http://www.phei.com.cn

混沌振子

检测引论

李 月 杨宝俊 著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

混沌振子检测引论

李　月　杨宝俊　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

将非线性混沌振子用于微弱信号检测，是一种处于探索中的时域检测方法。本书首次对混沌检测系统用于强噪声背景下的信号检测问题进行了较为系统的论述，包括给出典型信号的数学模型，分别对白噪声、色噪声背景下的微弱信号进行检测，讨论工作原理和进行详尽的仿真实验结果分析，应用 Melnikov 函数、Lyapunov 指数研究其混沌判据及系统分叉阈值，同时还提出了系统的定量分析方法。由此希望探索一条时域微弱信号检测的新途径。

本书读者对象为在各种科学研究、工程技术领域中从事微弱信号检测的科技工作者，也可作为高等院校各相关专业的研究生或高年级本科生的教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

混沌振子检测引论/李月，杨宝俊著. —北京：电子工业出版社，2004.5
ISBN 7-5053-9839-3

I. 混… II. ①李… ②杨 III. 信号检测 IV. TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 032131 号

责任编辑：张　榕（zr@phei.com.cn）
印　　刷：北京增富印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×980　1/16　印张：12.25　字数：313 千字
印　　次：2004 年 5 月第 1 次印刷
印　　数：4 000 册　　定价：25.00 元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：（010）68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前　言

近年来作为非线性科学的重要内容的混沌理论，在混沌普适性、混沌数理特征、混沌成因机制、混沌应用技术等方面，取得了长足进展。其中，混沌振子法用于强噪声背景下的有效信号检测是一个热点课题，也是一种处于探索中的时域检测方法。其应用领域包括气象学、生物学、电子学、自动控制、数量经济学、地学和军事学等。本书是作者几年来就混沌系统的微弱信号检测原理、混沌系统检测阈值等方面从事科研工作的基本总结。对该研究工作提供支撑的科研项目是吉林省科技厅批准的自然科学基金类项目："强噪声背景下周期信号的混沌检测方法研究"，中国石油化工股份有限公司批准的"十五"攻关项目"中国东部陆缘中区区域构造和成盆规律综合研究"，以及国家自然科学基金"提高地震资料信噪比的混沌振子法研究"等。其中的研究结果陆续发表在《物理学报》、《科学通报》、《Chinese Physics》、《地球物理学进展》等学术刊物上，经进一步总结提炼构成本书的主要内容。本书对混沌检测系统用于强噪声背景下信号检测问题进行了较为系统的论述。包括给出典型信号的数学模型，讨论工作原理和进行详尽的仿真实验结果分析，同时提出系统的定量分析方法。由此希望探索出一条时域微弱信号检测的新途径。本书共分 7 章。第 1 章论述混沌理论的发展历程及广泛应用，给出混沌的定义及有关定性的理解，扼要概述混沌控制、混沌同步及量子混沌的基本概念、基本思想及基本方法。第 2 章综述微弱信号检测方法的发展历程、现状，对微弱信号检测方法进行归类与总结，并且着重阐述了目前时域信号处理的现状及特点。第 3 章利用混沌振子对强噪声下的正弦信号进行检测。阐述混沌检测的物理机理，建立对正弦信号敏感的混沌检测系统，分别对白噪声、色噪声背景下的正弦信号进行检测。应用 Melnikov 函数、Lyapunov 指数研究其混沌判据及系统分叉阈值。实现纳伏级正弦信号的混沌检测。第 4 章用混沌振子检测湮没在噪声中的方波信号。将 Duffing 方程作为方波信号混沌检测模型，并证明其混沌阈值；给出白噪声、色噪声背景下的方波信号仿真实验结果；实现纳伏级方波信号的混沌检测。第 5 章对规则周期信号进行混沌检测。给出实现规则周期信号混沌检测的数学模型及系统运行轨迹；图示若干规则周期信号混沌检测的相轨迹图；并将常规方法与混沌理论相结合实现微弱信号检测。第 6 章通过对混沌检测的统计特性分析，得出系统输出相关函数的特点，验证了系统稳定性与 Lyapunov 指数的关系，为混沌检测可以大幅度提高信噪比提供了理论依据。第 7 章提出一种利用神经网提取混沌噪声背景中的微弱正弦信号的方法。该方法根据混沌延迟嵌入定理，采集混沌信号的一步预测模型，使其与混沌背

景具有相同的动力学特征。同时采用梳状滤波器对预测误差进行滤波，从而将混沌噪声背景下的微弱正弦信号检测出来。总之，混沌振子检测作为一种时域检测方法的新尝试显示了它独具的优势与广阔的发展前景。

