高等学校教材

汽轮发电机组的振动与平衡

浙江大学　顾　晃　主编

水利电力出版社

内 容 提 要

本书为电厂热能动力专业的选修教材，根据汽轮发电机组的振动与平衡选修教材的教学大纲而编写。主要内容是在《汽轮机原理》一书的基础上进一步阐明汽轮发电机组振动的基本原理、振源和振动的消除方法。本书的重点在挠性转子的平衡，并介绍转子平衡时所用的计算程序。这在PC-1500和各型微机在我国电厂中普及的今天有较大的适用价值。

本书除供汽轮机专业高班大学生和研究生作教材外，还是汽轮机专业的技术人员必备的参考书。

前　　言

本教材是根据1983年3月全国热能专业汽轮机教材会议通过的“汽轮发电机组的振动与平衡”选修教材的教学大纲而编写的。

全书共分七章，除了深入讨论刚性转子和挠性转子的振动与平衡外，还对于振源的分析、试验以及测振仪器等给予必要的重视。书中加强了平衡方法的理论和实践；在阐明平衡方法的基础上附有必要的现场平衡例子和计算程序。

本书由浙江大学顾晃主编（编写第一、四、五章），东南大学潘武威参编（编写二、三、六章），第七章由浙江大学任浩仁编写。

全书由华北电力学院张保衡教授主审。

由于编者水平有限，书中不妥及错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1984.12.

目　　录

第一章 机械振动基础

第一节 机械振动及其数学描述

振动是一种复杂的物理现象。机械振动的研究对象是动力系统的振荡运动。动力系统是由具有质量的惯性元件和产生恢复力的弹性元件组成。物体运动产生动能，弹性体变形则产生位能。当系统受到外界干扰时，物体便偏离平衡位置，从而发生动能与位能的相互转换，产生振荡运动——振动。

在旋转式和往复式机械中，运动部件通常存在着各种质量不平衡，后者在机器运转时就会产生周期性的干扰力，激起系统振动。机械系统中各种意外的振动，往往造成机件松脱，轴承动载荷增加，结构件疲劳损伤，甚至发生破坏性事故。因此设法减小机械系统的不良振动，是工程上非常重要和需要解决的问题。

机械振动中极大部分是确定性的周期运动。而简谐运动则是最基本的周期运动。各种不同的周期运动都可以用一系列不同频率的简谐运动来表示。

简谐运动的运动规律可用简谐函数（正弦或余弦）表示，即质点的运动规律为：

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right), \tag{1-1}$$

式中：y——质点位移；

t——时间；

A——位移的最大值，称为振幅。

显然，由于正弦函数是以2π为周期的函数，则T是质点重现同一运动状态所历经的最短时间，称为周期；周期的倒数为频率，其意义是单位时间内同一状态出现的次数；φ是确定质点初始（$t=0$）位置的量。因2π为圆弧度数，故$\frac{2\pi}{T}$表示质点单位时间内所历经的弧度数，所以把$\frac{2\pi}{T}$称为圆频率（rad/s），用ω表示。则式（1-1）可表示为：

$$y = A\sin(\omega t + \varphi). \tag{1-2}$$

图1-1为简谐运动图示，它给出了上述各参数所表征的意义。

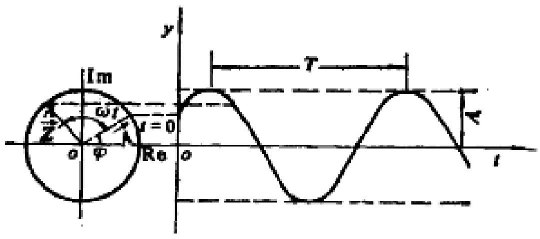

图 1-1 简谐运动图示

此外，由欧拉公式$e^{i(\omega t+\varphi)}=\cos(\omega t+\varphi)+i\sin(\omega t+\varphi)$得出，式（1-2）是复向量$\vec{Z}=Ae^{i(\omega t+\varphi)}$的虚部（$I_m$），即：

$$y=I_m(\vec{Z})。$$

$\vec{Z}$的实部（Re）则表示余弦分量：

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}(\vec{Z})。$$

由图1-1可看出，复向量$\vec{Z}$是大小为A，角速度为ω，绕原点旋转的旋转向量，以数学公式表示之为：

$$\vec{Z}=Ae^{i(\omega t+\varphi)}=Ae^{i\varphi}\cdot e^{i\omega t}=\vec{A}e^{i\omega t}, \tag{1-3}$$

式中$e^{i\omega t}$称为旋转运算子；$\vec{A}=Ae^{i\varphi}$是$t=0$时的一个具有幅值A，相位φ的复向量。旋转运算子$e^{i\omega t}$的意义是：当复向量$\vec{A}$乘以旋转运算子$e^{i\omega t}$后，相当于将$\vec{A}$向正方向旋转ωt角。

