非标准分析

A·鲁 宾 逊 著

陆传务 余明曦
马继芳 罗汝梅 译

华 中 工 学 院 出版

出　版　说　明

非标准分析是当代数学发展的新理论，它正在引起许多数学工作者的关注。本书系根据*A*·鲁滨逊著《非标准分析》一九七四年英文版翻译出来的。

我们翻译出版该书的目的，是为了加强基础理论的研究，特别是加强对当代自然科学发展中新理论的研究，以利于不断提高科学研究的水平和教学质量；同时向读者介绍非标准分析这一理论，对于读者学习马克思《数学手稿》，深入分析该理论体系的逻辑结构，考察其在自然科学领域中获得应用的前景，作出正确的评价，也将是有益的。

伟大领袖和导师毛主席指出：**“在自然科学方面，我们比较落后，特别要努力向外国学习。但是也要有批判地学，不可盲目地学。”**读者在阅读本书的过程中，应遵照毛主席的教导，取分析的态度。

本书的翻译和审校工作，是由我院数学教研室具体组织的。陆传务、马继芳、罗汝梅等同志参加这项工作。武汉水利电力学院余明曦同志，也参加了此项工作，在此表示衷心感谢。

由于水平有限，译文错误和不妥之处，在所难免，恳请读者批评指正，

目　　录

原　　序

1960年秋，我发现现代数理逻辑的概念和方法能为用无限小数和无限大数叙述微积分提供一个合适的框架，我先是在普林斯顿（Princeton）大学（1960年11月）的一个讨论班的报告中，随后又在符号逻辑学会年会（1961年1月）的一次发言中，以及在一篇刊登在阿姆斯特丹皇家科学院院报的文章（ROBINSON〔1961〕）中，相继发表了我的想法。我把这一课题叫做非标准分析是因为它包含有所谓算术的非标准模型，并且多少是受了后者的启发。算术的非标准模型的存在，首先是由T. Skolem提出来的。

近年来，非标准分析在几个方面有了可观的发展。既然许多成果至今仅仅在课程、演讲以及复写的报告中发表过，那么想专为这个课题写一本书，就是理所当然的了。

多年来，在这个领域中，通过同几个同行的讨论，活跃了我的思路。这里我冒昧地提到的，计有R. Arens, C. C. Chang, A. Erdelyi, A. Horn, G. Kreisel, I. Lakatos和J. B. Rsser。特别要对W. A. J. *Luxemburg*表示感谢，他的关于非标准分析的演讲和讲义对于使这个课题在数学家中出了名，起了很大的作用。

关于编入本书的许多研究成果方面，我对来自《全国科学基金会》的支持表示感谢，我还要指出，第六章是以多少由《空军科研办公室》所创始的研究为基础的，这些研究成果曾以报告的形式发表过（ROBINSON〔1962〕）。最后，我要向M. Machover致谢，他读过本书的校样，并提出各种改进意见。

Abraham Robinson

1965年4月

再 版 序 言

本书初版问世已有七年，而且自本课题诞生算起则已将近两倍长的时间。已经有出新版本的必要，这一事实表明，这里所阐述的思想已引起人们的几分注意。至少可以说，这个课题的真正好处以及它的历史联系，迄今已广泛受到重视。此外，在新近的数学文献中，有许多文章的内容论及非标准分析在现代问题上的应用，其范围之广，远及代数数论和数理经济。特别，感兴趣的读者可查阅近年来在这个领域中所举行的几次讨论会的会报。其中计有 W.A.J.Luxemburg，Holt，Rinehart 和 Winston 编辑的《模型理论在代数学、分析和概率中的应用》（Toronto 1969）；W.A.J.Luxemburg和A.Robinson 编辑的《非标准分析论文集》，以及《逻辑和数学基础研究》第69卷（North-Holland，Amsterdam 1972）和1972年春天在加拿大维多利亚（Victoria）大学举行的关于非标准分析会议的会报，已发表在 Springer-Verlag 的《数学讲义》丛书上。

