型例题加以解析论证或计算演释，通过读者学习理解，提高解题的论证思路和计算能力。

本书可作为高等学校本科生、研究生的教学辅导或参考书，也可作为相关工程技术人员的参考资料，同时对某些专业的考博学子本书也有一定的辅助作用。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程习题解析/陆传赉编著.—北京:北京邮电大学出版社,2004

ISBN 7-5635-0914-3

Ⅰ.随…　Ⅱ.陆…　Ⅲ.随机过程—高等学校—解题　Ⅳ.O211.6-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第087006号

出 版 者：北京邮电大学出版社（北京市海淀区西土城路10号）邮编：100876
发行部电话：(010)62282185　62283578(传真)

电子信箱：publish@bupt.edu.cn

经　　销：各地新华书店

印　　刷：北京源海印刷有限责任公司

开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32

印　　张：16.75

字　　数：481

印　　数：1—5 000

版　　次：2004年10月第1版　2004年10月第1次印刷

ISBN 7-5635-0914-3/O·83　　定　价：25.00元

如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

前　言

至今,国内外已出版了多种随机过程教材,适应着本科和研究生的教学需要。但是,相应的随机过程习题、解题方法与技巧之类教学辅导(参考)书尚属凤毛麟角,远不如众多的概率论与数理统计习题解法与技巧之类辅导书充斥着各地书店。随着科学技术的不断发展和研究生人数的不断增加,人们对于如何提高随机过程习题的解题思路和方法的迫切要求与日俱增。众所周知,学习和掌握随机过程这门学科不仅需要高等数学、高等代数和概率论方面的知识,而且较深入的内容还涉及到一般学生未曾学过的实变函数、测度论、泛函分析、拓扑学、随机分析与随机微(或积)分方程等内容;同时在求解随机过程习题时往往需要综合以往学过的知识,这就增加了解题的难度,甚至有时用一天的时间也解不出一二道习题,使学生们经常为之困惑,因而多次面陈本人,希望能够编写一本这方面内容的参考书以解其渴望。幸好北京邮电大学出版社也竭力支持本书的出版,故而本人愿结合30余年在随机过程学科对本科生与研究生之教学实践中积累的解题经验和方法,将数百道习题按内容分章编辑成书以飨读者。

本书之章节内容以本人编写的《工程系统中的随机过程》(电子工业出版社,2000年版.)一书前7章内容为蓝本,编写的习题绝大多数适合工科、理科、经济或管理学科本科或研究生阅读参考。由于篇幅所限,本书也仅编入随机过程总习题之一隅,仅够有关读者解渴而已。有些特殊专业或领域所需之习题不能照顾到,在此略表遗憾。

本书不少例题是首次编写的,也有不少例题的证明或解法与已出版过的书中方法不同。各章配有一定数量的练习题,并给出了提示或答案便于读者练习时参考。

在本书编写过程中，自始至终得到我校信息工程学院郭军院长的支持和鼓励，田宝玉、杨洁两位副院长经常对本书的编写加以关心和指导，学院里为本书的编写给予了一定的物质资助。我校理学院王玉孝教授曾给予不少帮助。此外，王蕴辉、兰淑平、崔新宇、谢绍群、严倍华诸同志为书稿的整理、打印和插图做了大量的工作；历届研究生方莉、李凤平、于凯、张宪力、侯书果、王民、赵船钢、杨波、尤明厚、王瑞霞、何辉霞、申志坚、徐洪志、孙军涛、何维、王艳鹏等人对若干例题的解答提供了一些有益的思路和方法。作者在此一并向上述支持、帮助过本书出版的同志们表示诚挚的谢意。

限于作者水平，不妥或错漏之处在所难免，恳请广大读者不吝赐教，以期提高和完善。

作　者

2004 年 4 月

目　　录

第一章　随机过程的基本概念

一、内容提要

（一）随机过程的定义

定义 1-1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若对每一个 $\omega\in\Omega$，总有一个参数 $t(\in T)$ 的函数 $X(t,\omega)$ 与之对应．于是，对于全体的 $\omega\in\Omega$，应有一族参数 t 的函数与之对应，将这一族函数称为随机过程，记为 $X_T=\{X(t,\omega),t\in T\}$．若 $\omega\in\Omega$ 固定时，则称 $X(t,\omega)$ 为随机过程 X_T 的样本函数（或规道，或实现）．其中 T 是一个参数集．