因为指数函数的导数仍为指数函数，因此将简谐运动用复指数函数表示后，研究问题将较为方便；例如，若y为质点的位移，则对应的速度v与加速度a分别为：

$$v=\frac{d}{dt}(I_m(\vec{Z}))=I_m(i\omega\vec{Z}), \tag{1-4}$$

$$a=\frac{d^2}{dt^2}(I_m(\vec{Z}))=I_m(-\omega^2\vec{Z})。 \tag{1-5}$$

值得注意的是，简谐函数对时间每求导一次，相当于将原函数乘以$i\omega$。因为A是复向量$\vec{Z}$的幅值，ω为实数，故每次求导使幅值乘以ω倍；同时复向量乘以i，相当于相位提前90°，故每次求导同时使复向量导前90°。位移，速度和加速度用旋转向量及简谐函数表示的相互间关系如图1-2所示。

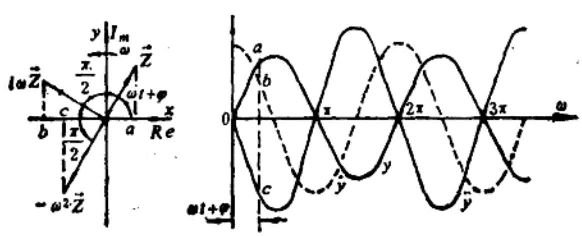

图 1-2　简谐运动的位移、速度和加速度图示

当简谐运动用复向量表示后，在振动分析计算中会经常遇到两个同频率复向量的加减乘除运算。

两个复向量$\vec{A}$和$\vec{B}$的相加和相减的定义是：两个复向量的实部和虚部分别进行相加和相减，即$\vec{A}\pm\vec{B}=\mathrm{Re}(\vec{A}\pm\vec{B})+I_m(\vec{A}\pm\vec{B})$。显然这符合平行四边形的加减法运算规

则，与力学向量的加减法则相同。例如欲求两个简谐运动$x_1=A_1\cos\omega t$，$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi)$的合成运动，此时由于两个同频率余弦简谐运动的和等于两个相应的旋转向量在x轴上的投影之和，以及两个旋转向量在x轴上的投影之和又等于两个旋转向量的合成向量在x轴上的投影，由此从图1-3可以得出其合成结果：

$$x=x_1+x_2=A\cos(\omega t+\beta),$$

式中：

$$A=\sqrt{(A_1+A_2\cos\varphi)^2+(A_2\sin\varphi)^2},$$

$$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{A_2\sin\varphi}{A_1+A_2\cos\varphi}\right).$$

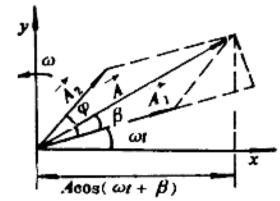

图 1-3　同频率简谐运动的合成

对于两个复向量的乘除运算，应用指数形式的复向量是很方便的。为简单计，通常将指数形式复向量$\vec{A}=Ae^{i\varphi}$写成$\vec{A}=A\underline{/\varphi}$。由此根据指数函数的性质，两复向量$\vec{A}_1=A_1e^{i\varphi_1}$和$\vec{A}_2=A_2e^{i\varphi_2}$相乘除时有：

$$\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2=A_1e^{i\varphi_1}\cdot A_2e^{i\varphi_2}=A_1A_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=A_1A_2\underline{/(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{\vec{A}_1}{\vec{A}_2}=\frac{A_1e^{i\varphi_1}}{A_2e^{i\varphi_2}}=\frac{A_1}{A_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{A_1}{A_2}\underline{/(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

因此，两个复向量的相乘除等于该两复向量的幅值相乘除，以及相位角相加减。其物理意义是所谓旋转伸缩变换：即$\vec{A}_1\cdot\vec{A}_2$$\left(\text{或}\ \dfrac{\vec{A}_1}{\vec{A}_2}\right)$就是将$\vec{A}_1$的幅值伸长（缩短）$A_2$倍，其相位角自$\vec{A}_1$向正向（负向）旋转$\varphi_2$角。因此，利用复向量乘除法的旋转伸缩变换，可将一个复向量变换成另一个幅值和相位的复向量。

第二节　单自由度系统的振动

一、系统自由度的概念

所谓系统的自由度，是指为了完全描述系统的运动所需的独立变量数目，或决定系统中各质点位置的最少独立坐标数。严格地说，每个弹性系统都有无限多个自由度，但这使问题的研究变得相当复杂。因此在研究一具体振动问题时，为了减少系统的自由度数目，应根据系统中各质点的主要运动特点，将系统简化成由具有一定运动约束条件的一系列集中质量、弹簧和阻尼器组成的力学模型系统。图1-4a即为理想化的单自由度振动系统，质量和弹簧仅允许在y方向运动。

