周概容　主编

全国硕士研究生入学统一考试
数学复习指导（四）

实战模拟试卷

[数学一至数学四适用]

周概容　张建华　王健　编著

讲解考试的内容和要求
指点复习的重点和难点
演示解题的方法和技巧
理清命题的思路和趋势

南开大学出版社
NANKAI UNIVERSITY PRESS

周概容　主编

全国硕士研究生入学统一考试

数学复习指导（四）

实战模拟试卷

（数学一至数学四适用）

周概容　张建华　王　健　编著

南開大學出版社

天　津

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生统一考试数学复习指导（四）实战模拟试卷 / 周概容主编；张建华，王健编著．—天津：南开大学出版社，2004.11

数学一至数学四适用

ISBN 7-310-02161-4

Ⅰ.全… Ⅱ.①周…②张…③王… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 078503 号

南开大学出版社出版发行

出版人：肖占鹏

地址：天津市南开区卫津路 94 号　　邮政编码：300071

营销部电话：(022)23508339　23500755

营销部传真：(022)23508542　　邮购部电话：(022)23502200

*

天津市宝坻区第二印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

2004 年 11 月第 1 版　　2004 年 11 月第 1 次印刷

787×1092 毫米　16 开本　17 印张　435 千字

定价：26.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

序　言

数学是理工科类、经济类和管理类各专业必修的基础课，又是理工科类、经济类和管理类各专业硕士研究生入学全国统一考试的必考课程。自 1987 年始，由教育部组织全国统一命题和统一考试，是目前我国最高层次的统一考试。在全国硕士研究生入学统一考试的政治理论、外语和数学等三科中，数学满分为 150 分，而其他两科均为 100 分。

数学考试包括三部分内容：高等数学（微积分、向量代数和空间解析几何）、线性代数、概率论与数理统计。鉴于这三门课都是大学一年级和二年级的课程，对于在职考生学习有关课程的时间更久，有些同等学力的考生也有同样的情况，因此同时复习三门课程有一定的困难。为了帮助考生有效地准备入学考试，我们根据教育部颁发的“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”，参照历年硕士研究生入学统一考试数学试题的题型、结构、性质和特点，编写了这套考研“数学复习指导”，分为四册：

第一分册《高等数学》

第二分册《线性代数》

第三分册《概率论与数理统计》

第四分册《实战模拟试卷》

为了读者使用方便，四个分册的内容各自成体系，且前三分册的格式一致。

（一）全国硕士研究生入学数学统一考试分为“数学一”、“数学二”、“数学三”、“数学四”等 4 套试卷。4 套试卷只是在某些知识点的要求上有所区别，其中“数学二”不考“概率论与数理统计”，“数学四”只考“概率论”但是不考“数理统计”。其他区别均在每一“章”的开始指出，并在相应的例题上标明。

（二）每本书的“章”也与《考试大纲》一致。例如，“高等数学”部分的《考试大纲》为：“一、函数、极限、连续”，“二、一元函数微分学”，“三、一元函数积分学”等，每分册的“章”的编号也是一、二、三、……与《考试大纲》完全一致。

（三）每一“章”的内容都分为四个专题展开：I　考试大纲要求；II　考试内容提要；III　典型例题分析；IV　自测练习题（附：自测练习题解答）。

（四）例题按照全国硕士研究生入学统一考试数学试卷的题型，分为“填空题”、“选择题”和“解答题”。不过，为了突出证明题，特别把“证明题”从“解答题”中分出来单列。

〖填空题〗　填空题主要涉及一些概念、性质和简单的计算题，主要作用是保障整个试卷考试内容的覆盖面。填空题还可以缓解考生的紧张心理，有利于考生逐步进入答题状态并充分发挥水平。

〖选择题〗　研究生入学数学考试的选择题都是单项选择题。选择题是一种客观性试题，有计算性、概念性和理论性等三种基本类型。计算性选择题是通过简单的计算来找出正确选项，一般较少采用；概念性选择题主要考核对于概念、定义和性质的理解和掌握；理论性选择题主要考核对于定理、法则、性质、公式的条件与结论的理解和掌握，以及考查分析、判断、类比、归纳等逻辑思维能力。后两种形式的选择题采用得较多。