定义 1-2　已给概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及参数集 T，若对每一 $t\in T$，$X(t,\omega)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量（或可测函数），则称随机变量族 $X_T=\{X(t,\omega),t\in T\}$ 是定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一个随机过程．通常简记为 $\{X(t),t\in T\}$ 或 $\{X(t)\}$ 或 X_T．

注　参数集 T 可以是时间、高度、长度、重量以及向量等集合．一般认为 T 是作为时间的集合．若 $T\triangleq\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 或 $T\triangleq\mathbf{Z}^+=\{0,1,2,\cdots\}$，此时的随机过程称为随机变量序列或离散时间的随机过程．若 $T=[a,b]$ 或 $T\triangleq\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，则称 X_T 为连续时间的随机过程．

将随机过程 X_T 的取值区域，即一族随机变量 $X(t)(t\in T)$ 所有可能取值的集合称为该过程的状态空间，记为 $\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{I}$）．$\boldsymbol{E}$ 中元素称为状态．状态空间中元素可以是有限或无限多个．$\boldsymbol{E}$ 可以是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 1)$ 中某一集合，也可以是某个函数空间或其他抽象空间．当 $\boldsymbol{E}$ 是复数集合时，称相应的随机过程 X_T 为复随机过程．

（二）随机过程的分布及其数字特征

1. 随机过程的分布

已给随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$，称

$$F_X(t,x)=P(X(t)\leqslant x),\quad x\in\mathbf{R} \tag{1-1}$$

为过程 X_T 在时刻 $t(\in T)$处的一维分布函数. 若存在非负的连续函数 $f_X(t,x)$，使得

$$F_X(t,x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t,u)\mathrm{d}u,\quad x\in\mathbf{R}, \tag{1-2}$$

则称 $f_X(t,x)$是过程 X_T 在时刻 $t(\in T)$处的一维分布密度，并且在 $f_X(t,x)$的连续点 x 处有

$$f_X(t,x)=\frac{\partial F_X(t,x)}{\partial x}. \tag{1-3}$$

对任意的 $n\geqslant 1$ 及任意的 T 中的元 $t_k(1\leqslant k\leqslant n)$，$n$ 个随机变量 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$的 n 维联合分布函数定义为

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=P(X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n).\end{aligned} \tag{1-4}$$

若存在 n 元非负函数 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使满足

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n,\end{aligned} \tag{1-5}$$

则称 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$是相应的 n 维联合分布密度. 在其 n 维连续点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$处有

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}, \tag{1-6}$$

并称

$$\boldsymbol{F}\triangleq\{F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad t_k\in T,1\leqslant k\leqslant n;n\geqslant 1\}$$

为随机过程 X_T 的有限维分布函数族. 它具有如下性质：

1° 对称性　对于$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(N_1,N_2,\cdots,N_n)$有

$$F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(t_{N_1},t_{N_2},\cdots,t_{N_n};x_{N_1},x_{N_2},\cdots,x_{N_n}). \tag{1-7}$$

$2°$ 相容性　对任一 $m<n$,有

$$
\begin{aligned}
& F(t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_m) \\
= & F\Big(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_m;\underbrace{\infty,\cdots,\infty}_{n-m}\Big). \qquad (1\text{-}8)
\end{aligned}
$$

Kolmogorov 存在定理　已给参数集 T 及满足相容性条件的有限维分布函数族 $\boldsymbol{F}$,则必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$,使 X_T 的有限维分布函数族与已给的有限维分布函数族相重合.

2. 随机过程的数字特征

先设随机过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$为实随机过程.则可定义(当下述各项积分存在时):

均值(期望)函数

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= EX(t) = \int_\Omega X(t,\omega)P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(t,x)\mathrm{d}x. \qquad (1\text{-}9)
\end{aligned}
$$

(自)相关函数

$$
\begin{aligned}
R_X(s,t) &= EX(s)X(t) = \int_\Omega X(s,\omega)X(t,\omega)P(\mathrm{d}\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\mathrm{d}F(s,t;x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(s,t;x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (1\text{-}10)
\end{aligned}
$$

(自)协方差函数

$$
\begin{aligned}
C_X(s,t) &= E[X(s)-m_X(s)][X(t)-m_X(t)] \\
&= R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t). \qquad (1\text{-}11)
\end{aligned}
$$

当 $s=t$ 时,有

$$
R_X(t,t)=EX^2(t)=\Psi_X^2 \quad (\text{均方值}) \qquad (1\text{-}12)
$$

及

$$
C_X(t,t)=R_X(t,t)-[m_X(t)]^2=DX(t)=\sigma_X^2(t) \quad (\text{方差}). \qquad (1\text{-}13)
$$

若 X_T 是复随机过程,则有

$$R_X(s,t)=EX(s)\overline{X(t)}, \tag{1-14}$$

$$\begin{aligned}C_X(s,t)&=E[X(s)-m_X(s)][\overline{X(t)}-\overline{m_X(t)}]\\&=R_X(s,t)-m_X(s)\overline{m_X(t)},\end{aligned} \tag{1-15}$$

$$\sigma_X^2(t)=E|X(t)-m_X(t)|^2. \tag{1-16}$$

若 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 与 $Y_T=\{Y(t),t\in T\}$ 是定义在同一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的两个实平稳过程，对 $\forall s,t\in T$，记 $X(s)$ 与 $Y(t)$ 的联合分布函数与联合分布密度各为 $F_{XY}(s,t;x,y)$ 与 $f_{XY}(s,t;x,y)$，当 $E|X(s)Y(t)|<\infty$ 时，定义：

互相关函数

$$\begin{aligned}R_{XY}(s,t)&=EX(s)Y(t)=\int_\Omega X(s,\omega)Y(t,\omega)P(\mathrm{d}\omega)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,\mathrm{d}F_{XY}(s,t;x,y)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{XY}(s,t;x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{1-17}$$

互协方差函数

$$\begin{aligned}C_{XY}(s,t)&=E[X(s)-m_X(s)][Y(t)-m_Y(t)]\\&=R_{XY}(s,t)-m_X(s)m_Y(t).\end{aligned} \tag{1-18}$$

对 $\forall s,t\in T$，当 $R_{XY}(s,t)=0$ 时，称过程 X_T 与 Y_T 相互正交(即 $X(s)\perp Y(t)$).

对 $\forall s,t\in T$，当 $C_{XY}(s,t)=0$ 时，称过程 X_T 与 Y_T 互不相关，此时有 $R_{XY}(s,t)=m_X(s)m_Y(t)$.

显然，当且仅当 $\forall s,t\in T$，$EX(s)$ 与 $EY(t)$ 至少有一个为 0 时，则 X_T 与 Y_T 的互不相关性与相互正交性等价.

若 $\forall n\geqslant 1$、$m\geqslant 1$ 及 T 中的 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 与 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 有

$$\begin{aligned}&F_{XY}(s_1,s_2,\cdots,s_n,t_1,t_2,\cdots,t_m;x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_m)\\&=F_X(s_1,s_2,\cdots,s_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)F_Y(t_1,t_2,\cdots,t_m;y_1,y_2,\cdots,y_m),\end{aligned} \tag{1-19}$$

则称两过程 X_T 与 Y_T 相互独立.

若 X_T 与 Y_T 相互独立，则必互不相关；反之未必成立. 当且仅当

X_T 与 Y_T 是联合高斯过程时，它们的相互独立性与互不相关性等价.

对于复随机过程有类似的性质.

（三）随机过程的特征函数

1. 一元特征函数

设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$是实随机过程，对固定的 $t\in T$，若 $X(t)$的分布函数与分布密度各为 $F_X(t,x)$与 $f_X(t,x)$，则称

$$\varphi_X(v) = Ee^{jvX(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx}\,dF_X(t,x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} f_X(t,x)\,dx \quad (其中\ j=\sqrt{-1}) \qquad (1\text{-}20)$$

为 $X(t)$的特征函数.

若 $X(t)$有分布列为 $p_k=P(X(t)=x_k)$，则可写

$$\varphi_X(v) = \sum_k p_k e^{jvx_k}. \qquad (1\text{-}21)$$

容易验证，$\varphi_X(v)$有下列性质：

1° $\varphi_X(v)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续，且 $|\varphi_X(v)|\leqslant\varphi_X(0)=1$，$\varphi_X(-v)=\overline{\varphi_X(v)}$.