虽然将来的情况也许会有变化，但是迄今我们提出的非标准方法，相对于公认的数学原理（例如 Zermelo—Fraenkel 公理，包括选择公理）来说，毕竟是保守的（意即相对于标准方法是更靠得住的—译者）。这就是说，一个非标准证明总能用一个标准证明来代替，虽然后者可能比较复杂并且不直观。所以，本书作者抱有这种观点，即对一种特殊的数学学科，是否采用非标准分析，这只是一个选择问题，自然，每个人实际上怎样取舍依赖于他早年所受的训练。

1973年3月我在普林斯顿高等研究院作了一次谈话后，Kurt Gödel 曾发表一种更加明确的见解。在获得 Gödel教授的善意许可下，这里把它转载如下。

"我想指出 Robinson 教授没有明显提到而对我似乎十分重要的一个事实，那就是非标准分析不但常常能够充分地简化初等定理的证明，而且对简化深奥结论的证明也同样有效。例如，在不考虑改进结论的情况下，对于紧算子具有不变子空间的证明就是如此。在别处，甚至简化的程度更高些。这种形势应能防止对非标准分析产生的、相当普遍的误解，即认为非标准分析不过是数理逻辑家们的一种"想入非非"或"见异思迁"，没有什么比这更荒谬的了，但是我们有充分的理由相信，不论从哪方面看，非标准分析将会成为未来的数学分析。

一个理由是刚才提到的简化证明的问题，因为简化会促进发现。另一个甚至更加令人信服的理由如下：算术是从整数开始的，并且通过有理数和负数以及无理数等等，相继扩大数系而得到发展。但是，在实数之后，下一个十分自然的步骤，即引入无限小竟被轻易地忽略了。我想，在未来的世纪中，将要思量数学史中的一件大怪事，就是在发明微积分学后 300 年，第一个严格的无限小理论才发展起来。我倾向于相信，这件怪事同另一件存在同样长时间的怪事有点联系，那就是，诸如 Fermat 问题，它能够用初等算术的十个符号写下来，而在问题提出来后300年，至今仍未得到解决。上面提到的疏忽也许要对下面这个事实负很大的责任，即同抽象数学的巨大发展比较起来，具体数值问题的解决毕竟大为落后。"

对Peter Winkler 改正本书初版中出现的大量印刷错误，并填补第206页上定理8.1.12的原来叙述中的一个缺陷，我深表谢意！

Abraham Robinson 1973年10月

第一章　一般介绍

1·1　本书的目的

所谓分析的这个数学分支，其最基本的思想是极限概念。导数和积分，无穷级数的和以及函数的连续性，都是用极限的术语来定义的。例如，设$f(x)$是一实值函数，对于开区间$(0,1)$上的所有x，它有定义，并设x_0是属于此区间的一个数，则实数a是$f(x)$在x_0处的导数，记为

1·1·1　$$f'(x)=\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}=a,$$

如果下式成立的话：

1·1·2　$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a。$$

假如我们问一位熟练的数学家关于（1·1·2）的含义，那末我们可以相信，除了一些非本质的差异和术语的不同（例如用某种拓扑思想）外，他的解释将是这样的：

对于任一正数ε，有一正数δ存在，使不等式

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|<\varepsilon$$

对于（0，1）上的所有适合$0<|x-x_0|<\delta$的x都成立。

现在让我们再问数学家，他是否肯采纳下面关于（1·1·1）和（1·1·2）更加直接的解释：

对于$f(x)$的定义域中的任一x，使得$dx=x-x_0$无限接近0，但不等于0时，比df/dx无限接近a，式中

$$df=f(x)-f(x_0)。$$

对于这个问题，我们可能指望的回答是：我们的定义看起来可能简单些，但不幸，它也是没有意义的。如果我们这时试图解释说，两个数互相无限接近的意思是指，它们之间的距离（它们的差的模）是无限小，即小于任一正数，那么我们可能遭到反驳说，只有当两个数重合时，这种说法才是可能的。我们又可能会被忠告说，这显然不是我们的原意，因为它将使我们的解释变为明显的错误。

