

高等学校教学用书

动力气象学

下 册

B. A. 别林斯基著

高等教育出版社

高等学校教学用书



动力气象学

下册

B. A. 别林斯基著
仇永炎 顾震潮译

高等教育出版社

本書是根据苏联国立技术理論書籍出版社(Ростехиздат)出版的別林斯基(В. А. Беллинский)著的“动力气象学”(Динамическая метеорология) 1948年版譯出的。原書經苏联高等教育部审定为水文气象学院和综合性大学物理系教学参考書。

全書共二十一章,中譯本分为上、中、下三册出版。本册是下册,内容包括五章:大气能量、大气环流、天气扰动理論、H. A. 基別尔天气预报理論和天气方程的积分。

从第十七章到第二十章是仇永炎譯的,第二十一章是顧震潮譯的。校訂工作由顧震潮、陶詩言和仇永炎負責。

动力气象学

下 册

В. А. 別林斯基著

仇永炎等譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一書号 13010·652 开本 850×1163 1/32 印張 6 15/16
字數 184,000 印數 1—2,200 定价(4) 羊 0.80
1959年9月第1版 1959年9月上海第1次印刷

下 册 目 录

第十七章 大气运动的能量	581
§ 1. 大气中能量的轉換	581
§ 2. 个别空气質点的能量平衡方程	582
§ 3. 任意气团的能量平衡方程	585
§ 4. 鉛直气柱的能量	588
§ 5. 气团鉛直重新分布时所放出的能量	540
§ 6. 大气中平均运动的动能向乱流动能的轉換	545
§ 7. 大气中乱流能量的平衡方程	547
第十八章 大气环流	550
§ 1. 一般概念	550
§ 2. 大气环流的簡述	551
§ 3. 射出輻射与太阳辐射的地理分布	560
§ 4. 环流定理	564
§ 5. 环流定理应用到大气环流上	572
§ 6. 由赤道向极地的热量輸送	574
§ 7. 从海洋到陆地的热量輸送	576
§ 8. H. E. 柯欽大气环流的数学理論	578
§ 9. E. H. 布利諾娃的气压波及大气活动中心的流体力学理論	582
第十九章 大气运动的扰动理論	588
§ 1. 微扰动理論在大气运动中的应用	588
§ 2. 微扰动的微分方程	589
§ 3. 大气中的波动	594
§ 4. 不可压缩流体的自由表面上的重力波	595
§ 5. 两种流动分界面上的平面波	602
§ 6. 分界面上的微振动	610
§ 7. 分界面的綫圈振动	614
§ 8. 关于非綫圈振动的分界面的稳定度	624
第二十章 H. A. 基別尔天气預报的理論方法	635
§ 1. 边界層及自由大气	635

§ 2. 由运动方程来确定 u 及 v	637
§ 3. 由連續方程来确定 w	639
§ 4. 确定 u, v, w 的第一近似值和第二近似值的公式的摘要	641
§ 5. 估计温度与高度的从屬关系	648
§ 6. H. A. 基别尔第一基本关系式	644
§ 7. 对流層頂上的边界条件	648
§ 8. 根据“簡化模式”求問題的解	652
§ 9. 以第一近似值作预报的圖解法	654
§ 10. 等 θ 綫和引导气流	657
§ 11. 气压动力变化	660
§ 12. 气压动力变化与 θ 綫及 T_0 綫的几何特性之間的关系	662
第二十一章 天气方程的积分	671
§ 1. 天气方程組	671
§ 2. 由辐射热交换和乱流热交换所造成的地球大气中的温度分布	677
§ 3. 地球大气中温度的年平均分布	685
§ 4. 杜洛尼村論混合層里的温度日变程	697
§ 5. 预报温度日变程的理論方法	707
§ 6. 气团在下垫面影响下的变性	724
附录	730
参考文献	747

第十七章 大气运动的能量

§ 1. 大气中能量的轉換

对于动力气象学里所研究的大气过程来说,下列几种能量形式具有重大的意义:

(1) 辐射能(R);

(2) 具有大气环流数量级或气旋与反气旋中气流数量级的、大规模平均运动的动能(E);

(3) 乱流运动的动能(E'),它是由于在平均运动上附加速度所引起的;

(4) 气团的位能(Π);

(5) 空气的内能(U).

