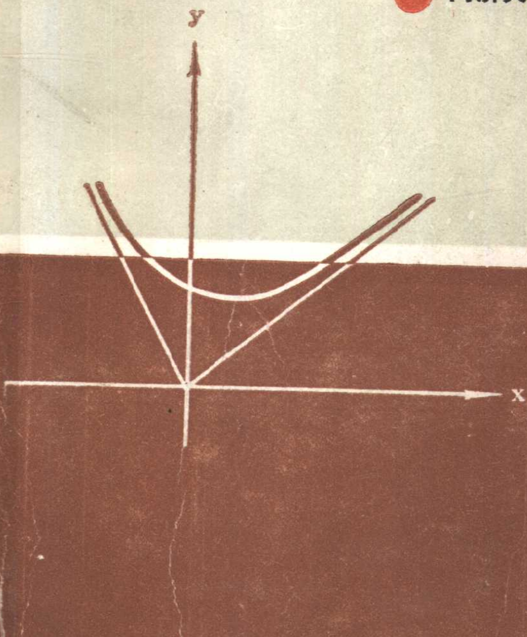
《高等数学》自学及解题指导

15

同济大学函授数学教研室编著



同济大学出版社

高等学校函授教材

《高等数学》自学及解题指导

同济大学函授数学教研室编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是为函授生及广大自学者学习《高等数学》而编写的辅导资料。书中列举了较多的典型例题，并适当地附有解题分析及有关概念性的指示。它能帮助广大读者，特别是函授生顺利地学好高等数学，开拓思路，减少自学及解题的困难。

本书可作为广大函授生的辅助教材，也可作为工科类大学生及工程技术人员自学《高等数学》的参考资料。

责任编辑：孟玉恩

封面设计：王肖生

《高等数学》自学及解题指导

同济大学函授数学教研室编著

同济大学出版社出版

（上海四平路1239号）

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张：17.625 字数：540千字

1990年8月第1版 1990年8月第1次印刷

印数 1—7800 定价：6.50元

ISBN 7-5608-0555-8/O·63

前　　言

许多函授生及广大的自学者在自学《高等数学》的过程中，由于缺乏老师的直接指导和较好的自学参考书，往往会遇到不少的困难，如学了理论不会用于解题，或者发现解题有错误，但又不知错误的原因何在，等等。为此，我们根据“高等工科院校成人教育《高等数学》教学基本要求”，在我校多年来积累的函授教学辅导资料的基础上，经过提炼、加工和充实后而编成此书，奉献给广大函授生及立志自学成才的自学者。

本书的核心是解题方法，侧重于帮助读者找到解题的钥匙。

为使本书成为广大自学者的良师益友，使读者掌握高等数学中的基本内容、基本概念、基本解题技巧，我们在编写时，除了对各章、节的重要内容作必要的总结归纳，对例题尽量作详细解答外，还着重指出应该如何分析问题及解题中容易出现的错误。考虑到不同层次的读者的需要，书中也适当地选入了一些较难的例题，介绍了一些超出教学基本要求的内容和方法，这些都加上了“△”记号。

本书分析说理比较透彻，解题思路比较广阔，例题类型比较齐全，综合应用方面也有所兼顾，可作为使用我校出版的函授《高等数学》教材的自学参考书，也可作为各类成人教育及全日制大学的工科专业学生，或其他自学者，学习《高等数学》课程的参考书。

本书由我校函授数学教研室部分教师合作编写。其中第一、二、三、十章由郭景德执笔；第四、五、六章由徐鑑青执笔；第七、八章由刘浩荣执笔；第九章由周葆一执笔；第十一、十二章由周忆行执笔。

谈祝多副教授详细审阅了本书的全稿，并提出了许多指导性的意见。函授数学教研室的全体老师对本书的编写工作，也都给以热情的支持和帮助。我们在此一并表示衷心的感谢。由于我们的水平所限，书中难免有许多不足或错误之处，恳请读者批评指正。

编者　　　1988年10月于同济

目　　录

第一章　函数、极限、连续

§ 1.1　函　　数

一、函数定义域的确定

要确定一个函数必须具备两个要素：对应规则和定义域．求函数的定义域，意味着在实数范围内找出使函数有意义的自变量的取值范围．正确解题的关键在于：

1．搞清五类基本初等函数的定义域，例如偶次方根被开方数应为非负数；对数函数的真数要大于零；反三角正弦、余弦的定义域是区间 $[-1,1]$ 等等；

2．明确分式函数的分母不能等于零；

3．熟练掌握解不等式（组）的方法（要认真复习中学阶段的有关知识）；

4．对实际问题，应考虑到问题本身是否有意义．

例 1　求函数 $f(x)=\lg(x^2-x-2)+\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域．

解　在函数解析式中，有对数函数和无理分式函数，因此要使函数 $f(x)$ 有意义，x 必须满足不等式组：

$$\begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x+2>0. \end{cases}$$

我们先解不等式，$x^2-x-2>0$，即 $(x+1)(x-2)>0$．它的左边是一个多项式，可用图 1-1 的方法确定它的符号．于是，不等式的解为

$$x<-1 \text{ 或 } x>2.$$

现在问题转化为解不等式组：

$$\begin{cases} x<-1 \text{ 或 } x>2; \\ x+2>0. \end{cases}$$

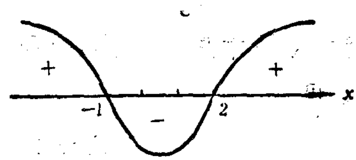


图 1-1

它也可以借助图形求解，图 1-2 中的阴影部分所对应的区间就是它的解（空心小圆圈表示 x 不能在这点取值）。所以$f(x)$的定义域是

$$-2<x<-1 \text{ 或 } x>2.$$

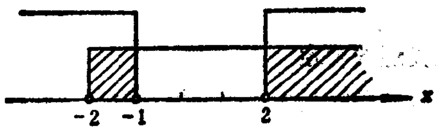


图 1-2

注意：易犯的错误是

1. 忽略了分母不能为零这个因素，从而得到 $x+2\geqslant 0$.
2. 误认为分母必须大于零，从而得到$\sqrt{x+2}>0$.

例 2 求函数 $f(x)=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{2x-1}}$的定义域.

分析 $f(x)$ 是复合函数，求定义域时应分解成若干个简单的初等函数，然后由外层逐步向内层推算. 计算过程中要特别注意中间变量的取值范围.

解 $f(x)$ 可以分解成 $f(u)=\arccos u, u=\sqrt{v}, v=\dfrac{x}{2x-1}$,

其中 u，v 是中间变量.

因为 $f(u)=\arccos u$ 的定义域是 $-1\leqslant u\leqslant 1$，而 $u=\sqrt{v}$ 的值域是 $0\leqslant u<+\infty$，复合时 u 应取它们的公共值，即 $0\leqslant u\leqslant 1$，于是有

$$\sqrt{v}\leqslant 1 \text{ 或 } \sqrt{\frac{x}{2x-1}}\leqslant 1.$$

（注：$\sqrt{v}$ 本身是非负数，不必写成 $0\leqslant\sqrt{v}\leqslant 1$）

同理可知

$$v\geqslant 0 \text{ 或 } \frac{x}{2x-1}\geqslant 0.$$

所以 x 必须满足下面不等式组：

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{2x-1}} \leqslant 1, \\ \dfrac{x}{2x-1} \geqslant 0, \\ 2x-1 \neq 0, \end{cases}$$

化简后变为

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x-1} \geqslant 0, \\ \dfrac{x}{2x-1} \geqslant 0, \\ 2x-1 \neq 0, \end{cases}$$

该不等式组的解如图 1-3 阴影部分所示，因此 $f(x)$ 的定义域为

$$x \leqslant 0 \text{ 或 } x \geqslant 1.$$

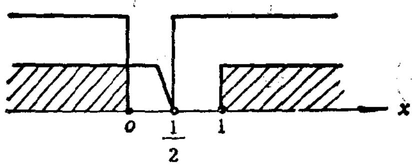


图 1-3

注意：如果不清楚 $f(u)=\arccos u$ 和 $u=\sqrt{v}$ 中的 u 应取公共值，会产生以下错误的结果：

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} \geqslant 0, \\ 2x-1 \neq 0. \end{cases}$ （遗忘 $f(u)=\arccos u$ 的定义域）

2. $\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{x}{2x-1} \leqslant 1, \\ 2x-1 \neq 0. \end{cases}$ （遗忘 $u=\sqrt{v}$ 的值域或它的定义域）

例 3 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求函数 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域。

分析 写成$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$的形式，表明它是复合函数，是由$f(u)$及$u=x+\frac{1}{2}$复合而成。从函数概念知，函数由两个要素——对应规则和定义域所确定，与自变量所选的字母无关。因此$f(u)$和$f(x)$表示同一个函数，$f(u)$的定义域也是$0\leqslant u\leqslant 1$，把$u=x+\frac{1}{2}$代入，求得x的取值范围，就是函数$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$的定义域。

解 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$是由$f(u)$和$u=x+\frac{1}{2}$复合而成。因为$f(x)$的定义域是$0\leqslant x\leqslant 1$，故$f(u)$的定义域是$0\leqslant u\leqslant 1$。又$u=x+\frac{1}{2}$代入后，得

$$0\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant 1,$$

于是$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$的定义域是

$$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}.$$

同理可知$f\left(x-\frac{1}{2}\right)$的定义域是

$$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}.$$

解不等式组

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant \frac{3}{2},\end{cases}$$

最后求得$f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)$的定义域为

$$x=\frac{1}{2}.$$

注意：常见的错误做法是：

因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以$\frac{1}{2}\leqslant x+\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2}$，$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$的定义域是$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$。同样有$-\frac{1}{2}\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，$f\left(x-\frac{1}{2}\right)$的定义域是$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$。因此$f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)$的定义域是 $x=\frac{1}{2}$。

表面上看答案没错，其实$f\left(x+\frac{1}{2}\right)$和$f\left(x-\frac{1}{2}\right)$的定义域都是错误的。主要原因是没搞清 $f(u)$ 和 $f(x)$ 表示同一个函数。

二、函数特性的讨论

函数的特性一般指：有界性、单调性、奇偶性和周期性。它们的定义如下：

1. **有界性** 如果函数 $f(x)$ 在某个区间内有定义，若存在正数M，对此区间内的任一 x 都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在此区间内有界。

2. **单调性** 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内，随着 x 增大而增大，即对 (a,b) 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间内是单调递增的；若对 (a, b) 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间内是单调递减的。

3. **奇偶性** 如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都有 $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

4. **周期性** 对于函数 $f(x)$，若存在一个不为零的数 l，使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内的任意 x 都成立，则 $f(x)$ 称为周期函数。通常周期函数的周期是指满足上面关系式的最小正数 l。

例 4 讨论下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $f(x)=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $(-\infty,+\infty)$；

(2) $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$ $(1,+\infty)$。

分析 讨论方法有两种：对区间内任意两点 x_1, x_2，看 $f(x_2)-f(x_1)$ 是否大于零（小于零）或当 $f(x_1)>0$ 时，看此式 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ 是否大于 1（小于 1）。题 (1) 用前者方便，题 (2) 则用后者较好。

解 (1) 设 x_1 和 x_2 是 $(-\infty,+\infty)$ 内任意两点，且 $x_1<x_2$，考虑

$$f(x_2)-f(x_1)=\ln(x_2+\sqrt{x_2^2+1})-\ln(x_1+\sqrt{x_1^2+1})$$

$$=\ln\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+1}}{x_1+\sqrt{x_1^2+1}},$$

因为 $x_2>x_1$，故 $\sqrt{x_2^2+1}>\sqrt{x_1^2+1}$，$x_2+\sqrt{x_2^2+1}>x_1+\sqrt{x_1^2+1}$，

$$\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+1}}{x_1+\sqrt{x_1^2+1}}>1,$$

所以

$$f(x_2)-f(x_1)=\ln\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+1}}{x_1+\sqrt{x_1^2+1}}>0,$$

由定义知 $f(x)=\operatorname{arsh}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增。

(2) 设 $x_2>x_1$，x_1, x_2 是区间 $(1,+\infty)$ 内任意两点，考虑

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{2^{\frac{1}{x_2-1}}}{2^{\frac{1}{x_1-1}}}=2^{\frac{1}{x_2-1}-\frac{1}{x_1-1}}$$

$$=2^{\frac{x_1-x_2}{(x_2-1)(x_1-1)}},$$

因为 $x_2>x_1>1$，所以 $\frac{x_1-x_2}{(x_2-1)(x_1-1)}<0$，故

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=2^{\frac{x_1-x_2}{(x_2-1)(x_1-1)}}<1,$$