二、单自由度系统的简谐激振强迫振动

现研究图1-4a单自由度系统的运动规律。弹簧的自由长度为l，刚度系数为k，k定义为使弹簧产生单位长度变形所需的力；当重块挂上后，弹簧有一静伸长δ_{st}，此时弹簧的内张力为$k\delta_{st}$，它与重块的重力mg相等，由此$\delta_{st}=\dfrac{mg}{k}$，此时弹簧在静重力作用下并不振

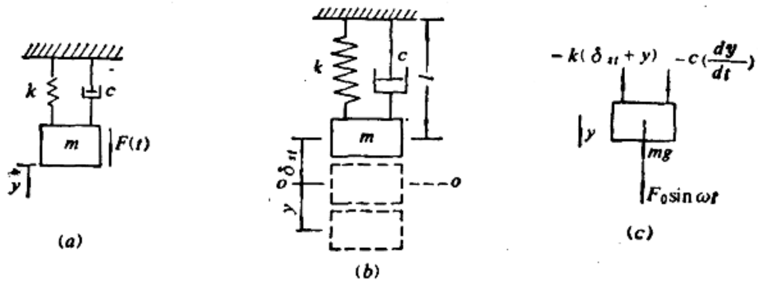

图 1-4 单自由度振动系统示意图

动，重块处于平衡位置o-o（图1-4b）。

今若在重块上作用有简谐外界干扰力即$F_0\sin\omega t$，则重块将产生运动。

作用于重块上的力如下（图1-4c）：

（1）弹簧力，与位移方向相反，故为$-k(\delta_{st}+y)$；

（2）重力，等于mg；

（3）粘性阻力，与速度成正比，但方向相反，为$-c\frac{d}{dt}$；式中c为阻尼系数；

（4）简谐干扰力，等于$F_0\sin\omega t$。

根据动力学定律，重块在上述作用力下的运动方程为：

$$-k(\delta_{st}+y)+mg-c\frac{dy}{dt}+F_0\sin\omega t=m\frac{d^2y}{dt^2}.$$

考虑到$k\delta_{st}=mg$，可得单自由度的有阻尼强迫振动微分方程式为：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\varepsilon\frac{dy}{dt}+\omega_1^2y=\frac{F_0}{m}\sin\omega t, \qquad (1\text{-}6)$$

式中 ω_1——系统的角频率，$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}$；

ε——阻力系数，$\varepsilon=\frac{c}{2m}$。

当不考虑阻尼和外界干扰力时，式（1-6）变为：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_1^2y=0. \qquad (1\text{-}7)$$

公式（1-7）即为单自由度的自由振动微分方程式。这是一个二阶线性常系数齐次微分方程，其解为$y=c\cdot\sin(\omega_1t+\varphi)$。由此可见，由弹簧和质量$m$组成的单自由度线性振动系统的解是一个简谐运动，系数c和φ由初始条件决定；系统振动角频率$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$只决定于系统本身的质量和刚度，与外界因素无关。因此ω_1称为系统固有角频率。当弹簧刚度增加或质量减少，则ω_1将增高；反之将降低。

强迫振动方程（1-6）的通解由式（1-6）的齐次解（不计干扰力的有阻尼自由振动解）和式（1-6）的特解两部分所组成。

齐次解为：

$$y_1=e^{-\varepsilon t}[\,A\cos\sqrt{\omega_1^2-\varepsilon^2}\cdot t+B\sin\sqrt{\omega_1^2-\varepsilon^2}\cdot t]。\qquad(1\text{-}8)$$

这是一个振幅逐渐衰减的自由振动。有阻尼自由振动的角频率$\sqrt{\omega_1^2-\varepsilon^2}$要低于无阻尼时的角频率$\omega_1$；但一般由于$\varepsilon$甚小，故$\sqrt{\omega_1^2-\varepsilon^2}\approx\omega_1$。由于$y_1$随着时间$t$的增加很快地被衰减掉，因此在一定时间后$y$解将主要由特解$y_2$所决定。

由数学理论知，式(1-6)的特解形式为：

$$y_2=A\cdot\sin(\omega t-\varphi),\qquad(1\text{-}9)$$

式中A和φ为两个待定系数，将式(1-9)代入式(1-6)并比较系数后可得：

$$A=\frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\sqrt{(\omega_1^2-\omega^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}},\qquad(1\text{-}10)$$

$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\varepsilon\omega}{\omega_1^2-\omega^2}.\qquad(1\text{-}11)$$

将式(1-10)代入式(1-9)，考虑及$\omega_1^2=\dfrac{k}{m}$以及$\dfrac{F_0}{k}=y_{st}$为弹簧在载荷F_0作用下的静位移后可得：

$$y_2=y_{st}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2+\dfrac{4\varepsilon^2\omega^2}{\omega_1^4}}}\cdot\sin(\omega t-\varphi)。\qquad(1\text{-}12)$$

通常称$\dfrac{A}{y_{st}}=\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2+\dfrac{4\varepsilon^2\omega^2}{\omega_1^4}}}=R$为动力放大因子。