2° 若 $Y(t)=aX(t)+b$（a、b 为常数），则

$$\varphi_Y(v)=e^{jvb}\varphi_X(av). \qquad (1\text{-}22)$$

3° 若 $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$是 n 个相互独立的随机变量，$t_k\in T$，$1\leqslant k\leqslant n$，则 $\eta=\sum_{k=1}^{n}X(t_k)$ 的特征函数为

$$\varphi_\eta(v) = \prod_{k=1}^{n} Ee^{jvX(t_k)} = \prod_{k=1}^{n}\varphi_X(t_k). \qquad (1\text{-}23)$$

4° 对固定 t，若 $E|X(t)|^n<\infty$，则 $X(t)$的特征函数$\varphi_X(v)$是 $k(\leqslant n)$次可导的，且成立

$$E[X(t)]^k=(-j)^k\varphi_X^{(k)}(0), \quad k\leqslant n. \qquad (1\text{-}24)$$

5° 逆转公式：设对固定 t，$X(t)$的分布函数与特征函数分别为 $F_X(t,x)$与 $\varphi_X(v)$. 当 $x_1<x_2$ 为 $F_X(t,x)$的连续点时，有

$$F_X(t,x_2) - F_X(t,x_1) = \frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}\frac{e^{-jvx_1} - e^{-jvx_2}}{jv}\varphi_X(v)dv.$$
(1-25)

特别地，若 $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(v)| dv < \infty$，且∃$X(t)$的分布密度为 $f_X(t,x)$，则对一切 $x\in \mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，有

$$f_X(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jvx}\varphi_X(v)dv. \quad (1\text{-}26)$$

2. 多元联合特征函数

设 $X_T=\{X(t),t\in T\}$ 是实随机过程，对 T 中固定的 $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n(n>1)$，$n$ 元随机变量 $X=(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$ 的 n 维联合分布函数为 $F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则称

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n) = E\left\{\exp\left[j\sum_{k=1}^{n}v_kX(t_k)\right]\right\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{j\sum_{k=1}^{n}v_kx_k\right\}dF(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
(1-27)

为 n 元随机变量 X 的 n 元联合特征函数. 当 X 有相应的 n 维联合分布密度 $f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$时，则可写

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{j\sum_{k=1}^{n}v_kx_k\right\}f(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n.$$
(1-28)

它有如下一些性质:

1° $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)$在 $\mathbf{R}^n$ 中一致连续，并且

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;-v_1,-v_2,\cdots,-v_n)=\overline{\varphi}(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)\\&|\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)|\leqslant\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;0,0,\cdots,0)=1.\end{aligned}\right\}$$
(1-29)

2° 设 $(X(t_{i_1}),X(t_{i_2}),\cdots,X(t_{i_k}))$ 是由 n 元随机变量 $X=(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$的某 k 个分量组成的 $k(\leqslant n)$元随机

变量，相应的 k 维联合分布函数为 $F(t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_k};x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})$，它恰为 $F_X(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对应于该 k 元随机变量 $(X(t_{i_1}),X(t_{i_2}),\cdots,X(t_{i_k}))$ 的边缘分布. 其 k 元联合特征函数为

$$\begin{aligned}&\varphi(t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_k};v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k})\\&=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;u_1,u_2,\cdots,u_n)\Big|_{\substack{u_l=v_l,\text{如}l=i_1,i_2,\cdots,i_k.\\u_l=0,\text{其他的}l}}\end{aligned}\tag{1-30}$$

3° $X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n)$ 相互独立的充要条件是

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)=\prod_{k=1}^{n}E\mathrm{e}^{\mathrm{j}v_kX(t_k)}=\prod_{k=1}^{n}\varphi(t_k;v_k).\tag{1-31}$$

4° 若对正整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，存在联合原点矩 $E[X^{k_1}(t_1)X^{k_2}(t_2)\cdots X^{k_n}(t_n)]$，则

$$\begin{aligned}&E[X^{k_1}(t_1)X^{k_2}(t_2)\cdots X^{k_n}(t_n)]\\&=(-\mathrm{j})^{\sum\limits_{l=1}^{n}k_l}\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;v_1,v_2,\cdots,v_n)}{\partial^{k_1}v_1\partial^{k_2}v_2\cdots\partial^{k_n}v_n}\Bigg|_{\substack{v_k=0\\1\leqslant k\leqslant n}}.\end{aligned}\tag{1-32}$$

5° 设 a_k、b_k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 是非零常数，则 n 元随机向量 $(a_1X(t_1)+b_1,a_2X(t_2)+b_2,\cdots,a_nX(t_n)+b_n)$ 的 n 元联合特征函数为

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;a_1v_1,a_2v_2,\cdots,a_nv_n)\exp\left(\mathrm{j}\sum_{l=1}^{n}b_lv_l\right)\tag{1-33}$$

6° 设 $a_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是非零常数，则随机变量 $\eta=\sum\limits_{l=1}^{n}a_lX(t_l)$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(v)&=E\left\{\exp\left[\mathrm{j}\sum_{l=1}^{n}a_lX(t_l)v\right]\right\}\\&=\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n;a_1v,a_2v,\cdots,a_nv).\end{aligned}\tag{1-34}$$

（四）随机过程的分类

1. 按照状态和参数分类

(1) 若随机过程的状态连续，而参数也连续的，称其为连续随机

过程.