〖解答题〗　解答题包括计算题、应用题和证明题，有时各种形式出现在同一道试题中，

以增加试题的综合性。

〖**证明题**〗 全国硕士研究生入学统一考试数学试卷的证明题出现在“解答题”一类中。由于证明题一般对考生是难点，所以我们将其单列出来。

（五）第四分册包括最近一年的统一考试的试卷，以及供考生练习的模拟试卷，可以帮助考生熟悉统一考试试卷的形式和结构。

需要指出，本书的目的不是“押题”，而是为读者提供试题的各种可能题型的范例，通过例题向读者剖析解题的思路、演示各种典型的解题方法和技巧。

本书的主编参加了“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”的起草和历次修订，连续 17 年参加了全国硕士研究生入学统一考试“数学试题”命题组，并担任组长。编写组的其他成员，有的多年参与研究生入学统一考试的命题，有的多年从事考研的辅导工作和研究生入学统一考试数学试卷的评阅工作，都十分熟悉研究生入学统一考试的内容和要求，掌握命题的思路和试题结构，了解试题欲考查的知识点和难点。我们的目的是通过这套书把这一切介绍给读者。我们把这套书奉献给立志进一步深造、准备攻读硕士学位的考生，并预祝本书的读者成功。

周概容

2004 年 5 月

前　言

本册书包括 4 套模拟试卷和相应的答案，每套都包括“数学一”～“数学四”的全部 4 种试卷。

这 4 套试卷是编者根据《数学考试大纲》的要求和历年全国硕士研究生入学统一考试试卷的结构，精选典型试题，精选题目的题型，精心设计命制的，其中许多题目的题型都是历年全国硕士研究生入学统一考试的常见题型。除此之外，习做模拟试卷可以起到“考前练兵”的作用。

此外，本书附录中收录了“2004 年全国硕士研究生入学统一考试”实考的“数学一”、“数学二”、“数学三”与“数学四”试卷，包括答案和评分标准。

我们在这里再次强调，本书的目的不是“押题”，而是为读者提供试题的各种可能题型的范例，以及向读者展示各种典型试题的题型、解题思路及各种典型的解题方法和技巧。因此读者不要就题论题，更不要为得到答案而做题，也不是题目做得越多越好。通过一定数量的典型题目起到举一反三作用，就是本书的初衷。

本书的读者对象，首先是准备报考硕士学位研究生和 MBA 者，包括在校本科生、在职考生和同等学力考生。

作者
于南开大学
2004 年 5 月

目　录

第1套 数学模拟试题

数学（一）模拟试卷

得分	评卷人

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分满分 24 分．把答案填在题中横线上）

(1) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$______________.

(2) 设$\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$______________.

(3) 设曲线$\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕Oy轴旋转一周成一旋转曲面，则它在点$P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处指向外侧的单位法向量为______________.

(4) 微分方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=e^{2x}\ (x>0)$的通解为______________.

(5) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则逆矩阵$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=$______________.

(6) 已知随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0\ ,若\ x<-1,\\ 0.25,若-1\leqslant x<0,\\ 0.75,若\ 0\leqslant x<1,\\ 1\ ,若\ \ x\geqslant1.\end{cases}$$

则$\mathbf{D}\left(\dfrac{X}{1+X^2}\right)=$______________.

得分	评卷人

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分满分 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 函数$f(x)=x\sin x$

(A) 当$x\to\infty$时为无穷大. (B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

(C) 在$(-\infty,+\infty)$内无界. (D) 当$x\to\infty$时有有限极限. [ ]

(8) 设函数$f(x)$和$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，$f(x)$是连续函数，且$f(x)\neq0,\varphi(x)$有间断点，

则

(A) $\varphi[f(x)]$必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点.　　[　]

(9) 设$\lambda>0$为常数，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散.　(B) 条件收敛.　(C) 绝对收敛.　(D) 收敛性与λ有关.　[　]

(10) 设D是xOy平面上以$(1,1),(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域，D_1是D在第一象限的部分，则$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$等于

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　(D) 0.　　[　]

(11) 设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，且$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|=a\neq0$，而$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，则$|\boldsymbol{A}^*|$等于

(A) a.　(B) $\dfrac{1}{a}$.　(C) a^{n-1}.　(D) a^n.　[　]

(12) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}，则必有$$

(A) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$.　　(B) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.　　[　]

(13) 设随机变量X和Y分别服从正态分布$N(0,1)$和$N(1,1)$，并且相互独立，则

(A) $\mathrm{P}\{X+Y\leqslant0\}=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\mathrm{P}\{X+Y\leqslant1\}=\dfrac{1}{2}$.

(C) $\mathrm{P}\{X-Y\leqslant0\}=\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\mathrm{P}\{X-Y\leqslant1\}=\dfrac{1}{2}$.　　[　]

(14) 设二随机变量X和Y独立同分布，记$U=X+Y$，$V=X-Y$，则U和V一定

(A) 独立.　　(B) 相关.

(C) 不独立.　　(D) 不相关.　　[　]

三、解答题（本题共9小题，满分94分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

得分	评卷人

(15)（本题满分12分）

设$x>0$，常数$a>\mathrm{e}$，证明不等式$(a+x)^a<a^{a+x}$.