φ表示强迫振动位移方向落后于交变干扰力方向的角度。

显然，动力放大因子R和相位滞后角φ均与$\dfrac{\omega}{\omega_1}$及$\dfrac{2\varepsilon}{\omega_1}$有关，在图1-5中给出了几个典型的$\dfrac{2\varepsilon}{\omega_1}$所对应的$R$，$\varphi$与$\dfrac{\omega}{\omega_1}$的关系。

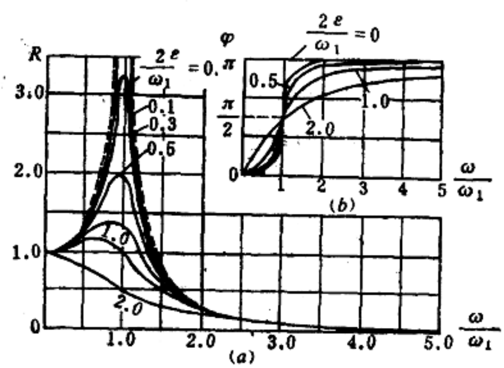

图 1-5 简谐激振单自由度系统的$R\sim\omega/\omega_1$、$\varphi\sim\dfrac{\omega}{\omega_1}$关系曲线

由图1-5a可见，当干扰力频率远小于振动系统的固有频率时，动力放大因子R接近于1，强迫振动振幅近似为y_{st}，亦即振幅的大小仅取决于干扰力的静力F_0作用。相反，当干扰力频率远大于系统固有频率时，动力放大因子R变得相当小。在上述两种情况下，诸曲线相互间靠得很近，这表明在$\omega\ll\omega_1$，$\omega\gg\omega_1$时阻尼作用很小，所以，此时可用无阻尼的强迫振动公式进行近似计算。

当干扰力的频率接近于系统固有频率ω_1时，动力放大因子迅速增大，通常称$\omega=\omega_1$时

的状态为系统共振状态。对于无阻尼系统，在共振状态下，动力放大因子趋于无限大。对于有阻尼系统，阻尼的耗能作用使共振振幅减小，阻尼越大，共振振幅越小；此外，随着阻尼的增大，动力放大因子R的峰值点频率比向左移动，其值由$\dfrac{dR}{d\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)}=0$可求得$\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2=1-\dfrac{2\varepsilon^2}{\omega_1^2}$，并且峰值减小。因此为了降低振动幅值，增加阻尼并避开在共振峰附近运行，是工程中常用的方法。

关于相位角φ的特性，由图1-5b所见，当$\omega<\omega_1$时，$\varphi<90°$；当$\omega>\omega_1$时，$\varphi>90°$；在共振点$\omega=\omega_1$附近，如果阻尼很小，则相位角φ的变化很剧烈；在无阻尼$\varepsilon=0$时的极端情况下，共振时的相位角从$\varphi=0$突变到$\varphi=\pi$，此时在图1-5b上已不再能表示为一条连续曲线而是一条折线了；在有阻尼共振$\omega=\omega_1$时，不论阻尼大小，相位角$\varphi=90°$。

三、单自由度系统的偏心激振强迫振动

上面讨论了干扰力为$F_0\sin\omega t$的情况，但是在旋转机械中，其干扰力常由于其旋转部分的质量不平衡所引起。图1-6表示了一个简化的旋转机械系统。设转子的偏心质量为m_i，偏心距为r_i以及机器总质量为M_0，若机器受到约束，仅允许在y方向运动，则用不平衡干扰力幅值$m_i r_i \omega^2$代替式（1-10）中的F_0并用M_0代替m后可得：

$$y_2=\frac{m_i r_i}{M_0}\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2+\dfrac{4\varepsilon^2\omega^2}{\omega_1^4}}}\cdot\sin(\omega t-\varphi). \qquad (1\text{-}13)$$

式（1-13）中符号的意义同前，此处动力放大因子定义为：

$$R=\frac{A}{\dfrac{m_i r_i}{M_0}}=\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^2+\dfrac{4\varepsilon^2\omega^2}{\omega_1^4}}}.$$

图1-7给出了几个阻力系数下的$\dfrac{\omega}{\omega_1}$与R的关系曲线。同理可得出强迫振动位移方向落后于干扰力方向的角度：

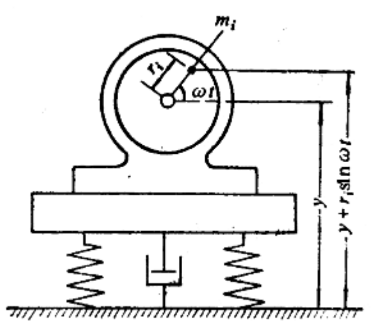

图 1-6 偏心机械的单自由度系统示意图

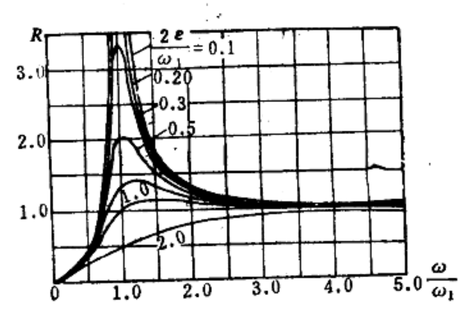

图 1-7 偏心激振单自由度系统的$R\sim\dfrac{\omega}{\omega_1}$关系曲线

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{2\varepsilon\omega}{\omega_1^2-\omega^2}。\qquad (1\text{-}14)$$