(2) 若随机过程的状态离散,而参数连续的,称其为离散过程.

(3) 若随机过程的状态连续,而参数离散的,称其为连续随机变量序列.

(4) 若随机过程的状态离散,而参数也离散的,称其为离散随机变量序列.

2. 按照过程的性质分类

(1) 二阶矩随机过程

已给随机过程(复或实的)$X_T=\{X(t),t\in T\}$,若对每一 $t\in T$,均有 $E|X(t)|^2<\infty$,则称 X_T 是一个二阶矩过程.

例如,高斯(Gauss)过程、维纳(Wiener)过程,以及泊松(Poisson)过程、宽平稳过程等均是二阶矩过程(详见以后各章).

(2) 严平稳过程

已给过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$,若 $\forall n\geqslant 1$ 及 $t_i,t_i+\tau\in T(1\leqslant i\leqslant n)$使得随机向量$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))$与$(X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\cdots,X(t_n+\tau))$具有相同的 n 维分布,即

$$\begin{aligned}&F(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=F(t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau;x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{aligned}\tag{1-35}$$

则称 X_T 是一个严(或狭义,或强)平稳过程.

(3) 独立增量过程、平稳增量过程和正交增量过程

已给过程 $X_T=\{X(t),t\in T\}$,若 $\forall n\geqslant 2$ 及 T 中任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$,增量 $X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$是相互独立的,则称 X_T 是一个独立增量过程.

若对任意的 $t_i+\tau,t_i\in T(1\leqslant i\leqslant 2)$,使得 $X(t_2+\tau)-X(t_1+\tau)$与 $X(t_2)-X(t_1)$具有相同的概率分布,则称 X_T 是具有平稳增量的过程.

若 X_T 是二阶矩过程(复的或实的),且对 T 中任意的$t_1<t_2\leqslant t_3<t_4$,有

$$E[X(t_2)-X(t_1)][\overline{X(t_4)}-\overline{X(t_3)}]=0,\tag{1-36}$$

则称 X_T 是正交增量过程.

(4) 马尔可夫(Markov)过程.

在非独立的随机过程中，有一类很弱相关性的过程，其过程的“将来”状态特性仅仅依赖于“现在”状态而与“过去”状态无关. 这种性质称为马尔可夫性(或无后效性，或无记忆性)，具有此类性质的过程称为马尔可夫过程；而且按照状态是离散还是连续又可分为它是马尔可夫链或是马尔可夫过程. 详见第二章.

(5) 更新过程

若$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$是具有共同分布为 F 的非负独立随机变量序列，约定 $F(0)=P(X_n=0)=0$，记

$$\mu = EX_n = \int_0^{\infty} x\,\mathrm{d}F(x). \tag{1-37}$$

由 $X_n \geqslant 0$ 及 $F(0)=0$，可知 $0<\mu\leqslant\infty$. 置

$$S_0=0, \quad S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n=1,2,\cdots$$

及

$$N(t)=\sup\{n, S_n\leqslant t\}, \quad t\geqslant 0, \tag{1-38}$$

那么称计数过程$\{N(t), t\geqslant 0\}$是一个更新过程.

(6) 鞅过程

先设参数集 $T=\{1,2,3,\cdots\}$，若随机变量序列 $X=\{X(n), n\in T\}$满足条件：

(a) $E|X(n)|<\infty, n\in T$;

(b) $E\{X(n+1)|X(1),X(2),\cdots,X(n)\} \xlongequal{\text{a. e}} X(n), n\geqslant 1,$ (1-39)

则称 X 是一个离散参数鞅.

当将条件(b)中的“=”换成“$\leqslant$”(或“$\geqslant$”)时，则称 X 为离散参数上鞅(或下鞅).

再设 $T=(0,\infty)$，若随机过程 $X=\{X(t), t\in T\}$满足条件：

(c) $E|X(t)|<\infty, t\in T$;

(d) $E\{X(s)|X(u), u\leqslant t\} \xlongequal{\text{a. e}} X(t), s>t,$ (1-40)

则称 X 是一个连续参数鞅.