我们完全不去考虑电能和磁能,它们虽然对于大气中某些特别现象具有重大的意义,但对于动力气象学里所研究的大气过程来说并不重要。

空气的位能和内能与温度 T 成正比;所以,正如以后要指出的,这位能和内能彼此之间有着紧密的相互关系,即是,增加大气的内能,位能也随之增加,反之减少。

在大气中能量永远不停地由一种形式转换到另一种形式。吸收与放射、机械做功与机械能消散为热能的作用,是这类转换的几种基本机制作用。

大气中能量转换可有如下几种方式:

$$(1) R \rightarrow (U + \Pi), \quad (2) (U + \Pi) \rightarrow R,$$

$$(3) (U+H) \rightarrow E, \quad (4) (U+H) \rightarrow E',$$

$$(5) E \rightarrow (U+H), \quad (6) E' \rightarrow (U+H),$$

$$(7) E \rightarrow E'.$$

辐射能不能直接转换为动能。在辐射能还没有被大气吸收以前，即当它还没有变为内能时，它对大气的意义不大，而且在大气情况下（在重力场中），位能总是随内能增加而增加，所以 $R \rightarrow (U+H)$ 。内能借大气放射重新转换为辐射能，而且位能亦随内能减少而减少，所以 $(U+H) \rightarrow R$ 。

由于吸收辐射能所积累起来的内能与位能，能够再转换为动能，而且它们既能够转换为大规模运动的动能 $(U+H) \rightarrow E$ ，又能够转换为乱流运动的动能 $(U+H) \rightarrow E'$ 。内能与位能转换为动能的问题，是近代动力气象学最重要问题之一，因为大气环流及气旋、反气旋的发展，刚好与这种转换机制作用有关。动能又能够转换为内能与位能，动能既能够用一种直接方式转换为位能 $E \rightarrow (U+H)$ ，又能够用消散机械能的方式转换为热能。在后一种情形中，发生涡旋衰老引起动能逐渐减少的过程。在大规模流动动能转换为越来越小涡旋的动能 $E \rightarrow E'$ ，一直到它受粘性影响而被耗散为热能 $E' \rightarrow (U+H)$ 为止。

大规模流动动能转换为乱流运动动能的过程，是一种不可逆的过程。

在自然界中不可能有这样一种过程，它使流线变直，它是依赖于附加运动速度减小所引起的总流速增加^①。

§2. 个别空气质点的能量平衡方程

我们来推导质量为1的个别空气质点的能量平衡方程。假使没有摩擦，并且把空气视为理想流体。在这种情形中，运动方程可写为：

① 按照近代的动力气象学研究（郭晓岚等），这结论已成问题。详见叶笃正等“大气环流的若干基本问题”——译者注。

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega \sin \varphi v, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega \sin \varphi u, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

方程(1)分别以 u, v, w 乘之, 而后相加, 得到机械能平衡方程或活势方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{2} + gz \right) &= -\frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} c, \end{aligned} \quad (2)$$

式中 c 为风速, 而 $\frac{\partial p}{\partial s}$ 为压力沿风速方向的上升度分量。

由于惯性力与速度方向垂直, 惯性力所作的功恒等于零, 因此地球旋轉偏向力未出现在活势方程之内, 这也是老早料想到的。

如果运动是水平的, 则 $\frac{d}{dt}(gz) = 0$, 方程(2)就简化为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} c. \quad (3)$$

由方程(3)得出, 假如气压沿运动方向下降 ($\frac{\partial p}{\partial s} < 0$), 则动能增加, 反之则动能减少。所以, 空气作反梯度运动时, 动能随之丧失。

以理想气体的热量流入方程

$$\frac{dq}{dt} = c \frac{dT}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (4)$$

与活势方程(2)相合并, 得到无摩擦运动着的理想气体的能量平衡方程:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{2} + gz + c \cdot T \right) + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} c. \quad (5)$$

方程(5)指出, 自外部加于无摩擦运动着的单位质量理想气体的

能量, 分散成气体动能、内能及位能之和的变化、膨胀所作的功及克服气压梯度的影响。

注意到

$$c \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t},$$

得到下列形式的能量平衡方程:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{2} + gz + c_v T + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (6)$$

如为定常运动 $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, 而空气状态的变化为绝热的, $\frac{dq}{dt} = 0$, 则方程(6)对时间求积分:

$$\frac{c^2}{2} + gz + c_v T + \frac{p}{\rho} = \text{常数}. \quad (7)$$

但

$$c_v T + \frac{p}{\rho} = c_p T + RT = c_p T.$$

所以, 在这种情形下能量平衡方程取为

$$\frac{c^2}{2} + gz + c_p T = \text{常数}. \quad (8)$$

这个方程表示不同时间内任意质点的状态参数之间的关系。但是因为我們考虑定常运动, 那么在这种情况下质点的轨迹与流线相重合。所以, 方程(8)也表示位于同一流线上的不同质点的状态参数之间的关系。然而对于不同流线来说, 常数值一般不同。

方程(7)是不可压缩理想流体的伯努利方程的推广:

$$\frac{c^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数}. \quad (9)$$

伯努利方程及其推广有很多应用, 特别是在气象仪器学方面。例如, 它解释为什么在风速大时气流中任何障碍物能使水银表气压值扰动很厉害。这个方程作为仪器设置的理论基础, 这种仪器是利用气流

中發展起来的压力来测量流速的。伯努利方程指出,利用高速飞机上所装置的仪器来测量压力与温度,誤差可能相当大。

§ 3. 任意气团的能量平衡方程

由能量守恒定律出發,我們能够把任意流体团的能量平衡方程写成如下形式:

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dU}{dt} = Q + \int_V \rho(\mathbf{F}, \mathbf{v}) d\tau + \int_S (\mathbf{p}_n, \mathbf{v}) d\sigma \quad (1)$$

(参看第八章 § 8), 式中 $\frac{dE}{dt}$ 为所考虑的流体团在單位時間內动能的变化; $\frac{dU}{dt}$ 为同一流体团在單位時間內内能的变化; Q 为外来的热流入量; $\int_V \rho(\mathbf{F}, \mathbf{v}) d\tau$ 为所有的体积力在單位時間內所作的功; $\int_S (\mathbf{p}_n, \mathbf{v}) d\sigma$ 为所有的表面力在單位時間內所作的功。

把能量平衡方程改变成便于大气研究的形式。利用第八章 § 13 所得到的結果, 我們能够把气流总动能的变化 $\frac{dE}{dt}$ 考虑成平均运动动能的变化 $\frac{d\bar{E}}{dt}$ 与扰动动能的变化 $\frac{dE'}{dt}$ 之和

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{dE'}{dt}, \quad (2)$$

而且所考虑的气团的扰动动能的变化能够表示成:

$$\frac{dE'}{dt} = \int_V T d\tau - \int_V D d\tau, \quad (3)$$

式中 T 为对單位体积及單位時間而言的平均运动动能到扰动动能的轉換, 而 D 为对單位質量而言的机械能的消散:

$$T = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (4)$$

$$D = \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}, \quad (5)$$

由(2)及(3)所得到的 $\frac{dE}{dt}$ 表达式:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\bar{E}}{dt} + \int_{\tau} T' d\tau - \int_{\tau} D d\tau \quad (6)$$

代替能量平衡方程(1)中的 $\frac{dE}{dt}$, 则能量平衡方程推导成如下形式:

$$\frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{dU}{dt} = Q + \int_{\tau} \rho(\mathbf{F}, \mathbf{v}) d\tau + \int_{\Sigma} (\mathbf{p}_n, \mathbf{v}) d\sigma - \\ - \int_{\tau} T' d\tau + \int_{\tau} D d\tau. \quad (7)$$

现在考虑质量力作功的表达式。我们记得, 在研究动力气象学中大气运动时只讨论两种质量力: 地球旋转偏向力及重力。因为地球旋转偏向力总是垂直于速度, 那么它的功恒为零。所以能量平衡方程中没有地球旋转偏向力。

现在以重力位势 Φ 代替唯一的質量力即重力引入能量平衡方程:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \Phi. \quad (8)$$

因为重力位势 Φ 是单位质量的位能, 那么所研究的所有流体团的位能 Π 以下式来表示:

$$\Pi = \int_{\tau} \rho \Phi d\tau. \quad (9)$$

考虑到 $\rho d\tau = \text{常数}$, 我们得到:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \Phi d\tau = \int_{\tau} \rho \frac{d\Phi}{dt} d\tau = \\ = \int_{\tau} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \rho(\mathbf{v}, \text{grad } \Phi) d\tau. \quad (10)$$

但是一点的重力位势与时间无关 $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, 所以,

$$\frac{dH}{dt} = \int_{\tau} \rho(\mathbf{v}, \text{grad } \Phi) d\tau. \quad (11)$$

现在把表示质量力作功的积分变形, 得到:

$$\int_{\tau} \rho(\mathbf{F}, \mathbf{v}) d\tau = - \int_{\tau} \rho(\mathbf{v}, \text{grad } \Phi) d\tau = - \frac{dH}{dt}. \quad (12)$$

所以, 能量平衡方程取为

$$Q = \frac{d}{dt} (\bar{E} + E' + H + U) - \int_{\Sigma} (\mathbf{p}_n, \mathbf{v}) d\sigma \quad (13)$$

或者,

$$Q = \frac{d}{dt} (\bar{E} + U + H) - \int_{\Sigma} (\mathbf{p}_n, \mathbf{v}) d\sigma + \int_{\tau} T d\tau - \int_{\tau} D d\tau.$$

方程(13)表示, 外源的热流入量分散成动能(平均运动动能及扰动动能)、内能与位能之和的变化, 以及分散成压力在单位时间内所作的功及粘性力所作的功, 这两种功作用在包围所研究的流体体积的表面上。

将焓 ϑ 引入能量平衡方程。

单位质量的焓决定于公式 $\vartheta = u + p\alpha$, 式中 u 为单位质量的内能, α 为比容, 而整个流体团的焓以下式表示

$$\vartheta = \int_{\tau} \rho(u + p\alpha) d\tau = \int_{\tau} \rho u d\tau + \int_{\tau} \rho p\alpha d\tau. \quad (14) \textcircled{1}$$

这个恒等式对时间求微分, 并考虑到 $\rho d\tau = \text{常数}$, 得到:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{dU}{dt} + \int_{\tau} \rho \frac{d(p\alpha)}{dt} d\tau. \quad (15) \textcircled{1}$$

借用(15)式由方程(13)消去内能, 得到下列形式的能量平衡方程

$$Q = \frac{d}{dt} [\bar{E} + E' + H + \vartheta] - \int_{\tau} \rho \frac{d(p\alpha)}{dt} d\tau - \int_{\Sigma} (\mathbf{p}, \mathbf{v}) d\sigma. \quad (16) \textcircled{1}$$

$\int_{\Sigma} (\mathbf{p}_n, \mathbf{v}) d\sigma$ 给出压力及粘性力在单位时间内对包围体积 τ 的表

① 原书中(14)(15)及(16)三式的焓以小写 ϑ 表示, 但按意思来说, 应与小写 α 有所区别, 所以改成以大写 ϑ 来表示。——译者注。

面 Σ 所作的功,将这个面积分变形:

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{p}_n, \mathbf{v}) d\sigma = - \int_{\Sigma} p(\mathbf{n}, \mathbf{v}) d\sigma + \int_{\Sigma} (\mathbf{p}_n + p\mathbf{n}) \mathbf{v} d\sigma,$$

式中 $\mathbf{n}$ 垂直于面积 $d\sigma$ 的单位矢量;右端第一项给出压力所作的功,而第二项给出粘性力所作的功。

再用高斯定理并考虑欧拉算符,得到:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} p(\mathbf{n}, \mathbf{v}) d\sigma &= \int_{\Sigma} p v_n d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} p \mathbf{v} d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left(\frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} \right) d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left(\frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v + \frac{\partial p}{\partial z} w \right) d\tau + \int_{\tau} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = \\ &= \int_{\tau} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right) d\tau + \int_{\tau} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

此外,

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \rho \frac{d(p\alpha)}{dt} d\tau &= \int_{\tau} \rho p \frac{d\alpha}{dt} d\tau + \int_{\tau} \frac{dp}{dt} d\tau = \\ &= \int_{\tau} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau + \int_{\tau} \frac{dp}{dt} d\tau, \end{aligned}$$

所以

$$- \int_{\tau} \rho \frac{d(p\alpha)}{dt} d\tau - \int_{\Sigma} p(\mathbf{n}, \mathbf{v}) d\sigma = \int_{\tau} \frac{\partial p}{\partial t} d\tau.$$

所以,能量平衡方程取为

$$Q = \frac{d}{dt} [E + E' + H + \mathcal{G}] - \int_{\tau} \frac{\partial p}{\partial t} d\tau - \int_{\Sigma} \mathbf{v} (\mathbf{p}_n + p\mathbf{n}) d\sigma. \quad (18)$$

这个能量平衡方程表示,由外源加于流体体积的热流入量分解为:动能(平均运动动能及乱流运动动能)、位能与焓之和的变化,气压局地变化及粘性力对体积边界所作的功。

§ 4. 铅直气柱的能量

考虑由高度 $z=0$ 伸展到高度 $z=h$ 的单位截面的铅直空气柱。这

个气柱的内能决定于公式

$$U = c_v \int_0^h T \rho \, dz. \quad (1)$$

考虑静力学基本方程

$$dp = -g\rho \, dz,$$

得到:

$$U = \frac{c_v}{g} \int_{p_h}^{p_0} T \, dp, \quad (2)$$

用公式(2)计算气柱的内能常常比用公式(1)来得方便些。

所考虑气柱的位能等于

$$\Pi = \int_0^h g z \rho \, dz, \quad (3)$$

由此,利用静力学基本方程来引进压力,求得

$$\Pi = \int_{p_h}^{p_0} z \, dp = -h p_h + \int_0^h p \, dz,$$

但

$$p = R\rho T,$$

所以,

$$\Pi = -h p_h + R \int_0^h T \rho \, dz. \quad (4)$$

这个气柱的焓可按下式求出:

$$\mathcal{H} = c_p \int_0^h T \rho \, dz = \frac{c_p}{g} \int_{p_h}^{p_0} T \, dp. \quad (5)$$

把恒等式(1)及(4)合并,得到

$$\Pi = -h p_h + (\kappa - 1)U, \quad (6)$$

式中

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1.4,$$

所以,

$$U + \Pi = -h p_h + \kappa U = -h p_h + \mathcal{H}. \quad (7)$$

假如空气柱高到无穷, 则当 $h \rightarrow \infty$ 时乘积 $hp_h \rightarrow 0$, 因为气压 p 按指数定律随高度减小, 而高度本身线性增加。所以对无穷高气柱来说就有下列关系式:

$$U + \Pi = 0, \quad (8)$$

$$U : \Pi = \kappa - 1 = 0.4. \quad (9)$$

所以, 凡无限高气柱的位能变化都是与这个气柱的内能变化成正比, 反过来也一样。因而, 当研究大气里能量转换的过程时, 常常考虑位能与内能的总和。这个总和能够用焓来代替。再强调一次, 这个关系只有对于无限高的气柱才是正确的; 对于任意有限体积空气的情形, 不再遵守这个关系, 这种情况由计算有限高气柱的方程(7)显示出来。由(7)显见, 有限体积空气的 Π 绝不等于 $(\kappa - 1)U$, 却恒小于这个值。

§ 5. 气团铅直重新分布时所放出的能量

现在考虑由内能和位能转换为动能的某些示例。假定大气处于不稳定平衡之下, 而且这个不稳定度或者由铅直层结所引起的, 或者由气团沿水平方向的不稳定分布所引起的。为了使大气摆脱不稳定平衡的状态, 必需加上某些外界冲力。假如平衡破坏, 则内能和位能转换为动能。当内能与位能的总和减小的时候, 动能增加; 当这个总和趋向于最小值时, 动能趋向于最大值。动能达到最大值的状态, 可以有条件地称为“最后”状态。显然, 这个“最后”状态并非永远维持, 因为它达到之后动能又开始反向转变为位能与内能。

考虑一个气柱, 底为地表面, 四周用铅直硬壁包围起来, 而顶是开着的。只在这个气柱内 h 高度以下的下部里有气团重新分布, 而且它的上部仿佛像一个重量为 $p_h B$ 的硬活塞上下运动着, 此处 p_h 为气团重新分布后上界所受的压力, 而 B 为柱底的面积。

例 1. 取一个气柱, 它的地面气压为 p_0 , 其中两种气团 (分别以指标 1 及 2 表示) 上下相接。第一气团上界上的压力为 p_h 。第二气团

較第一气团暖些。因而引起气团重新分布,最后状态是第一气团处于第二气团之下(1'及2')。再者,两种气层的高度分别由 h_1 变到 h'_1 , 由 h_2 变到 h'_2 。它們上界的气压由 p_i 变到 p'_i 。气压 p_h 的高度也有改变。

当气团重新分布时,單位气柱內的位能与內能的总和有一部分轉換为动能,除此之外,有一部分用于气柱膨胀作功,其值显然等于 $p_h(h'-h)$ 。所以,

$$\begin{aligned} (\Pi+U) - (\Pi+U)' &= \\ &= E' + p_h(h'-h), \quad (1) \end{aligned}$$

式中标有“'”者为跟最后状态所相应的量的值。但是,根据 § 4 (7),

$$\begin{aligned} \Pi+U &= \mathcal{G} - h p_h, \\ (\Pi+U)' &= \mathcal{G}' - h' p_h. \end{aligned}$$

所以,

$$E' = \mathcal{G} - \mathcal{G}'. \quad (2)$$

因此,为了决定气团鉛直分布时所放出的动能,必須計算該气柱的焓值之差。

假定在起始状态中,第一气团及第二气团都处在随遇状态,即每气团的位温处处都是一样。再假定,气团的重新分布是絕热的,即每气团在这过程进行时保持位温不变。假定界面 i 上在起始状态的温度由 T_{i2} 突然变到 T_{i1} 。 $p_0, T_{02}, h_2, h_1, T_{i1}$ 当作已知值,計算單位气柱在起始状态及最后状态的焓。根据 § 4 (5),

$$\mathcal{G} = \frac{c_p}{g} \int_{p_h}^p T dp.$$

由于随遇平衡,用了絕热方程

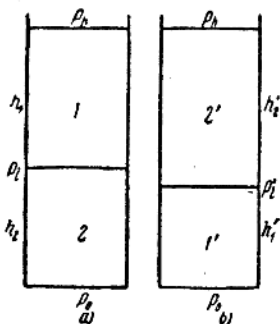


圖 184. 計算当气团鉛直方向不穩定平衡破坏时所放出的动能。

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

得到:

$$\int_{p_h}^p T dp = T_0 p_0^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}} \int_{p_h}^p p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} dp = \frac{\kappa}{2\kappa-1} (T_0 p_0 - T p). \quad (3)$$

因此, 單位气柱在起始状态的焓以下列形式表示:

$$\mathcal{H} = \frac{c_p}{g} \frac{\kappa}{2\kappa-1} (p_0 T_{02} - p_i T_{i2} + p_i T_{i1} - p_h T_{h1}),$$

而且

$$T_{h1} = T_{i1} - \gamma_a h_1; \quad T_{i2} = T_{02} - \gamma_a h_2;$$

$$p_i = p_0 \left(\frac{T_{i2}}{T_{02}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (4)$$

單位气柱在最后状态(即气团重新分布之后)的焓等于:

$$\mathcal{H}' = \frac{c_p}{g} \frac{\kappa}{2\kappa-1} (p_0 T'_{01} - p'_i T'_{i1} + p'_i T'_{i2} - p_h T'_{h2}), \quad (5)$$

而且所研究的气柱在上界面及下界面的气压 p_0 及 p_h 保持不变, 而 $p'_i = p_h + p_0 - p_i$ 。因为气团重新分布是絕热的, 所以各層中温度分布由于絕热方程来决定, 因此

$$T'_{01} = T_{h1} \left(\frac{p_0}{p_h} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}; \quad T'_{i1} = T_{h1} \left(\frac{p'_i}{p_h} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

$$T'_{i2} = T_{02} \left(\frac{p_i}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}; \quad T'_{h2} = T_{02} \left(\frac{p_h}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad (6)$$

气团重新分布以后的層次厚度由下列关系决定

$$\left. \begin{aligned} T'_{i1} &= T'_{01} - \gamma_a h'_1, \\ T'_{h2} &= T'_{02} - \gamma_a h'_2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

單位气柱的質量显然等于 $\frac{p_0 - p_h}{g}$, 所以平均速度的平方等于

$$c^2 = \frac{2g}{p_0 - p_h} (\mathcal{H} - \mathcal{H}'). \quad (8)$$

由上面所推論的公式进行計算, 指出, 当气团在鉛直方向重新分布时, 要放出大量的动能。所以这样的气团重新分布能够产生巨大風速。