公式（1-14）与公式（1-11）相同，因此其相位角变化与图1-5b相同；为便于振动分析，将振动幅值与相位角随干扰力频率ω变化的规律绘于同一图中，称之为振动幅相响应曲线或Nyquist曲线，如图1-8所示。从o点向曲线上任意一点所引向量的长度表示一定干扰力频率下振动的幅值，而它与0°方向的夹角就表示了此干扰力频率下的相位角φ。根据共振点附近相位角变化最剧烈、振幅最大的特点，可以根据向量的长度和单位弧长对应的转速变化值，确定系统的共振参数。

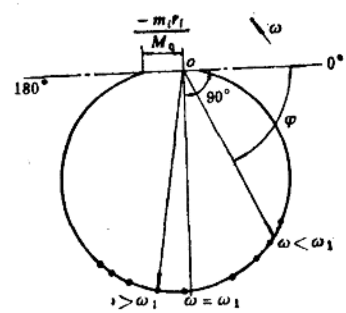

图 1-8　偏心激振单自由度系统的幅相响应曲线

由式1-13和图1-7可见：

（1）当$\omega=0$即无干扰力时，机器振幅

$$y_2=0。$$

（2）当$\omega \ll \omega_1$时，振幅$A\approx\frac{m_i r_i}{M_0}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = \frac{m_i r_i \omega^2}{k}$，因此当系统刚度$k$不变时，振幅的大小反映了不平衡离心力的大小，这是硬支承动平衡机的工作原理。

（3）当$\omega \gg \omega_1$时，振幅$A\approx -\frac{m_i r_i}{M_0}$，亦即振幅反映了不平衡量的大小，负号表示振幅落后于不平衡力180°，这是软支承动平衡机的工作原理。

（4）当$\omega=\omega_1$以及$\varepsilon=0$时，振幅趋于∞，此现象称作共振；随着阻力系数ε的增加，振幅峰值降低，并且峰值点向右移动；因此在图1-8中，振幅最大值出现于φ略大于90°的位置。虽然阻尼的存在能有效地控制振幅的增大，但在有阻尼的共振$\omega=\omega_1$状态，振幅毕竟还是很大的，因此共振现象还要力求避免。

第三节　多自由度系统的振动

一、两自由度系统的运动方程

具有两个以上自由度的系统称为多自由度系统。由于刚度和阻尼的相互耦合作用，对于一个N自由度的振动系统，则需用N个相互耦合的二阶常微分方程组来描述。因为两个自由度与多个自由度在概念上没有本质的区别，所以本节从讨论两自由度系统出发，将其结论推广到多个自由度系统。对于工程上转子之类的连续体的振动，其振动特性也是离散多自由度系统的推广，详细内容将在第四章中讨论。

图1-9a所示为两自由度振动的系统，对系统中每个质量，用同单自由度相似的方法进行受力分析（图1-9b），应用牛顿定律，得运动方程式为：

$$m_1\ddot{y}_1=-k_1y_1-k(y_1-y_2)-c_1\dot{y}_1-c(\dot{y}_1-\dot{y}_2)+F_1(t),$$

$$m_2\ddot{y}_2=-k_2y_2-k(y_2-y_1)-c(\dot{y}_2-\dot{y}_1)-c_2\dot{y}_2+F_2(t).$$

整理得：

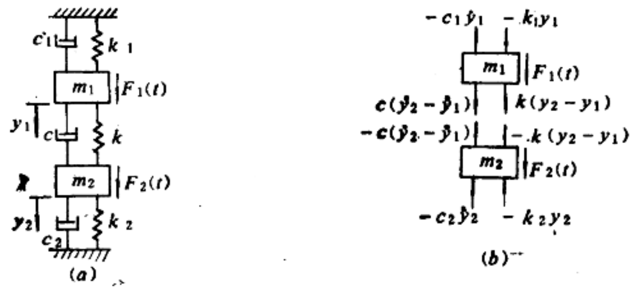

图 1-9　两自由度振动系统示意图

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{y}_1+(c+c_1)\dot{y}_1+(k+k_1)y_1-c\dot{y}_2-ky_2=F_1(t)\\ m_2\ddot{y}_2+(c+c_2)\dot{y}_2+(k+k_2)y_2-c\dot{y}_1-ky_1=F_2(t)\end{aligned}\right\}. \tag{1-15}$$