尽管有这个伤脑筋的反驳，然而无限地小或无限小量的概念似乎很自然地吸引我们的直观。无论如何，在微积分学的形成阶段，无限小的应用是普遍的。至于上面谈到的两个不同实数间的距离不可能无限地小这一缺陷，G.W. 莱布尼茨认为无限小理论包含着理想数的引入，这些数同实数相比，可以是无限地小或无限地大，但是它们具有和实数同样的性质。然而，莱布尼茨和他的弟子们以及后继者对于导出这种类型的系统都未能取得什么合理的进展。结果，无限小理论逐渐名誉扫地，终于被极限的经典理论所代替。

本书将指出，莱布尼茨的设想完全能够被证实，并且，他的设想会给经典分析和数学的许多其他分支开辟一条新的有成效的途径。通过仔细分析数学语言和数学结构间的关系，给我们的方法提供了钥匙，它深存于现代模型理论的底层。

1·2 内容摘要

本书的计划如下。在第二章我们描述来自数理逻辑的形式工具，它对以后内容的展开是必需的。我们的讨论涉及初级和高级理论，并包括有限性原理（紧性定理）的一个证明，后者对于我们的目的是十分重要的。

在第三章，我们详细讨论了非标准算术和非标准分析这一数学结构的基本性质。我们证明，这些结构将为无限小理论提供一个适当的基础，并用这个理论来叙述微积分学的原理。然后，我们介绍一阶和高阶微分，并对经典微分几何的一些简单问题给出应用。自然，这些微分都是无限小，正如它们当时朴素地出现在欧洲大陆所出版的最早微积分教科书，例如，l'Hospital 的《无限小原理》中那样。在消除某些显眼的并经常受攻击的矛盾后，结果证明这些教科书中所用的方法就能有个牢固的基础。

在第四章，我们证明无限小理论具有一种推广，它能应用于（非度量的）拓扑空间。在这种理论中，我们重新系统阐述拓扑学的各种基本概念，特别，我们得到紧空间的一种令人惊奇的特性，它有一些应用。

第五章讨论单元实变函数。用非标准分析的术语来定义Lebesgue测度，并在此体系内证明了一些标准定理。其次，我们讨论了 Schwartz 广义函数论，我们的探讨为这些广义函数提供了一种具体实现的方法，特别为讨论一个广义函数的局部值的概念提供了有效的手段。

在第六章，我们叙述了单元复变函数的非标准理论。作了详细研究的应用领域计有（i）多项式的解析理论，它涉及复数域中多项式零点的定位问题。(ii)整函数的例外值(exceptional values)的理论，包括Picard定理和Julia方向。然而，更有意义的是，我们的方法能为用某种广义函数代替正规族理论提供一个自然的途径。

第七章引导我们讨论赋范线性空间的理论。把紧算子的非准标理论在若干方向作了发展。特别证明了，在Hilbert空间中，平方紧线性算子具有一个非平凡的不变子空间。值得注意的是，这里给出的非标准分析，首次证明了这个结论，它解决了由K. T. Smith和R. R. Halmos提出的一个问题(参看BERNSTEIN 和 ROBINSON[1966])。这个理论的另一个应用是处理谱分析问题。

在第八章，我们研究了拓扑群，特别是李群。在我们的理论中，一个群的单位元的无限小邻域确实存在，并且构成一个群，这个群对于一个给定的拓扑群或李群使无限小群的直观概念具体化。它能够同这个理论的标准概念联系起来。

第九章包含变分原理在非标准分析范围内对若干数学问题的某些应用。特别，我们改进了黎曼映射定理的一个经典证明，以及在位势理论中的狄里克利积分方法。其次，我们研究了流体动力学方面的一些问题。我们用无限小这个工具阐明了附面层理论的基本概念，并且给出弹性理论中的圣维南原理的一个副本。最后，圣维南原理本身在非标准分析的体系内得到合理的解释。

最后一章包含微积分学与无限小理论有关的某些历史阶段的回顾。事实上，由于在这个领域中的近代作者们大都确信无限小这种理论不可能获得有效的发展，使他们的历史判断带有偏见。因此，现在来个修正就成为必要的了。

自然会问，一个非标准方法（这里所用的非标准这个术语有专门的含义，即非标准分析方法）是否总能用一个标准的数学证明来代替？这个问题认定数理逻辑方法不在通常数学之内。就目前的效果而言，我们可以承认，在使用中两者是有差别的。那么，对这个问题的回答是：在每一特殊场合，为了把一个非标准证明译成一个标准的数学证明，超幂的方法能为我们提供一个现成的手段。不过在这样做的过程中，我们可能会把证明弄得很复杂，因此，从启发式的观点看，得到的程序往往令人失望。同时，很可能存在一个较短的数学证明，可以独立地得到它。

无限小理论的发展在晚近一百五十年中几乎是停滞不前的，而在同一时间内，在经典方法上却倾注了大量的精力和智慧。然而我们相信，本书已证明甚至在近阶段，无论在给旧理论以新见解方面还是在发现新成果方面，非标准方法都能有效地补充标准方法。我们希望本书已涉及或未涉及的各分科的专家们，都来研究非标准方法在他们有关领域中的应用。在某些场合，他们将会觉察到，一个经典理论恰当的非标准解释，不用气力是不易得到的。但是，一旦得到了，理论的一系列改善和发展就会是一个报答，这是经验。

人们可能抱有这种愿望：现代理论物理的某些分支，特别是那些为发散问题所苦脑的内容，能够利用非标准分析来处理。虽然本书实际上仅包含经典应用数学的应用，但这只能说明作者个人的局限，而不是方法本身的局限。

第二章　逻辑方法

2·1　低级谓词演算

在这一章中，我们将向读者介绍某些形式体系，这对于后续的论述是必不可少的。本章的写法将力求使具有数理逻辑和抽象集论初步知识的读者都能理解。

现在，我们叙述低级（或初级）谓词演算的语言。假如忽略一些次要的变动，那么，可以说，这是数理逻辑基本的形式体系。

初级语言L的定义如下。

L的原子符号是：

(1) 个体对象符号，或个体定元，通常用有附标、无附标或加撇的小写拉丁字母表示，如 a，b'，c_n^m。偶尔，为了与通常用法一致，如数符用 0，1，2，…· 表示。个体定元集是任意给定的（个数通常是超限的）。

(2)（个体）变元，x，y'，z_{kl}（后一部分的拉丁字母，有或无附标或其他形式）。假定其个数为可数无限。

(3) n 元关系符号，$n\geqslant 1$，$S(\ \ )$，$R(,,)$，其中 n 表示括号内的空位数。关系符号集是任意给定的，个数可以是超限的。（无需元数 $n=0$ 的关系符号，这里明确一下，它不包含在内。）

(4) 联结词，$\neg$(非)，$\vee$(析取)，$\wedge$(合取)，$\supset$(蕴涵)，$\equiv$(等价)。

(5) 量词，$(\exists\ \ )$—存在，$(\forall\ \ )$—所有的。

(6) 括号，[，和]。

原子公式由原子符号得出，即在关系符号的空位上填以个体定元或变元，如 $S(a)$，$S(x_n)$，$R(x,a,y)$。有了原子公式，就可逐步得到成形公式（*well-formed formula*），叫做填式，它是从原子公式开始，将联结词和量词适当地用到已得出的填式上就得出新的填式。同时，也引进括号，使得可以从填式的形式单义地确定它的构成方式。更详细地说：

若 X 是原子公式，则 $[X]$ 是填式；若 X 和 Y 皆是填式，则 $[\neg X]$，$[X\vee Y]$，$[X\wedge Y]$，$[X\supset Y]$，$[X\equiv Y]$ 皆是填式；若 X 是填式，则 $[(\exists y)X]$ 与 $[(\forall y)X]$ 皆是填式（y 表示任一变元），只要 y 不是已在量词符号下出现在 X 中，即只要 X 不包含 $(\exists y)$ 或 $(\forall y)$。在 $[(\exists y)X]$ 或 $[(\forall y)X]$ 中，以及在对它们进一步（反复）使用联结词或量词而得到的任一填式中，X 称为（相应）量词的辖域。

在填式 X 中，变元，例如 y，的出现称为是自由的，若 y 不在 $(\exists y)$ 或 $(\forall y)$ 中或不在它们在 X 内的辖域中。（译者注：意即若在填式 X 中出现的变元 y，不在任一量词符号 $(\exists)$、$(\forall)$ 中出现或虽在某量词符号中出现，但不在其辖域中出现，而是在 X 中另有出现，则称变元 y 在 X 中的出现是自由的）。若填式 X 没有变元的自由出现，则称 X 为语句，否则，称 X 为谓词。

若省略括号不至引起任何含混，或引起含混也无关紧要的话，则常将括号省去。例如，我们可以用 $[X_1\vee X_2\vee X_3]$ 同时表示 $[[X_1\vee X_2]\vee X_3]$ 和 $[X_1\vee[X_2\vee X_3]]$，至于到底表示后二者之中的哪一个，我们即将知道，这是无关紧要的。

若初级语言$\mathbb{L}$的原子符号集是初级语言$\mathbb{L}'$的原子符号集的子集，则称$\mathbb{L}'$是$\mathbb{L}$的扩充(*extension*)。

初级结构M系由非空个体集A(及其n元关系——译者)组成，其中n元关系，如$S(,\cdots,)$的集P按下述意义确定(*define*)。若$S(,\cdots,)$是属于P的一个n元关系，且$(a_1,\cdots,a_n)$是由A的元素组成的有序n元组，则可确定$S(a_1,\cdots,a_n)$在M中是否成立。(结构概念的集论解释是：关系实质上就是能使它成立的n元组的集。)例如，我们可以把代数域看作是由个体集及三个关系$E(,)$，$S(,,)$，$P(,,)$确定的初级结构，其中E是二元的，而S与P是三元的，且$E(a,b)$表示$a=b$(相等)，$S(a,b,c)$和$P(a,b,c)$分别表示$a+b=c$和$a\ b=c$(加法和乘法)。

2·2 解　释

现在令M为初级结构，$\mathbb{L}$为初级语言。假定我们在M的个体集与$\mathbb{L}$的个体定元集的一个子集之间，以及在M的关系集与$\mathbb{L}$的关系符号集的一个子集之间已建立了一一映射C，使n元关系对应于n元关系符号。若出现在$\mathbb{L}$的填式X中的所有个体定元和所有关系符号皆能经C对应着M的个体和关系，则称$\mathbb{L}$的填式X在M中是确定的(关于映射C)。

对于在M中是确定的任一语句X，我们现在用下述条件给出X在M中成立，或在M中X真，或M由X满足的定义。若X是确定的，但不是在M中成立，则称在M中X假。

(1) 若$X=[Y]$在M中是确定的，其中Y是原子公式，例如$Y=R(a_1,\cdots,a_n)$，这里R是n元关系符号，$a_1,\cdots,a_n$是个体定元，使得Y经C，R对应于M中的关系R'，$a_1,\cdots,a_n$分别对应于个体$a_1',\cdots,a_n'$，这时定义：X(经C)在M中成立的充要条件是$R'(a_1',\cdots,a_n')$在M中成立。

(2) 假定语句$X=[\neg Y]$在M中是确定的。于是，Y在M中也是确定的。则X在M中成立的充要条件是Y在M中不成立。又，假定语句$X=[Y\vee Z]$在M中是确定的，则X在M中成立的充要条件是两语句Y、Z中至少有一个在M中成立。对于其余的联结词，假定语句在M中是确定的，则判定X是否在M中成立的规则如下：

若$X=[Y\wedge Z]$，则X在M中成立的充要条件是Y与Z两者均在M中成立。若$X=[Y\supset Z]$，则当Z在M中成立或Y、Z两者均在M中不成立时，X在M中成立；当Y在M中成立但Z在M中不成立时，X在M中不成立。若$X=[Y\equiv Z]$，则X在M中成立的充要条件是Y与Z均在M中成立，或Y与Z均在M中不成立。

(3) 现设X系由存在量词得出。例如，X形如$X=[(\exists y)Z(y)]$，则X在M中成立的充要条件是存在个体定元a使$Z(a)$在M中成立(这意味着a经C对应于M的某个个体)。记号表示：$Z(a)$是将$(\exists y)$的辖域$Z(y)$中(所有出现)的y代以a而得出的语句。

若y不在Z中出现，则按我们的规则，正确的解释应是：X在M中成立的充要条件是Z在M中成立。

最后，假定X形如$X=[(\forall y)Z(y)]$。若对$\mathbb{L}$的每一能经C对应于M的个体的个体定元a，语句$Z(a)$均在M中成立，则X在M中成立。

沿着填式的结构(更具体地说，沿着方括号的顺序)，可归纳地证得：对于给定的C，对于每一个在M中是确定的语句X，可根据条件(1)，(2)，和(3)，明确判定X是否在M中成立。语句X是否在结构M中成立这一问题，只取决于出现在X中的个体定元和关系符号与M中适当

的个体和关系之间的映射 C_x。只要L中能提供足够的个体定元和关系符号，那么，总可将 C_x 扩充为映射 C，且使M的所有个体和关系(经 C^{-1})均映射到L中的对应的实体上。对于给定的M，我们总可把L扩充为能满足此条件的语言L'。为了避免繁琐，从现在起，我们假定给定语言的这种扩充在需要的场合都是不言而喻地实现了的。也就是说，对于出现在X中的个体定元和关系符号与M中某些个体和关系之间的一一映射 C_x，当我们谈到X在结构M中成立时，就意味着：按我们原来的定义，在L的扩充L'中，C_x 能如前那样被扩充为C。

类似地，令K为初级语言L中的语句集，并假定出现在K中的个体定元和关系符号与初级结构M的个体和关系之间已建立了一一映射 C_k，使得个体定元对应于个体，n元关系符号对应于n元关系($n\geqslant 1$)，若在L的某扩充L'中，C_k 能如前述那样扩充为映射C，其值域遍历M的所有个体和关系，并使K中所有的语句经C在M中成立，则称K在M中成立（在M中K真，M由K满足，或M是K的模型）。这里再重复一下，回答K是否在M中成立的问题，仅在以下的意义上依赖于C_k：若$C=C_1$和$C=C_2$是C_k的两个扩充，且其值域遍历M的所有的个体和关系，则K的语句经C_1在M中成立的充要条件是它们经C_2在M中成立。

2·3 超 积

令$Q=\{M_\nu\}$为初级结构集，其中ν的变程是整个非空指标集I。假定M_ν是相似的，也就是说，定义在所有M_ν中的关系是类同的。（即对于每一n，诸M_ν中的n元关系的个数是相同的，而且建立了对应关系。——译者）（注意，相似这一概念非常宽。例如，所有的代数域均相似，假如它们都是按2·1中所述相等、加法、乘法三个关系给定的话。我们不是说这些关系有同一的外延，即这些关系等同。例如，不同域的加法关系尽管从集论的观点来看，一般来说是不同的，但我们仍认为它们是类同的。）令D是I中的超滤集（即D是I的子集的集所组成的布尔代数中的极大对偶理想）。也就是说，D是I的子集的集，且满足下列条件：