得分	评卷人

(16)（本题满分 11 分）

设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0, y=\sin x$，其中函数 f,φ 都有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

得分	评卷人

(17)（本题满分 12 分）

设 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，而 π 为 S 在点 P 处的切平面．$\rho(x,y,z)$ 是原点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S.$$

得分	评卷人

(18)（本题满分 11 分）

设 $a_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\mathrm{d}x$

（I）求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$ 的和;

（II）证明：对于任意常数 $\lambda>0$，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

得分	评卷人

(19)（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$．证明：在 (a,b) 内存在唯一点 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$ 和 $x=a$ 所围区域的面积 S_1，是曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=f(\xi)$ 和 $x=b$ 所围区域的面积 S_2 的 3 倍.

得分	评卷人

(20)（本题满分 9 分）

考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1, \end{cases}$$

试问 a 和 b 取何值时，该方程组有唯一解、无解和有无穷多组解.

得分	评卷人

(21)（本题满分 9 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，试求：

(Ⅰ) 未知数 x 和 y;

(Ⅱ) 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

得分	评卷人

(22)（本题满分 9 分）

假设总体 X 在区间$[a, b]$上均匀分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的简单随机样本，试分别求样本的最小观测值 $X_{(1)}$ 和最大观测值 $X_{(n)}$ 的概率密度 $f_{(1)}(x)$ 和 $f_{(n)}(x)$.

得分	评卷人

(23)（本题满分 9 分）

已知随机变量 X 和 Y 独立，X 的概率分布和 Y 的概率密度相应为：

$$X\sim\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\qquad Y\sim f(y)=\begin{cases}1, & 若y\in[0,1],\\ 0, & 若y\notin[0,1].\end{cases}$$

试求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率分布.

●数学（一）模拟试卷答案●

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分满分 24 分．把答案填在题中横线上）

(1) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$________________.

答案 $\dfrac{1}{6}$.

分析 利用无穷小的替换，有

$$\lim_{x\to0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3/6}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

本题亦可利用洛必达法则求解.

(2) 设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________________.

答案 $\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

分析 本题是由参数方程求导数，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{-\sin t}{2t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

(3) 设曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 Oy 轴旋转一周成一旋转曲面，则它在点 $P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量为________________.

答案 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$.

分析 所给曲线是坐标面 xOy 上的曲线，它绕 Oy 轴旋转曲面的方程为 $3x^2+2y^2+3z^2=12$．设

$$F(x,y,z)=3x^2+2y^2+3z^2-12,$$

$$F'_x=6x,\ F'_y=4y,\ F'_z=6z$$

则在点 $P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)\big|_P=(6x,4y,6z)\big|_P=\left(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\right)$$

由于 $|\boldsymbol{n}|=2\sqrt{30}$，可见曲面在点 $P(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}^\circ=\frac{1}{|\boldsymbol{n}|}\boldsymbol{n}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right).$$

(4) 微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-4y=\mathrm{e}^{2x}\ (x>0)$ 的通解为____________________.

答案 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+\left(C_2+\dfrac{1}{4}x\right)\mathrm{e}^{2x}$，其中 C_1,C_2 是任意常数.

分析 原方程对应的齐次方程为 $y''-4y=0$，相应的特征方程为 $r^2-4=0$，解得特征根 $r=\pm2$．由此可见齐次方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$$

其中 C_1,C_2 是任意常数．非齐次方程的特解可设为

$$y^*=ax\mathrm{e}^{2x},$$

将其代入原方程可以求得 $a=1/4$．于是原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则逆矩阵 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}$ =________________.

答案 $\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

分析 记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$．由于

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&0\\0&1\end{pmatrix}$$

可见

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

(6) 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0\ ,若\ x<-1,\\0.25,若-1\leqslant x<0,\\0.75,若\ 0\leqslant x<1,\\1\ ,若\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

则 $\mathbf{D}\left(\dfrac{X}{1+X^2}\right)=$ ______________.

答案 0.125.

分析 由分布函数，可得随机变量 X 的概率分布

$$X\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\0.25&0.50&0.25\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{1+X^2}\right)=-\frac{1}{2}0.25+\frac{1}{2}0.25=0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\left(\frac{X}{1+X^2}\right)&=\mathbf{E}\left(\frac{X}{1+X^2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}0.25+\frac{1}{4}0.25=0.125.\end{aligned}$$

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分满分 32 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(7) 函数 $f(x)=x\sin x$

(A) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大.　　(B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.　　(D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限.　　[C]

分析 由于当 $x_n=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ 时 $f(x_n)=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，可见当 $x\to\infty$ 时 $f(x_n)\to\infty$，所以应选（C).

(8) 设函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)\neq 0,\varphi(x)$ 有间断点，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.　　[D]

分析 用反证法：设函数

$$F(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

是连续函数，则 $\varphi(x)=F(x)f(x)$ 也是连续函数，而这与条件“$\varphi(x)$ 有间断点”矛盾．于是应选（D).