与作者共同研究的人员有林红波博士、赵雪平博士、李亚峻博士、张宾博士、路鹏硕士、袁野硕士等。作者由衷地对该项研究给予指导和支持的中科院滕吉文院士、刘光鼎院士、马宗晋院士以及陈佳圭研究员、张中杰研究员、石要武教授、林君教授、曾新吾教授、牛滨华教授、孙建国教授、张兴洲教授、申桂香教授、英国 British Geological Survey 的刘恩儒教授、西班牙 Zaragoza 大学的 Juse Badal 教授、美国 Stanford 大学的 Simon Klemperer 教授表示诚挚的谢意。也对有关支持单位表示感谢。张榕女士为提高书的质量进行了艰辛的工作，作者特别表示敬谢。

欢迎读者批评指正。

作　者

目 录

第 1 章

混沌理论研究的基本进展

1.1 混沌理论发展简史

混沌理论是非线性科学最重要的成就之一，与相对论、量子力学一起成为 20 世纪物理学的三次重大革命，甚至有人认为是“20 世纪科学将永远铭记的三件事”[32][40][54]。相对论、量子力学的诞生和发展与经典牛顿力学有关，而混沌理论的发展与拉普拉斯决定论的经典理论有关。混沌（Chaos）一词在《Oxford Student's Dictionary of Current English》中的解释为“Complete Absence of Order or Shape”，意指完全无序无形；作为科学名词最早出现在 1975 年（Li and York）。在《辞海》（词语分册，上）中，“混”意为水势盛大，“沌”意为水势汹涌，二字合成意指“古人想像中的世界开天辟地前的状态”，即“混沌相连，视之不见，听之不闻”；《现代汉语词典》解释混沌为“传说中指宇宙形成之前模糊一团的景象”，即世界与宇宙相通。《易纬·乾凿度》中说“气似质具而未相离谓之混沌”，又说“易始于太极，太极分而为二，故生天地”；唐朝孔颖达注言“太极谓天地未分之前，元气混而为一即是太初太一也”；查太初一词解为“太初者，气之始也；太始者，形之始也；太素者，质之始也”，太初又可称为太虚，构成宇宙的元气又称为太真、太一。由此可推论宇宙形成的基本过程是：太初（太极）→太始和太素→混沌→太极分，以及混沌是开天辟地、宇宙形成前的状态。我国论述混沌不晚于国外，大致限于宇宙学领域。

古希腊对人类文明的贡献与中国齐名。就宇宙学和混沌理论而言，古希腊学者不仅具有与牛顿的“上帝是第一因”完全不同的第一宇宙论原则，即世界表现为纵横交错的轨道，以及纯粹出自偶然的交织在一起的事件，而且系统地提出，混沌是原始的混乱和不成形的物质，宇宙空间从无限到无限，时间从永恒到永恒，以及无际无涯的整个存在。这与西方主要宗教一直坚持认为宇宙是上帝在过去某个特定时刻的创造截然不同。

德国的康德（Kant）于 18 世纪末提出太阳系起源的“星云假说”，取消了上帝的“第一推动”，又提出“大自然是自身发展的，没有神来统治它的必要”。并唯物地指出“在人们研究的各种自然物的起源中，宇宙体系的起源、天体的产生及其运动的原

因是人们可望首先得到彻底而正确的认识的”，公开宣告“给我物质，我就用它造出一个宇宙来！这就是说，给我物质，我将给你们指出，宇宙是怎样由此形成的”。康德是考察宇宙从混沌到有序的演化的第一位学者[32]。

法国数学家庞加莱（Poincaré H.,1893）从不可积动力学概念出发，率先指出对相空间中动力学的全局性问题进行定性研究的重要性；并通过对如太阳、月亮和地球三体问题的研究，把动力学系统和拓扑学有机结合，得出在一定范围内其解是随机的（此即保守系统中的混沌）。从而使他成为了世界在动力学系统中最先确定存在混沌的可能性的第一位学者[32]。

美国气象学家洛伦兹（Lorenz E.）[121]首次在一个确定性系统中从数值上得到混沌解，从而揭开了对混沌问题进行深入研究的序幕。这位 M.I.T.的气象系学生从 1948 年起在该校做博士后工作，主要兴趣在全球和大陆尺度的大气结构动力学上。这位高材生逐渐发现统计天气预报的动力学预报更具有天气学特征，因为统计预报是基于对过去所发生的事情的观测，而不是物理原理。在数值天气预报计算中，他发现了非周期解集合必须具有对初始条件的敏感的依赖性。在工作中所使用的是 Royal-McBee LGP-30 计算机，其内存为 4 096 个 32 位字符，计算一次乘法大约需要 17ms。经过种种周折，洛伦兹于 1963 年在 J.Atmos. Sci.上发表了“Deterministic Nonperiodic Flow”，公布了在一般的条件下，没有周期性就意味着有限的预测能力，而不仅仅是发现了带有非周期解的特殊系统。同时在世界上第一次给出混沌理论中特有的奇怪吸引子（Strange Attractor），亦被拓扑学家 R.F.Williams 称之为 Lorenz 扭结（Knots）。该吸引子的外形也可能是蝴蝶效应提法的一个因素（这位动力气象学家对初始条件的敏感依赖性的象征，曾早于蝴蝶用海鸥）。试想这篇 1963 年的文章如果发表在《Amer.Math.Mothly》上，所产生的理论效应一定超过“龙卷风”。[54]

1967 年斯梅尔（Smale S.）发表了“Differentiable Dynamical Systems”，提出判定存在混沌动力学性质的不变集的一种方法，即去证明该系统具有 Smale 马蹄型变换。以后被发展为对于常微分方程系统，可通过建立庞加莱映射把流问题化为映射问题去研究是否存在 Smale 马蹄意义下的混沌不变集，并且不受维数限制。这项贡献不仅首次对于动力学混沌的出现做了拓扑学的形象说明，同时也为其他学科的应用奠定了重要的理论基础。

当美国数学家约克（Yorke J.A.）发现洛伦兹发表在气象学杂志里的那篇文章时，他一方面理解了该文的重要价值，另一方面立刻寄复印件给好朋友斯梅尔（Smale S.）。很快，有关的学者都看到了 10 年前这位气象学家就发现大家一度认为数学上不可能出现的一类混沌。经过进一步努力，约克和美籍华人学者李天岩（1975）共同发表了具有重要价值的文章“Period Three Implies Chaos”。文中以数学的严格性分析了系统的混沌类行为，即证明在任意一维系统中，只要出现规则的周期-3，同一个系统也必然会给出

其他任意长的规则周期，以及完全混沌的循环。即深刻地提示了从有序到混沌的演化过程（参见 1.2 节概念库的（18））。约克给物理学家们发了这样的信息：混沌无处不在，它是稳定的，是有结构的。这样“混沌”一词便在近代学术意义下正式出现了。

美国学者费根鲍姆（Feigenbaum）性情怪异，具有深厚的研究底蕴，能够解决许多科学家难以解决的科学问题，29 岁即成为洛斯阿拉莫斯国家实验室的学术顾问。从 1974 年开始，这位学者研究他认为比获诺贝尔奖的科学问题还深刻的问题——混沌。这个时间并不算早，因为与此同时还有斯梅尔和他的集体、梅（Mag R.）（普林斯顿大学的一位种群生物学家），以及曼德勃罗（Mandelbrojt B.）（发现一族几何形状——犬牙交错、缠结纷乱、劈裂破碎、扭曲断裂等是自然界中的一个组织原则）、法国数学物理学家茹厄勒（Ruelle D.）（提出流体中的湍流或许与一种被他称为奇怪吸引子的稀奇古怪的无限缠结的抽象有某种关系）等。经过每天睡两个小时的不停工作，费根鲍姆取得了划时代的成果，即发现了倍周期分叉现象中的标度性和普适常数，所建立的混沌普适性理论，不仅定性而且定量；不仅是结构上的，而且是度量上的；不仅表现在模式中，而且表达为精确的数字。然而如此重要的科学理论结果却被最高学术刊物的主编们定为不宜发表。于是，费根鲍姆利用演讲和预印本传播了他的理论核心。[50]

如同在其他科学领域一样，俄罗斯（前苏联（前俄国））的科学家们在混沌理论乃至非线性科学领域中取得了卓越的成就。20 世纪五六十年代，俄文是大学必修的外语，现已改为英文。在与混沌理论研究相关的范畴内，俄罗斯本土的科学家，如朗道（Landau L.,1994）提出层流转变为湍流的机制可能是多次非线性分叉所致；1954 年柯尔莫戈洛夫（Колмогоров A.）提出，莫斯科大学的阿诺尔德（Арнольд,B.,1961）（前者的学生）和纽约大学的摩哲（Mosers., 1962）独立证明了 KAM 定理，这是对不可积哈密顿系统采用微扰方法进行渐近动力学行为研究的一个重大突破。另外提出了在判别混沌现象和一系列科学计算、众多学科应用的 Lyapunov（俄 Ляпунов A.M.）指数和柯尔莫戈洛夫熵，等等[11][106][107][63][64][65][133]。中国学者郝柏林、郑伟谋在莫斯科国立大学 Alekseev、Yakobson（1981）将符号动力学应用于混沌研究的基础上，开始将符号动力学从一维系统推广到二维系统的研究。[47]

1.2 混沌理论的（简化）概念库

混沌理论作为非线性科学的重要分支，具有丰富的内涵和广博的外延空间。本章叙述了混沌理论的基本进展。为帮助读者进一步钻研，建立了一个简化的混沌理论概念库，其中包括一些基础说明。之所以“简化”，是因为混沌理论有几百个概念[51]，现仅抽取 59 个出现次数较多的概念列出。

（1）吸引子，Attractor。在一个耗散系统中，不属于任何更大极限集，且无轨道。

由其发出的极限集，包括定量吸引子、周期吸引子、拟周期吸引子和混沌吸引子。[54][22]

（2）吸引域（盆），Basin of Attraction。位于趋近于一个给定吸引子的轨道上的所有点所组成的集合。这是一个渐近吸引的混沌集的开邻域，称之为该吸引子的吸引域。[54]

（3）奇怪吸引子，Strange Attractor。有分形结构的吸引子，与一适当的流形相交为一个 Cantor 集的吸引子。奇怪吸引子是轨道不稳定和耗散系统容积收缩两种系统内在性质同时发生的现象。保守系统由于容积保持而不能出现奇怪吸引子。[54][1]

（4）洛伦兹吸引子，Lorenz Attractor。这是奇怪吸引子的一种，在时间演化中包括一个不稳定的固定点，其形态犹如蝴蝶开翼。Lorenz E.N.，气象学家，是美国 M.I.T 名誉教授，被世人称为“混沌之父”。

（5）吸引集，Attracting Set。在一个耗散系统中，由所有轨道的极限集及从该集出发的轨道上的所有点组成的集合。[54]

（6）混沌，Chaos。在物理系统中混沌的特征：发生在确定系统中的随机现象；短期行为是可预测的随机现象；长期行为是不可预测的随机现象；具有一个确定的结构。

（7）确定性混沌，Deterministic Chaos。由确定性规律所产生的随机行为，是简单规律反复作用形成的复杂的不可预测的现象。

（8）随机混沌，Random Chaos。系统的运动既有随机性又有混沌态，即系统同时具有内在随机性和外在随机性。由于用 k-熵（见本概念库）判断系统的随机性和混沌态不够充分，而采用随机敏感函数；对于随机混沌状态的系统，随机敏感函数的均值和方差均随时间增加而呈指数增加，即不收敛。另外，鉴别随机混沌也可用分维、容量维及 Melnikov 法等。[1]

（9）超混沌，Hyperchaos。系统的 L-指数谱中正值数大于 1，即至少在两个独立方向上的轨道扰动具有不稳定性。[32][51]

（10）量子混沌，Quantum Chaos，量子系统中所具有的混沌态。有界量子系统虽然不能表现出长时间的混沌行为，却仍能有短期的混沌行为。量子混沌研究的中心内容并非根据经典混沌的定义，从理论上分析量子混沌的有无，而是通过对量子现象的分析，得出量子不规则运动的基本特征，并阐明它与经典混沌之间的联系。到目前为止所得到的结果，还不能证明量子力学中确实存在着规则和不规则运动两种不同性质的运动。[7]

（11）混沌海，Chaos Sea。在 Homilton 系统中，一个混沌轨道所趋近的集合。[54]

（12）随机共振，Stochastic Resonance。随机共振的概念是由邦济[Benzi R.]等人在研究古气候冰川问题时提出的。对于非线性系统，随机力和信号之间所存在的相长效应，即存在某一最佳输入随机力强度，使系统产生最大信噪比的输出。系统对输入信

号的非线性响应在随机共振中起重要作用。[10]

（13）蝴蝶效应，Butterfly Effect。某个动力系统状态的一个微小改变所引起的后续状态与没有微小改变时的后续状态明显不同的现象，即敏感依赖性。洛伦兹在研究天气预报过程中发现的蝴蝶效应发表在《Journal of the Atmospheric Scinece》Vol.20（1963）上。[21] 1979 年 12 月 29 日，在华盛顿召开的美国科学促进会上，这位“穿着气象学家外衣的数学家”曾提出“一只蝴蝶在巴西扇动翅膀会在得克萨斯引起龙卷风吗？”的预言性问题，“蝴蝶”一词即由此而来。[54][50]

（14）分叉，Bifurcation。若一动力系统依赖于某参数，当该参数通过一特定值时，系统的定性行为会发生变化。这种定性行为的变化称为分叉。分叉有三种类型：叉型分叉、霍普夫（Hopf）分叉和鞍-结分叉（切分叉）。[51][22]

（15）复分叉，Complex Bifurcation。动力系统函数 $\boldsymbol{X}$ 若为向量，由雅可比矩阵可知，相应的一对复共轭（非实）特征值穿越虚轴，将出现标准的霍普夫分叉，也称为复分叉。[53]

（16）自相似集，Self-Similar Set。该集合的一部分如果被放大，与原有的集合完全一样。[54]

（17）倍周期，Period-Doubling。也可称之为倍周期分叉（Period-Doubling Bifurcation）。由一个具有周期性的典型轨道的系统向另一个也具有周期性的典型轨道但其周期长度却增加了一倍的系统分叉（叉型分叉）。由上述定义的一个倍周期分叉的无穷序列，最后趋向于混沌运动。[54]

（18）周期-3，Period-3。1975 年马里兰大学的 Li T.Y.（李天岩）和 J.Yorke 共同发表了“Period Three Implies Chaos”的著名论文。两位作者发现，对任意一维系统而言，存在周期-3 的特解就意味着还存在一个无限的周期解集，同时还存在一个无限的非周期解集。“周期-3”即由此而来。[54][50]

（19）康托尔集，Cantor Set。在一条直线或一条曲线上的一个点集合，其中任意两点之间总有该点集的其他一些点及有限宽度的间隙，亦可向高维推广。康托尔集具有自相似性，并且构成分形系统。[54][11]

（20）同宿轨道，Homoclinic Orbit；异宿轨道，Heteroclinic Orbit；同宿点，Homoclinic Point；异宿点，Heteroclinic Point。从一个鞍点到另一个鞍点的轨线称为异宿轨道（或称鞍点连接）。当两个鞍点合为一个鞍点时，从一个鞍点到鞍点本身的轨线则称为同宿轨道。同宿点是同一鞍点的稳定流形 W_b^s 和不稳定流形 W_b^u 的交点；异宿点是鞍点 a 的稳定流形 W_a^s 和鞍点 b 的不稳定流形 W_b^u 的交点。已经证明，只要两个流形相交于一个同宿点或异宿点，它们就一定相交于无穷多个同宿点与异宿点。当两个鞍点的稳定流形和不稳定流形之间无穷多次缠结在一起时的现象称为异宿缠结，它是一种伸长和折叠的机制，标志着混沌的产生。[22][11]

（21）混沌振荡，Chaotic Oscillation。对于耗散动力学系统，可能存在三种运动状态，即周期振荡、拟周期振荡和非周期的混沌振荡。混沌振荡以混沌吸引子为表征，它的运动轨道极其复杂，从外面看不出其内部结构。观察其内部结构的手段之一是庞加莱截面。[51] [11]

（22）朱里亚集，Julia Set。复平面上的有理分式映射 $Z_{n+1}=f_C$（Z_n）的无穷远吸引子的吸引域。在复参数 C 平面上使复映射 $Z_{n+1}=f_C(Z_n)=Z_n^2+C$ 的 Julia 集 $\boldsymbol{J}$c 成为连通的所有复参数 C 的集合 $\boldsymbol{M}$ 称为 Mandelbrot 集，其图像呈现出比 Julia 集更为复杂的自相似分形结构。[32]

（23）相空间，Phase Space。一个假想的空间，它的维数与确定的某一给定动力系统的状态所需的变量数目相同。在相空间中一个点的坐标是这些变量在某一时刻所取的一组值，即相空间的一个点代表系统的一个状态。守恒系统的相空间体积在运动过程中保持不变，因而不存在吸引子；而耗散系统则不同，其相空间体积在运动过程中是不断收缩的，即相空间体积元的变化率小于零。这个特征使耗散系统的动态轨道趋向于吸引子。[54] [11]

（24）李雅普诺夫指数，Lyapunov Characteristic Exponent。Lyapunov（Ляпунов A.）是俄国数学家，与法国数学家庞加莱（Poincaré）同时代，是稳定性理论的首创人（洛伦兹语）。在相空间中，当一个无限小椭球被它的逐次映像所代替时，该椭球各轴长度放大（或缩小）倍数的长时间平均值称为 Lyapunov 数（Lyapunov Numbers）。L-数的对数，即是 L-指数。[54]

（25）费根鲍姆常数，Feigenbaum Constant。Feigenbaum 发现，在周期倍分叉的过程中，参数μ_n 的间距比$[(\mu_n-\mu_{n-1})/(\mu_{n+1}-\mu_n)]$存在极限，极限值为$\delta=4.669201\cdots$，这是一个无理数，即 Feigenbaum 常数（第一常数）。它不仅对于 Logistic 映射系统合适，而且对许多由分叉导致混沌的耗散系统均具有普遍意义。费根鲍姆的普适性不仅是定性的，而且是定量的；不仅是结构上的，而且是度量上的。就是这样一个具有“整个领域转折点的论文”，当时受到“最高学术刊物”的退稿。[51] [23]

（26）梅尔尼科夫方法，Melnikov Method。Melnikov（Мельников B.K.）是俄国数学家。这个方法体系的主要思想，是把所研究的系统归结为一个二维映射系统，然后推导该二维映射存在横截同宿点的数学条件，从而证实映射具有斯梅尔马蹄变换意义下的混沌性质。其优点是可直接进行解析计算，以便进行系统的分析。近年来发展的指数两分法是梅尔尼科夫方法在高维情况下的推广。[25]

（27）什尔尼科夫方法，Shilnikov Method。Shilnikov（Сильников Л.П.）是俄国数学家。该方法的第一步也是把所讨论的系统化为一个二维映射系统，然后不是去证明横截同宿点的存在性，而是通过估计，证明这个映射存在斯梅尔马蹄变换，从而说明了系统具有斯梅尔马蹄变换意义下的混沌。其中要求判定系统存在鞍焦型同宿轨道。[25]

（28）重整（正）化群方法，Renormalization Group Method。重整化群理论在 20 世纪 40 年代作为量子论的一部分进入物理学，使电子和光子的相互作用的计算成为可能。到 20 世纪 60 年代，威尔逊（Wilson K.G.）研究得出重整化方法的基础即尺度变换原理，1982 年他因应用此方法解决相变问题而获得诺贝尔物理奖。相变在连续条件下是大量粒子的集合效应。相变中的重整化群方法，是利用尺度变换将小尺度的涨落平滑掉（即粗粒平均），而在较大尺度的有效作用下分析临界状态。正是由于相变状态跨越很宽的尺度，其局部与整体特征相似，因而这种变换不影响全局。相变过程所使用的重整化群方法对非线性问题，如湍流问题、摆振荡等混沌过程也适用。费根鲍姆采用重整化群技术研究分叉现象，用尺度变换把无穷大化为可处理的量，最终解释了分叉中的普遍规律。[56] [22] [51]

（29）普适性，Universality。不同系统呈现出的共同的行为谓之普适性。在混沌理论中，用重整化群方法处理不同类型系统可得到某种共同的行为过程。例如费根鲍姆的普适性。[50]

（30）映射，Mapping（Maps）。其变量仅通过时间的离散值来定义的动力系统。映射经常由一组差分方程控制。[54]

（31）映像，Image。通过规定次数的迭代而由一给定集合产生的点集。除另有说明外，对于映射迭代一次，对于流按规定的次数迭代。流（Flow）是指其所有变量都是按随时间连续变化的值来定义的一个动力系统，一个流经常由一组微分方程控制。[55]

（32）庞加莱截面，Poincaré Section。庞加莱（Poincaré H.）是法国数学家。庞加莱截面用于研究混沌过程的相轨迹，是一个与许多或大多数轨道相交的一个流的相空间的横截面。[54] [32]

（33）符号动力学，Symbolic Dynamics。符号动力学是研究动力学行为的严格方法，是动力学系统数学理论中的抽象部分。从 20 世纪 20 年代开始，符号动力学逐渐成为数学家证明定理的有利手段。符号动力学系统是形式上最简单的一种动力学系统，是实际动力学系统的一种高度概括和抽象。例如，在映射中反映自相似，最好用迭代值 x_n 是落在左边（L）、落在右边（R），还是落在中央（C）的这 3 个符号来表达；用符号 CLR 序列表示的轨道称为该轨道的符号动力学。[47] [23]

（34）分维，Fractional Dimension。分维是分形的定量表征，反映耗散系统奇怪吸引子的结构或描述该吸引子演化所必需的状态变量的最小数目。自然界中更多的是一些极不规则、不光滑的体形，描述它们的坐标位置需把物体和几何图形的维数扩展至分数维。若动力系统已给出数学描述，变量数量已知则可由分维规律求出吸引子的分数维；若是时间序列，要想找出反映在该序列中的吸引子的结构或分数维，则需要重建相空间等一系列步骤。另外，对于复杂分形，需要采用多种维数去描写。[21] [11]

（35）随机分形，Stochastic Fractal。先定义无标度区间。标度就是尺度，亦即测量

的单位；无标度性是指研究的形体与尺度无关。随机分形是无规分形，只能在无标度区域内存在，即在无标度区域内存在自相似性，可用分形理论加以分析。[11]

（36）关联维，Correlation Dimension。它是描述复杂分形的一种新手段，由实验数据计算分维。先由时间序列构造新向量集，并计算任意两向量的距离 r_{ij}。对于任意实数 r，分别记 $r_{ij}<r$ 与 $r_{ij}>r$ 的数量为 $N_1(r)$ 与 $N_2(r)$，$N_1+N_2=N$，以及算出 $C(r)=N_1(r)/N(r)$，关联维 D_2 定义为 $D_2=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{\ln C(r)}{\ln r}$。[11]

（37）信息维，Information Dimension。早在 20 世纪 50 年代匈牙利数学家瑞奈（A.Renyi）从概率论角度建立了信息维定义，当时并未把该定义与分形相联系。现在利用当时的定义去描述分形的细致程度，信息维因利用了由分形点落入概率决定的信息量 I 而得名。[11]

（38）拓扑维，Topological Dimension。在具有拓扑性质的意义下，对于复杂的形体，只要每个局部可以和欧氏空间对应，即使把这样的形体连续地拉伸、压缩、扭曲，其维数也不会改变，这就是拓扑维 D_t。[11]

（39）豪斯道夫维，Hausdorff Dimension。豪斯道夫（Hausdorff）在 1919 年引入（D_f），可以定量地对分形进行表征。$D_f=\ln k/\ln L$，其中 L, K 分别表示对某形体沿其每个独立方向皆放大的倍数及放大后新形体“高维空间容量”为原形体的倍数。[11]

（40）拓扑熵，Topological Entropy。用 $N(n)$ 随 n 增长的趋势作为映射复杂性的一种度量；如果 $N(n)$ 随 n 量指数增长，则称相应的动力学过程是复杂的；若增长比指数方式慢，则称动力学过程是简单的。拓扑熵 h 用于度量 $N(n)$ 的指数增长率，即 $h=\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{\ln N(n)}{n}$。正拓扑熵并不能保证系统存在可观察的混沌运动。[47]

（41）柯尔莫戈洛夫熵，Kolmogorov（Колмогоров A.）Entropy。K-熵是关于混沌系统的初始信息损失速率的度量，给出可预测系统状态的时间长度的估计，从而提供混沌轨道的不可预测性及动力学复杂性的定量描述，其中包括对奇怪吸引子的研究性质进行定量描述，K-熵可作为更强的（混沌）判据。一个奇怪吸引子的所有正 L-指数之和即是 K-熵（K_1）。[32] [47] [21]

（42）流形，Manifold。一个点、一条曲线、一个曲面或一个体积或其在多维空间中的推广。[54]

（43）马蹄映射，Horseshoe Mapping。一个特殊类型的二维映射。在该映射中一个正方形或某个其他区域被映射到一个变形的区域，该区域与原区域在两个分离的块中相交。[54]

（44）逻辑斯蒂映射，Logistic Mapping。逻辑斯蒂一词来自法文 Logistique，表示部队的宿营地。该映射常见的形式为 $x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n)=f(x_n)$，其中 $x\in[0,1]$，参数 μ 位

于 $0 \leqslant \mu \leqslant 4$。[22]

（45）庞加莱映射，Poincaré Mapping。该映射的相空间是一个流的相空间的一个庞加莱截面，并且其中一个点的依次映像乃是在流中的一个轨道与庞加莱截面的依次相交。[54]

（46）伊侬映射，Hénon Mapping。法国天文学家 Hénon 在 1976 年提出，其改写形式为 $\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$，其中 a, b 为控制参数。经过该伊侬映射处理，可发现混沌吸引子为伊侬吸引子。[23]

（47）洛伦兹映射，Lorenz Mapping。把洛伦兹系统吸引子的一个截面沿设想的动力学不变分段投影，可构造出一个区间映射。该分段连续映射称为洛伦兹型映射。[47]

（48）复映射，Complex Mapping。复映射是复平面对于其自身的映射。[32]

（49）非线性映射，Nonlinear Mapping。一般形式的线段 I 到自身的映射，即一维映射 $x_{n+1} = f(\mu, x_n), n = 0,1,2,\cdots$，其中 f 是 x_n 的非线性函数，它依赖于参数 μ，只要恰当地选取 μ 的范围，可使 x_n 和 x_{n+1} 都在线段 I 内。由于 $f(\mu, x_n)$ 的非线性，故不能单值地定义其逆函数 $f^{-1}(\mu, x_{n+1})$，因此这类一维映射都是不可逆的。该映射实际上是对离散时间的演化方程，它是一个最简单的耗散系统。例如逻辑斯蒂映射即是非线性映射。类似的还可定义高维非线性映射。[11]

（50）非线性系统，Nonlinear System。其初状态的变化未必会导致后续状态成比例变化的系统，即不是线性系统。[54]

（51）哈密尔顿系统，Hamilton System。某种类型的保守的体积守恒系统。[54]

（52）耗散系统，Dissipative System。这种动力系统相空间的有限体积的任何点集的映像都是更小体积中的点集。耗散系统也可出现混沌，相应的吸引子是奇怪吸引子，而哈密尔顿系统可以发生混沌行为，但不能出现奇怪吸引子。[54][1]

（53）保守系统，Conservative System。该动力系统中某些表面上的变量实际上随时间保持不变，如哈密尔顿系统。不论是由微分方程表示的连续动力系统，还是由映射决定的离散动力系统，都可分为保守的和耗散的两大类。[54][1]

（54）自治系统，Autonomous System。一个连续动力学系统由 m 维常微分方程组表示，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t))$，其中 $\boldsymbol{x}(t) \in R^m$ 是 m 维欧氏空间中的一个向量，表示连续时间 t 时系统的状态。若该系统的方程中向量场 $\boldsymbol{F}$ 不显含时间 t，称为自治系统；若 $\boldsymbol{F}$ 显含 t，则称为非自治系统（Unautonomous System）。对于 m 维相空间中的非自治系统，可通过增设一个与 t 成正比例的新变量，亦即将相空间延伸一维而使原系统变成（m+1）维自治系统。对于自治系统，除了在那些渐近的平衡点之外，相空间中的流不会出现轨道相交的情形。[32]

（55）受迫杜芬振子，Forced Duffing Oscillator。Duffing G.在 1918 年引进了具有立方恢复力项的非线性振子方程来描写力学问题中所观察到的加硬弹簧的效应。著名的 Duffing 方程是 $\ddot{x}+k\dot{x}-x+x^3=\gamma\cos(\omega t)$，其中阻尼系数 k 和驱动力强度 γ 均为正，右端项 $\gamma\cos(\omega t)$ 为谐驱动力（系统受迫力）。振子（Oscillator）又叫振动子，或振荡器，表明一种产生某类动力学行为的系统。[32]

（56）面包师变换，Baker Transform。映射方程组为 $x_{n+1}=2x_n(\mathrm{mod}\,1)$ 和 $y_{n+1}=\begin{cases}ay_n & 0\leqslant x_n\leqslant 1/2\\(1/2)+ay_n & 1/2<x_n\leqslant 1\end{cases}$。当 $a=\frac{1}{2}$ 时，这是保面积映射；该变换对一个单位正方形所施加的作用很像一个面包师在揉面团。当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，面包师变换给出耗散的平面映射。[32][22]

（57）混沌控制，Controlling Chaos。混沌运动的基本特征是运动轨道的不稳定性，表现为对初值的敏感依赖性，或对小扰动的极端敏感性。通常人们认为混沌运动既不可预测也不可控制。混沌控制的基本含义是对给定的一个混沌吸引子，只对系统做小的扰动就可以得到某个预期的周期行为。[37]

（58）混沌同步，Synchronization of Chaos。不仅限于完全相同的两个信号序列，还应包括两列信号之间有确定的函数关系的情况，即广义同步（Generalized Synchronization）。实际上，实现混沌行为的同步化是对混沌过程的完整控制。[37]

（59）噪声，Noise。噪声具有相对性。基本可分为白噪声和色噪声。具有非零相关时间的噪声称为色噪声。其中一种常用的色噪声模型是相关函数为指数型的高斯色噪声（Gaussian Colour Noise）。[10]

1.3　混沌控制、同步等应用进展

混沌理论具有广泛的应用领域，包括气象学、数量经济学、生物医学、电子学、地学、自动控制、军事等。近年来，在混沌控制、同步等发展方向取得了很大的进展。本节在概述这些方面的基本成果之后分几个方面较详细地说明这些新进展。

1. 混沌控制的基本成果[5] [40] [37]

通常认为混沌控制的任务是由不同的需要，从各类非线性系统产生的混沌行为中，挑选出所需的各种有效信号，并实现其稳定的有效控制。这表明混沌控制与有效信号控制具有类似的目的。混沌的控制目标包括：

（1）抑制或消除某些类型的混沌；

（2）稳定控制在混沌吸引子中所期望的不稳定的周期态；

（3）通过控制达到新的动力学行为；