从方程（1-15）可看出，由于c、k的存在，使得这两个振动体的运动相互耦合在一起。通常将这样的耦合称为刚度耦合或阻尼耦合。由于耦合的存在，使得求解多自由度的振动变得较为复杂。

下面将方程（1-15）表示成矩阵形式，引入下列各项后：

$$[\mathrm{M}]=\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix},\ [\mathrm{C}]=\begin{bmatrix}c_1+c & -c\\ -c & c+c_2\end{bmatrix},\ [\mathrm{K}]=\begin{bmatrix}k_1+k & -k\\ -k & k_2+k\end{bmatrix},$$

$$\{\mathrm{Y}\}=\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix},\qquad \{\mathrm{F}(t)\}=\begin{Bmatrix}F_1(t)\\ F_2(t)\end{Bmatrix}$$

可将方程（1-15）表成如下形式：

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{Y}\}+[\mathrm{c}]\{\dot{Y}\}+[\mathrm{k}]\{\mathrm{Y}\}=\{\mathrm{F}(t)\}, \tag{1-16}$$

式中$[\mathrm{M}]$为质量矩阵，$[\mathrm{C}]$为阻尼矩阵，$[\mathrm{K}]$为刚度矩阵，$\{\mathrm{Y}\}$为位移向量，$\{\mathrm{F}(t)\}$为干扰力向量。

对于更为复杂的N个自由度系统，相互耦合程度可能更高，但运动方程总可表示成和方程（1-16）相同的形式，而各矩阵的维数与系统自由度数N相同。

对于一般动力系统，质量矩阵$[\mathrm{M}]$是对称矩阵，即$[\mathrm{M}]^T=[\mathrm{M}]$，这里$[\ ]^T$表示矩阵的转置。由于系统中位移与力存在着对称关系，故刚度矩阵也为对称矩阵，即$[\mathrm{K}]^T=[\mathrm{K}]$。

二、两自由度系统的自由振动

在无阻尼，无干扰力下，方程（1-16）变成：

$$\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1+k & -k\\ -k & k_2+k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{1-17}$$

方程（1-17）是线性齐次方程，我们仍用待定系数法求解。设：

$$\left.\begin{aligned}y_1=A_1e^{st}\\ y_2=A_2e^{st}\end{aligned}\right\}, \tag{1-18}$$

式中，A_1、A_2、s为待定系数。由于系统是无阻尼的，可以证明，s值是纯虚数，即$s=\pm i\omega_n$，而y应为实数。上述问题的解必定为简谐解，通解包含有若干简谐分量。设其中某

个简谐分量为：

$$\left.\begin{aligned}y_1=A_1\sin(\omega t+\psi)\\ y_2=A_2\sin(\omega t+\psi)\end{aligned}\right\}. \tag{1-19}$$

式中A_1、A_2、ψ为常数，ω为满足方程（1-17）的固有频率。将式（1-19）代入方程（1-17），提出因子$\sin(\omega t+\psi)$，整理后得：

$$\left.\begin{aligned}(k+k_1-\omega^2m_1)A_1-kA_2=0\\ (-kA_1)+(k_2+k-m_2\omega^2)A_2=0\end{aligned}\right\}. \tag{1-20}$$

方程（1-20）为A_1，A_2的线性代数方程组，由线性代数可知，上述方程有非零解的必要条件是系数矩阵的行列式等于零，即

$$\Delta(\omega)=\begin{vmatrix}k_1+k-m_1\omega^2 & -k\\ -k & k_2+k-m_2\omega^2\end{vmatrix}=0。 \tag{1-21}$$

通常称方程（1-21）为两自由度系统的特征方程。展开后得：

$$\omega^4-\left(\frac{k_1+k}{m_1}+\frac{k_2+k}{m_2}\right)\omega^2+\frac{kk_1+kk_2+k_1k_2}{m_1m_2}=0。 \tag{1-22}$$

方程（1-22）是ω^2的二次代数方程。由物理意义可知，ω^2有两个正实根。若记两正实根为ω_1^2，ω_2^2，由此得出ω值为$\pm\omega_1$，$\pm\omega_2$。由于式（1-19）表示的解为简谐函数，而ω的负号仅改变任意常数的符号，并不形成新的解。因此，两自由度系统的固有频率为ω_1，ω_2。

方程（1-17）的解有两个谐波分量，频率分别是ω_1和ω_2。习惯上，称较低的频率项为基波，其它项为谐波。根据迭加原理，得方程（1-17）的解为：

$$\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}A_{11}\\ A_{21}\end{Bmatrix}\sin(\omega_1t+\psi_1)+\begin{Bmatrix}A_{12}\\ A_{22}\end{Bmatrix}\sin(\omega_2t+\psi_2). \tag{1-23}$$

上式中四个幅值系数并非独立的，在某个固有频率下，利用方程（1-20），可求得它们之间的关系．当$\omega=\omega_1$时，有：

$$\frac{A_{11}}{A_{21}}=\frac{k}{k_1+k-m_1\omega_1^2}=\frac{k_2+k-m_2\omega_1^2}{k}. \tag{1-24}$$

当$\omega=\omega_2$时，有：

$$\frac{A_{12}}{A_{22}}=\frac{k}{k_1+k-m_1\omega_2^2}=\frac{k_2+k-m_2\omega_2^2}{k}. \tag{1-25}$$

式（1-24）和（1-25）表明，在两自由度系统中：在某个谐波分量下，各振动体的相对振幅的大小是由其物理参数确定的，而与系统的初始状态无关。因此把这种确定的幅值分布称为振型或模态，对应地称$\begin{Bmatrix}A_{11}\\ A_{21}\end{Bmatrix}$和$\begin{Bmatrix}A_{12}\\ A_{22}\end{Bmatrix}$为振型向量或模态向量。

利用振型关系，可将振型向量用某个振动体的振幅归一化形式表示。例如，式(1-23)可表示为：

$$\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ u_1\end{Bmatrix}A_{11}\sin(\omega_1t+\psi_1)+\begin{Bmatrix}1\\ u_2\end{Bmatrix}A_{12}\sin(\omega_2t+\psi_2), \tag{1-26}$$

式中$u_1=\dfrac{A_{21}}{A_{11}}$，$u_2=\dfrac{A_{22}}{A_{12}}$.

更为一般地，把归一化后的各阶振型向量用振型矩阵[u]来表示，即式(1-26)可表示为：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} A_{11}\sin(\omega_1 t+\psi_1) \\ A_{12}\sin(\omega_2 t+\psi_2) \end{Bmatrix}$$

$$=[\mathrm{u}]\begin{Bmatrix} A_{11}\sin(\omega_1 t+\psi_1) \\ A_{12}\sin(\omega_2 t+\psi_2) \end{Bmatrix}, \tag{1-27}$$

式中A_{11}、A_{12}、ψ_1、ψ_2为由初始条件确定的常数。由于在上式中列向量的元素对应于某个谐波分量，因此定义

$$\{\mathrm{P}(t)\}=\begin{Bmatrix} A_{11}\sin(\omega_1 t+\psi_1) \\ A_{12}\sin(\omega_2 t+\psi_2) \end{Bmatrix}$$

为主座标或模态座标。所以方程(1-17)的解为：

$$\{\mathrm{Y}\}=[\mathrm{u}]\{\mathrm{P}(t)\}. \tag{1-28}$$

为了说明两自由度系统的固有频率和振型，兹举例如下：

例：在图1-9a的两自由度系统中，若$c_1=c_2=c=0$，且$m_1=m_2=m$，$k_1=k_2=k=K_0$。此时系统可简化成图1-10a，由方程(1-22)求解并取正值得：

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k_0}{m}},\qquad \omega_2=\sqrt{\frac{3k_0}{m}}.$$

振幅比$u_1=1$，$u_2=-1$，即振型矩阵为：

$$[\mathrm{u}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}。$$

由振型矩阵可知，在一阶振型中，两个振动体相对位置不变，所以中间弹簧无相对伸长，这与图1-10b所示的两个质量用刚性连接等价。对于二阶振型，两个质量的运动方向相反，根据弹簧变形可知，中间弹簧的中点为节点，其振型如图1-10c所示，图中绘出了与节点存在等价的动力学系统。此例表明，在多自由度系统中、高阶振型中节点的存在，相当于增加了系统的刚度。

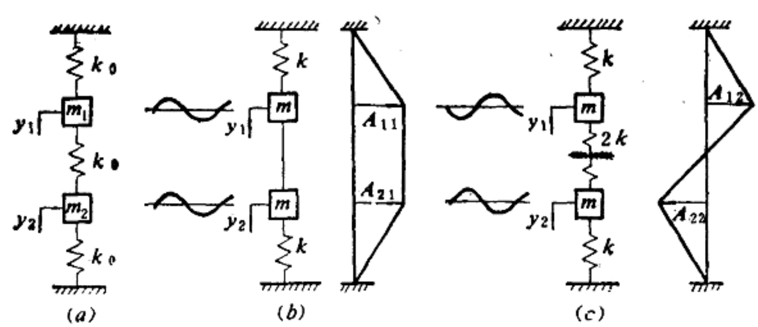

图 1-10　两自由度系统的振动示意图

三、多自由度系统的自由振动

上面讨论了两自由度系统的振动特性．这里将讨论任意自由度系统的更为一般的规律。

方程（1-16）给出了多自由度系统的运动方程，在无阻尼、无干扰力时，运动方程为：

$$[M]\{\ddot{Y}\}+[K]\{Y\}=\{O\}. \tag{1-29}$$

仿照两自由度系统的研究方法，设其解为：

$$\{Y\}=\{A\}e^{i\omega t}. \tag{1-30}$$

将式（1-30）代入方程（1-29）得：

$$([K]-\omega^2[M])\{A\}=0. \tag{1-31}$$

对应的特征方程为：

$$\Delta(\omega)=det([K]-\omega^2[M])=0, \tag{1-32}$$

式中$det(\ )$为矩阵的行列式。

对于n自由度系统，特征方程是ω^2的n次代数方程，故一定有n个根。由振动的物理意义可知，这些根且不小于零。方程的根即为系统的固有频率。与两自由度系统一样，对应于每个固有频率，可得到运动方程组的一组特解$\{A\}$，特解$\{A\}$的意义就是对应固有频率下的系统振型。可以证明，对n阶振型，一定存在着$n-1$个节点，也就是说，振型阶数越高，节点数越多。同理可将$\{A\}$归一化表示成相对振幅$\{u\}$的形式。

在方程（1-31）中，若ω_i是满足方程的一个固有频率，那么必存在一个与之对应的向量$\{A\}_i$并满足下式：

$$([K]-\omega_i^2[M])\{A\}_i=0. \tag{1-33}$$

而对第j个固有频率（其中$\omega_j\neq\omega_i$），同理

$$([K]-\omega_j^2[M])\{A\}_j=0. \tag{1-34}$$

那么用$\{A\}_j^T$左乘式（1-33），得：

$$\{A\}_j^T([K]-\omega_i^2[M])\{A\}_i=0. \tag{1-35}$$

用$\{A\}_i^T$左乘式（1-34）并转置，利用$[M]$、$[K]$的对称性，得：

$$\{A\}_j^T([K]-\omega_j^2[M])\{A\}_i=0. \tag{1-36}$$

将式（1-35）减去式（1-36），得：

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\{A\}_j^T[M]\{A\}_i=0.$$

由于$\omega_i^2\neq\omega_j^2$，则一定有：

$$\{A\}_j^T[M]\{A\}_i=0. \tag{1-37}$$

同理，把式（1-35）加上式（1-36），并利用式（1-37），可得到：

$$\{A\}_j^T[K]\{A\}_i=0. \tag{1-38}$$

式（1-37）、（1-38）表明，第i阶振型与第j阶振型关于$[M]$、$[K]$是正交的。式（1-37）可解释为：当系统按i阶振型振动时，如给予j阶振型的位移，则惯性力$m_k\omega_i^2A_k^{(i)}$（$k=1, 2, \cdots, n$）所作功的总和等于零。同理可解释式(1-38)。在多自由度振动中，振型的正交关系是一个十分重要的性质。

在式(1-37)中，当$i=j$时，设

$$\{A\}_i^T[M]\{A\}_i=M_i,$$

同理有：

$$\{A\}_i^T[K]\{A\}_i=K_i。$$

我们称M_i为第i阶模态质量，K_i为第i阶模态刚度。

对于归一化的振型矩阵$[u]=[u_1, u_2, \cdots u_n]$，(其中$u_i$为第$i$阶振型向量)，则：

$$\begin{aligned}&[u]^T[M][u]\\&=[u_1,u_2,\cdots\cdots u_n]^T[M][u_1,u_2\cdots\cdots,u_n]\\&=\begin{bmatrix}M_1 & & & 0\\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_N\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记为}}\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & M & \\ & & \ddots\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

对于刚度矩阵[K]，同理可得：

$$\begin{aligned}&[u]^T[K][u]\\&=\begin{bmatrix}K_1 & & & 0\\ & K_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K_N\end{bmatrix}\xlongequal{\text{记为}}\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & K & \\ & & \ddots\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

那么，若令 $$\{Y\}=[u]\{q\}, \tag{1-39}$$

则将上式代入方程(1-29)，并用$[u]^T$左乘后，可得：

$$[u]^T[M][u]\{\ddot{q}\}+[u]^T[K][u]\{q\}=0。$$

利用已导出的正交关系，则上式表为：

$$\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & M & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\{\ddot{q}\}+\begin{bmatrix}\ddots & & \\ & K & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\{q\}=0. \tag{1-40}$$

显然，在方程(1-40)中，由于质量矩阵和刚度矩阵均为对角矩阵，即各方程间无耦合项，从而可用单自由度振动分析方法来处理。对于第i阶振型，有：

$$M_i\ddot{q}_i+K_iq_i=0,$$

式中，q_i表示第i阶振型的位移，称之为振型坐标。

对于有阻尼的多自由度系统，阻尼的存在，往往可能使各阶振型相互耦合起来。然而，在多自由度系统中，阻尼的作用与单自由度系统一样，在共振区，阻尼能降低振幅，并使其振点偏移。但是在共振区以外，阻尼的影响可以略去不计。

工程上，为便于分析，经常将作用小的阻尼略去不计，力求使阻尼矩阵解耦。比例阻尼则是常用的阻尼假设模型，即假定阻尼矩阵[C]正比于质量矩阵[M]和刚度矩阵[K]，即

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K],$$

其中，α、β为比例常数。显然，利用这个假设阻尼模型，可消除阻尼矩阵的耦合作用。

四、多自由度系统的强迫振动