(9) 设 $\lambda>0$ 为常数，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$

(A) 发散.　(B) 条件收敛.　(C) 绝对收敛.　(D) 收敛性与 λ 有关.　[C]

分析　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，而且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+\lambda}$ 也收敛，可见 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\dfrac{1}{n^2+\lambda}\right)$ 收敛．因为

$$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right),$$

所以由比较判别法，知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$$

收敛，因此应选（C）.

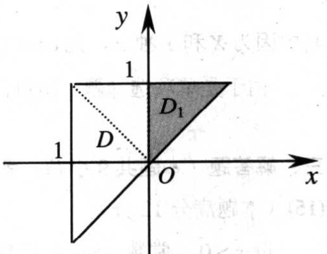
(10) 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　(B) $2\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　(D) 0.　[A]

分析　由插图可见区域 D_1 恰好是区域 D 的 1/4.

因此，显然选项（C）正确.



(11) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=a\neq0$，而 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|$ 等于

(A) a.　(B) $\dfrac{1}{a}$.　(C) a^{n-1}.　(D) a^n.　[C]

分析　由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{I}$ 是阶单位阵），可见 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$（$|\boldsymbol{A}|=a\neq0$）. 因此 $|\boldsymbol{A}^*|=a^{n-1}$.

(12) 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}，则必有$$

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$.　(B) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.　[C]

分析 因为用初等矩阵 P_2 左乘 A 时，相当于把矩阵 A 的第一行加到第二行，由此得 P_2A；其次，将初等矩阵 P_1 左乘 P_2A，相当于把矩阵 P_2A 的第一行和对调第二行，于是得 $P_1P_2A=B$．因此选项（C）正确．

(13) 设随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，并且相互独立，则

(A) $\mathrm{P}\{X+Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$．　　(B) $\mathrm{P}\{X+Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$．

(C) $\mathrm{P}\{X-Y\leqslant 0\}=\dfrac{1}{2}$．　　(D) $\mathrm{P}\{X-Y\leqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$．　　[B]

分析 由于 $X+Y\sim N(1,2)$，可见

$$\mathrm{P}\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2\times 2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

(14) 设二随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 $U=X+Y$，$V=X-Y$，则 U 和 V 一定

(A) 独立．　　(B) 相关．

(C) 不独立．　　(D) 不相关．　　[D]

分析 我们首先计算 U 和 V 的协方差：

$$\begin{aligned}&\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)\\&=\operatorname{cov}(X,X)-\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,X)-\operatorname{cov}(Y,Y)=0.\end{aligned}$$

其中因为 X 和 Y 独立，知 $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)=0$，而因为 X 和 Y 同分布，可见 $\operatorname{cov}(X,X)=\operatorname{cov}(Y,Y)$．

由于是单项选择题，所以没有必要验证选项（A），（B）和（C）不成立．

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

(15)（本题满分 12 分）

设 $x>0$，常数 $a>\mathrm{e}$，证明不等式 $(a+x)^a<a^{a+x}$．

证 由于函数 $y=\ln x$ 的单调性，可见只需证明 $a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$．设

$$f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x),$$

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续、可导，且

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{a+x}>0,$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单增．其次，由于 $f(0)=0$，可得当 $x>0$ 时 $f(0)>0$．从而当 $x>0$ 时，有

$$\begin{gathered}f(x)=(a+x)\ln a-a\ln(a+x)>0,\\(a+x)\ln a>a\ln(a+x),\\(a+x)^a<a^{a+x}.\end{gathered}$$

(16)（本题满分 11 分）

设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0, y=\sin x$，其中函数 f,φ 都有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$．

解 有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}.$$

由于 $y'=\cos x$，可得

$$2x\varphi_x' + e^y \cos x \cdot \varphi_y' + \varphi_z' \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi_z'}(2x\varphi_x' + e^y \cos x \cdot \varphi_y').$$

于是

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cos x - \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{\varphi_z'}(2x\varphi_x' + e^y \cos x \cdot \varphi_y').$$

(17)（本题满分 12 分）

设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，而 π 为 S 在点 P 处的切平面．$\rho(x,y,z)$ 是原点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)} dS.$$

解 设 (X,Y,Z) 为平面上 π 任意一点，则 π 的方程为

$$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1.$$

从而，有

$$\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

此外，由

$$z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}$$

有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}};$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}d\sigma.$$

于是

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\frac{1}{4}\iint_D(4-x^2-y^2)d\sigma$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)r\,dr=\frac{3}{2}\pi.$$

(18)（本题满分 11 分）

设 $a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^2 x dx$

（Ⅰ）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$ 的和；

（Ⅱ）证明：对于任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛．