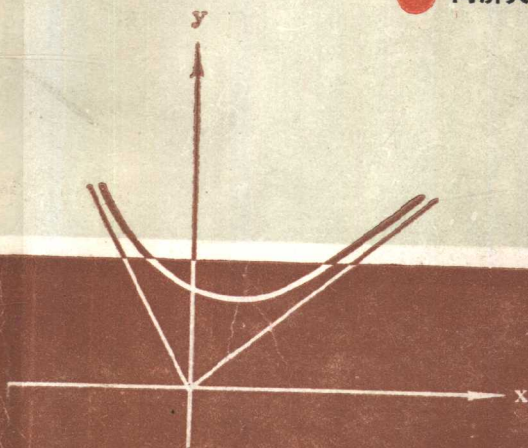


# 《高等数学》

15

## 自学及解题指导

● 同济大学函授数学教研室编著



同济大学出版社

高等学校函授教材

# 《高等数学》自学及解题指导

同济大学函授数学教研室编著

同济大学出版社

## 内 容 提 要

本书是为函授生及广大自学者学习《高等数学》而编写的辅导资料。书中列举了较多的典型例题，并适当地附有解题分析及有关概念性的指示。它能帮助广大读者，特别是函授生顺利地学好高等数学，开拓思路，减少自学及解题的困难。

本书可作为广大函授生的辅助教材，也可作为工科类大学生及工程技术人员自学《高等数学》的参考资料。

责任编辑：孟玉恩

封面设计：王肖生

### 高等数学 自学及解题指导

同济大学函授数学教研室编著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张：17.625 字数：540千字

1990年8月第1版 1990年8月第1次印刷

印数 1—7800 定价：6.50元

ISBN 7-5608-0555-8/O·63

# 前 言

许多函授生及广大的自学者在自学《高等数学》的过程中，由于缺乏老师的直接指导和较好的自学参考书，往往会遇到不少的困难，如学了理论不会用于解题，或者发现解题有错误，但又不知错误的原因何在，等等。为此，我们根据“高等工科院校成人教育《高等数学》教学基本要求”，在我校多年来积累的函授教学辅导资料的基础上，经过提炼、加工和充实后而编成此书，奉献给广大函授生及立志自学成才的自学者。

本书的核心是解题方法，侧重于帮助读者找到解题的钥匙。

为使本书成为广大自学者的良师益友，使读者掌握高等数学中的基本内容、基本概念、基本解题技巧，我们在编写时，除了对各章、节的重要内容作必要的总结归纳，对例题尽量作详细解答外，还着重指出应该如何分析问题及解题中容易出现错误。考虑到不同层次的读者的需要，书中也适当地选入了一些较难的例题，介绍了一些超出教学基本要求的内容和方法，这些都加上了“ $\Delta$ ”记号。

本书分析说理比较透彻，解题思路比较广阔，例题类型比较齐全，综合应用方面也有所兼顾，可作为使用我校出版的函授《高等数学》教材的自学参考书，也可作为各类成人教育及全日制大学的工科专业学生，或其他自学者，学习《高等数学》课程的参考书。

本书由我校函授数学教研室部分教师合作编写。其中第一、二、三、十章由郭景德执笔；第四、五、六章由徐鑑青执笔；第七、八章由刘浩荣执笔；第九章由周葆一执笔；第十一、十二章由周忆行执笔。

谈祝多副教授详细审阅了本书的全稿，并提出了许多指导性的意见。函授数学教研室的全体老师对本书的编写工作，也都给以热情的支持和帮助。我们在此一并表示衷心的感谢。由于我们的水平所限，书中难免有许多不足或错误之处，恳请读者批评指正。

编者

1988年10月于同济

# 目 录

<b>第一章 函数、极限、连续</b> .....	1
§ 1.1 函数 .....	1
一、函数定义域的确定.....	1
二、函数特性的讨论.....	5
三、复合函数.....	8
§ 1.2 极限 .....	11
一、极限定义的使用.....	11
二、几个重要定理.....	18
三、极限的计算方法.....	19
§ 1.3 连续 .....	33
一、连续的定义和充要条件, 间断点的分类.....	33
二、闭区间上连续函数的性质.....	38
§ 1.4 证题方法综述 .....	39
<b>第二章 导数和微分</b> .....	43
§ 2.1 导数 .....	43
一、导数的定义和导数存在的充要条件.....	43
二、求导的方法.....	52
三、导数的几何、物理应用.....	63
§ 2.2 微分 .....	65
一、微分的定义和计算.....	65
二、微分的应用.....	67
<b>第三章 中值定理与导数的应用</b> .....	70
§ 3.1 罗尔、拉格朗日、柯西中值定理 .....	70
一、定理条件的验证.....	70

二、定理的基本应用	72
§ 3.2 泰勒公式	80
一、求函数的泰勒公式	80
二、利用泰勒公式作近似计算	81
三、用泰勒公式证明不等式	83
四、用泰勒公式求极限	85
§ 3.3 导数的应用	86
一、利用导数研究函数的性态	86
二、证明不等式	95
三、证明方程实根的存在性	97
§ 3.4 综合举例	98
<b>第四章 不定积分</b>	<b>106</b>
§ 4.1 最简单的不定积分	106
一、不定积分的概念和基本性质	106
二、最简单的不定积分的计算	108
§ 4.2 换元积分法和分部积分法	112
一、换元积分法	112
二、分部积分法	119
三、换元积分法与分部积分法的综合运用	127
§ 4.3 有理函数的积分	133
§ 4.4 三角函数有理式的积分 $\int R(\sin x, \cos x)dx$	141
§ 4.5 简单的无理函数的积分	154
§ 4.6 综合举例	158
<b>第五章 定积分</b>	<b>171</b>
§ 5.1 定积分的概念和性质	171
一、定义和它的应用	171

三、性质	174
§ 5.2 定积分的计算方法	177
一、基本计算方法	177
二、特殊类型的积分	183
三、分段函数的积分	186
§ 5.3 积分上限(下限)的函数及其导数	188
§ 5.4 广义积分	193
一、函数在无穷区间上的积分	193
二、积分区间内或区间端点被积函数有无穷间断 积分点的	196
三、积分区间为无穷和积分区间上被积函数有无穷 间断点的混合情况	200
§ 5.5 综合举例	202
<b>第六章 定积分的应用</b>	<b>209</b>
§ 6.1 元素法	209
§ 6.2 定积分在几何上的应用	211
一、求平面图形的面积	211
二、体积	218
三、平面曲线的弧长	224
§ 6.3 定积分在物理、力学上的应用	227
一、变力沿直线所作的功	227
二、水压力	231
三、其他应用	232
四、平均值和均方根	235
<b>第七章 向量代数及空间解析几何</b>	<b>238</b>
§ 7.1 向量及其线性运算	238
一、向量的概念	238
二、向量的线性运算及其运算规律	238

§ 7.2	向量的坐标表示式	240
一、	向量的投影	240
二、	向量的坐标表示式	241
三、	向量线性运算的坐标表示	242
§ 7.3	两向量的数量积与向量积	243
一、	两向量的数量积	243
二、	两向量的向量积	244
三、	两向量的夹角、垂直与平行条件	245
§ 7.4	平面	253
一、	平面方程	253
二、	两平面之间的相互关系	254
三、	点到平面的距离	254
§ 7.5	空间的直线	258
一、	空间的直线方程	258
二、	两直线间的关系	258
三、	直线与平面的夹角	259
§ 7.6	空间的曲面与曲线	268
一、	空间的曲面	268
二、	空间的曲线	270
<b>第八章</b>	<b>多元函数的微分法及其应用</b>	<b>276</b>
§ 8.1	多元函数的基本概念	276
一、	二元函数的定义	276
二、	二元函数的极限	278
三、	二元函数的连续性	283
§ 8.2	偏导数	285
一、	偏导数的定义	285
二、	偏导数的求法	285
三、	偏导数的几何意义	287
四、	偏导数存在与函数连续性的关系	288



五、方向导数与梯度	289
六、高阶偏导数	293
§ 8.3 全微分及其应用	294
一、全微分	294
二、全微分的应用	298
§ 8.4 多元复合函数的求导法则	300
一、链式法则	300
二、几种推广的情形	300
三、利用多元复合函数求导法则求高阶偏导数	302
§ 8.5 隐函数求导法	309
§ 8.6 偏导数的几何应用	318
一、空间曲线的切线与法平面	318
二、空间曲面的切平面与法线	318
§ 8.7 极值问题的解法	323
一、二元函数无条件极值的求法	323
二、最大值与最小值的求法	327
三、三元函数条件极值的求法	329
<b>第九章 重积分</b>	<b>334</b>
§ 9.1 二重积分的概念与性质	334
§ 9.2 利用直角坐标计算二重积分	337
§ 9.3 利用极坐标计算二重积分	346
§ 9.4 二重积分的换元法	354
§ 9.5 三重积分的概念及其在直角坐标系中的 计算法	357
一、概念	357
二、计算方法	358
§ 9.6 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分	364
§ 9.7 重积分的应用	372
§ 9.8 含参变量的积分	385

<b>第十章 曲线积分与曲面积分</b> .....	<b>389</b>
§ 10.1 对弧长的曲线积分 .....	389
一、对弧长的曲线积分的定义和性质.....	389
二、对弧长的曲线积分的计算方法.....	390
§ 10.2 对坐标的曲线积分 .....	400
一、对坐标的曲线积分的定义和性质.....	400
二、对坐标的曲线积分的计算方法.....	401
三、两类曲线积分之间的联系.....	403
§ 10.3 格林公式及其应用 .....	404
一、格林公式.....	404
二、与路径无关的曲线积分.....	411
§ 10.4 对面积的曲面积分 .....	418
一、对面积的曲面积分的定义和性质.....	418
二、对面积的曲面积分的计算方法.....	419
§ 10.5 对坐标的曲面积分 .....	423
一、对坐标的曲面积分的定义和性质.....	423
二、对坐标的曲面积分的计算方法.....	425
三、两类曲面积分之间的联系.....	428
§ 10.6 高斯公式 <sup>△</sup> 和斯托克斯公式.....	429
一、高斯公式 <sup>△</sup> 和斯托克斯公式 .....	429
<sup>△</sup> 二、与曲面无关的曲面积分及与曲线无关的 曲线积分.....	435
三、场论初步.....	439
§ 10.7 曲线积分和曲面积分的应用 .....	441
一、对弧长的曲线积分和对面积的曲面积分的应用 .....	441
二、对坐标的曲线和曲面积分的应用.....	448
<b>第十一章 无穷级数</b> .....	<b>453</b>

§ 11.1 常数项级数 .....	453
一、常数项级数的概念与性质 .....	453
二、正项级数审敛法 .....	457
三、交错级数与任意项级数的审敛法 .....	466
§ 11.2 幂级数 .....	473
一、幂级数的收敛区间 .....	473
二、把函数展开为幂级数 .....	479
三、函数的幂级数展开式在近似计算中的应用 .....	490
§ 11.3 傅立叶级数 .....	494
<b>第十二章 微分方程</b> .....	<b>504</b>
§ 12.1 一阶微分方程 .....	504
一、基本概念 .....	504
二、可分离变量方程与齐次方程 .....	505
三、线性方程与贝努利方程 .....	513
四、全微分方程 .....	518
五、一阶微分方程综合举例 .....	523
§ 12.2 可降阶的高阶微分方程 .....	527
§ 12.3 二阶常系数线性微分方程 .....	533
一、线性微分方程解的结构 .....	533
二、二阶常系数线性微分方程 .....	524
三、欧拉方程 .....	539
四、幂级数解法与常数变易法举例 .....	540
§ 12.4 微分方程的应用问题 .....	544

# 第一章 函数、极限、连续

## § 1.1 函 数

### 一、函数定义域的确定

要确定一个函数必须具备两个要素：对应规则和定义域。求函数的定义域，意味着在实数范围内找出使函数有意义的自变量的取值范围。正确解题的关键在于：

1. 搞清五类基本初等函数的定义域，例如偶次方根被开方数应非负数；对数函数的真数要大于零；反三角正弦、余弦的定义域是区间  $[-1, 1]$  等等；

2. 明确分式函数的分母不能等于零；

3. 熟练掌握解不等式（组）的方法（要认真复习中学阶段的有关知识）；

4. 对实际问题，应考虑到问题本身是否有意义。

例 1 求函数  $f(x) = \lg(x^2 - x - 2) + \frac{x}{\sqrt{x+2}}$  的定义域。

解 在函数解析式中，有对数函数和無理分式函数，因此要使函数  $f(x)$  有意义， $x$  必须满足不等式组：

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

我们先解不等式， $x^2 - x - 2 > 0$ ，即  $(x+1)(x-2) > 0$ 。它的左边是一个多项式，可用图 1-1 的方法确定它的符号。于是，不等式的解为

$$x < -1 \text{ 或 } x > 2.$$

现在问题转化为解不等式组：

$$\begin{cases} x < -1 \text{ 或 } x > 2, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

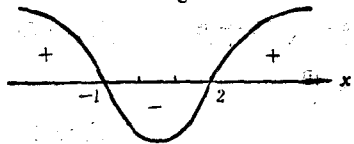


图 1-1

它也可以借助图形求解，图 1-2 中的阴影部分所对应的区间就是它的解（空心小圆圈表示  $x$  不能在这点取值）。所以  $f(x)$  的定义域是

$$-2 < x < -1 \text{ 或 } x > 2.$$

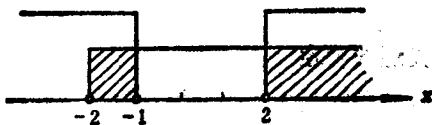


图 1-2

注意：易犯的错误是

1. 忽略了分母不能为零这个因素，从而得到  $x+2 \geq 0$ 。
2. 误认为分母必须大于零，从而得到  $\sqrt{x+2} > 0$ 。

**例 2** 求函数  $f(x) = \arccos \sqrt{\frac{x}{2x-1}}$  的定义域。

**分析**  $f(x)$  是复合函数，求定义域时应分解成若干个简单的初等函数，然后由外层逐步向内层推算。计算过程中要特别注意中间变量的取值范围。

**解**  $f(x)$  可以分解成  $f(u) = \arccos u, u = \sqrt{v}, v = \frac{x}{2x-1}$ ,

其中  $u, v$  是中间变量。

因为  $f(u) = \arccos u$  的定义域是  $-1 \leq u \leq 1$ ，而  $u = \sqrt{v}$  的值域是  $0 \leq u < +\infty$ ，复合时  $u$  应取它们的公共值，即  $0 \leq u \leq 1$ ，于是有

$$\sqrt{v} \leq 1 \text{ 或 } \sqrt{\frac{x}{2x-1}} \leq 1.$$

（注： $\sqrt{v}$  本身是非负数，不必写成  $0 \leq \sqrt{v} \leq 1$ ）

同理可知

$$v \geq 0 \text{ 或 } \frac{x}{2x-1} \geq 0.$$

所以  $x$  必须满足下面不等式组:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{2x-1}} \leq 1, \\ \frac{x}{2x-1} \geq 0, \\ 2x-1 \neq 0, \end{cases}$$

化简后变为

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2x-1} \geq 0, \\ \frac{x}{2x-1} \geq 0, \\ 2x-1 \neq 0, \end{cases}$$

该不等式组的解如图 1-3 阴影部分所示, 因此  $f(x)$  的定义域为  $x \leq 0$  或  $x \geq 1$ .

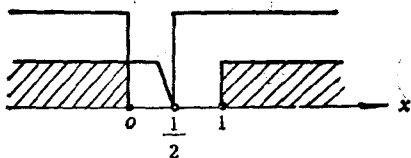


图 1-3

注意: 如果不清楚  $f(u) = \arccos u$  和  $u = \sqrt{v}$  中的  $u$  应取公共值, 会产生以下错误的结果:

1. 
$$\begin{cases} \frac{x}{2x-1} \geq 0, \\ 2x-1 \neq 0. \end{cases}$$
 (遗忘  $f(u) = \arccos u$  的定义域)

2. 
$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{2x-1} \leq 1, \\ 2x-1 \neq 0. \end{cases}$$
 (遗忘  $u = \sqrt{v}$  的值域或它的定义域)

域)

**例 3** 设  $f(x)$  的定义域是  $[0, 1]$ , 求函数  $f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{2}\right)$  的定义域.

**分析** 写成  $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$  的形式, 表明它是复合函数, 是由  $f(u)$

及  $u = x + \frac{1}{2}$  复合而成. 从函数概念知, 函数由两个要素——对应规则和定义域所确定, 与自变量所选的字母无关. 因此  $f(u)$  和  $f(x)$  表示同一个函数,  $f(u)$  的定义域也是  $0 \leq u \leq 1$ , 把  $u = x + \frac{1}{2}$  代入, 求得  $x$  的取值范围, 就是函数  $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$  的定义域.

**解**  $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$  是由  $f(u)$  和  $u = x + \frac{1}{2}$  复合而成. 因为  $f(x)$  的定义域是  $0 \leq x \leq 1$ , 故  $f(u)$  的定义域是  $0 \leq u \leq 1$ . 又  $u = x + \frac{1}{2}$  代入后, 得

$$0 \leq x + \frac{1}{2} \leq 1,$$

于是  $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$  的定义域是

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

同理可知  $f\left(x - \frac{1}{2}\right)$  的定义域是

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

**解不等式组**

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}, \end{cases}$$

最后求得  $f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(x - \frac{1}{2}\right)$  的定义域为

$$x = \frac{1}{2}.$$

**注意:** 常见的错误做法是:

因为  $0 \leq x \leq 1$ , 所以  $\frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$ ,  $f(x + \frac{1}{2})$  的定义域是  $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ . 同样有  $-\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ,  $f(x - \frac{1}{2})$  的定义域是  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ . 因此  $f(x + \frac{1}{2}) + f(x - \frac{1}{2})$  的定义域是  $x = \frac{1}{2}$ .

表面上看答案没错, 其实  $f(x + \frac{1}{2})$  和  $f(x - \frac{1}{2})$  的定义域都是错误的. 主要原因是没搞清  $f(u)$  和  $f(x)$  表示同一个函数.

## 二、函数特性的讨论

函数的特性一般指: 有界性、单调性、奇偶性和周期性. 它们的定义如下:

**1. 有界性** 如果函数  $f(x)$  在某个区间内有定义, 若存在正数  $M$ , 对此区间内的任一  $x$  都有不等式

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称函数  $f(x)$  在此区间内有界.

**2. 单调性** 如果函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内, 随着  $x$  增大而增大, 即对  $(a, b)$  内任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数  $f(x)$  在区间内是单调递增的; 若对  $(a, b)$  内任意两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数  $f(x)$  在区间内是单调递减的.

**3. 奇偶性** 如果函数  $f(x)$  对于定义域内的任意  $x$  都有  $f(x) = f(-x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数; 若有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称  $f(x)$  为奇函数.

**4. 周期性** 对于函数  $f(x)$ , 若存在一个不为零的数  $l$ , 使得关系式

$$f(x+l) = f(x)$$

对于定义域内的任意  $x$  都成立, 则  $f(x)$  称为周期函数. 通常周期函数的周期是指满足上面关系式的最小正数  $l$ .



**例 4** 讨论下列函数在指定区间内的单调性:

$$(1) f(x) = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (-\infty, +\infty);$$

$$(2) f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} \quad (1, +\infty).$$

**分析** 讨论方法有两种: 对区间内任意两点  $x_1, x_2$ , 看  $f(x_2) - f(x_1)$  是否大于零 (小于零) 或当  $f(x_1) > 0$  时, 看此式  $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$  是否大于 1 (小于 1)。题 (1) 用前者方便, 题 (2) 则用后者较好。

**解** (1) 设  $x_1$  和  $x_2$  是  $(-\infty, +\infty)$  内任意两点, 且  $x_1 < x_2$ , 考虑

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \ln(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) - \ln(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}) \\ &= \ln \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}}, \end{aligned}$$

因为  $x_2 > x_1$ , 故  $\sqrt{x_2^2 + 1} > \sqrt{x_1^2 + 1}$ ,  $x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1} > x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}$ ,

$$\frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}} > 1,$$

所以

$$f(x_2) - f(x_1) = \ln \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}} > 0,$$

由定义知  $f(x) = \operatorname{arsh} x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内单调递增。

(2) 设  $x_2 > x_1$ ,  $x_1, x_2$  是区间  $(1, +\infty)$  内任意两点, 考虑

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2)}{f(x_1)} &= \frac{2^{\frac{1}{x_2-1}}}{2^{\frac{1}{x_1-1}}} = 2^{\frac{1}{x_2-1} - \frac{1}{x_1-1}} \\ &= 2^{\frac{x_1 - x_2}{(x_2-1)(x_1-1)}}, \end{aligned}$$

因为  $x_2 > x_1 > 1$ , 所以  $\frac{x_1 - x_2}{(x_2-1)(x_1-1)} < 0$ , 故

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = 2^{\frac{x_1 - x_2}{(x_2-1)(x_1-1)}} < 1,$$