(1) 空集不属于D，$\varnothing\notin D$。

(2) 若$A\in D$且$B\in D$，则$A\cap B\in D$。

(3) 若$A\in D$且$A\subset B\subset I$，则$B\in D$。

(4) 对任意$A\subset I$，则$A\in D$或$I-A\in D$（虽然，由(1)和(2)，集A和$I-A$不能同时属于D）。

下面将用Q和D定义一个新的称为超积的初级结构Q_D。Q_D的个体集是定义在I上的函数$f(x)$的集，且满足条件：对于每一$\nu\in I$，则有$f(\nu)\in M_\nu$。又，$R(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是一关系，它由诸结构M_ν确定(为了便于阅读，将变元填入R的空位上)。更详细地说，令$f_1,\cdots,f_n$为Q_D的个体，则$f_i=f_i(x)$，$i=1,\cdots,n$，其中$f_i(\nu)\in M_\nu$，$\nu\in I$。Q_D中的关系R的定义是：$R(f_1,\cdots,f_n)$在Q_D中成立的充要条件是：集$\{\nu\mid R(f_1(\nu),\cdots,f_n(\nu))$在$M_\nu$中成立$\}$——即$I$中使得$R(f_1(\nu),\cdots,f_n(\nu))$在$M_\nu$中成立的元素$\nu$的集——是超滤集$D$的元素。$Q_D$定义毕。

2·4 前束范式

L中的填式X称为属于前束范式，若在X的经由原子公式的构成式中，量词(如有的话)使用于联结词(如有的话)之后，即联结词均在一切量词的辖域之中。

为了本节和下一节的需要，我们引入等价概念。所谓语句X与语句Y等价是指：他们包含有相同的个体定元和关系符号，且$X\equiv Y$在所有使$X\equiv Y$为确定的那些结构中成立。换言之，

X与Y等价的充要条件是：对于由同一映射使X和Y均为确定的每一结构M，必有X和Y均在M中成立，或X和Y均在M中不成立。

2·4·1 定理。对于每一语句X，都存在与之等价的属于前束范式的语句X_0。

为了证明这一结论，我们注意到：若按上述定义，X等价于Y，Y又等价于Z，则X等价于Z，即语句间的（元数学的）等价关系是传递的。所以，对于给定的X，我们可用逐步修改的方法，每一步都从一个已给语句导出一个等价语句，从而找到一个（所需的）等价的Y。这里所要的修改基于下述事实。以下几点不难用2·2节的定义验证。

(1) 若X含有形如$[Y\equiv Z]$的填式，并用$[[Y\supset Z]\wedge[Z\supset Y]]$来代替它，则由2·2(2)，可得等价于$X$的语句$X'$。

(2) 若X含有形如$[Y\supset Z]$的填式，并用$[[\neg Y]\vee Z]$来代替它，则由2·2(2)可得等价于X的语句X'。

(3) 由2·2(2)，语句$Y=[\neg[Z\vee W]]$等价于$Y'=[[\neg Z]\wedge[\neg W]]$，同样由2·2(2)，语句$Y=[\neg[Z\wedge W]]$等价于$Y'=[[\neg Z]\vee[\neg W]]$（这些就是德·摩尔根定律）。因此，若语句$X$包含填式$Y=[\neg[Z\vee W]]$，并代之以$Y'=[[\neg Z]\wedge[\neg W]]$，则可得等价于$X$的语句$X'$。又若语句$X$包含填式$Y=[\neg[Z\wedge W]]$，并代之以$Y'=[[\neg Z]\vee[\neg W]]$，则可得等价于$X$的语句$X'$。

(4) 若语句Y形如$Y=[\neg[(\exists y)Z]]$，则由2·2(2)和2·2(3)，Y等价于$Y'=[(\forall y)[\neg Z]]$，又若$Y=[\neg[(\forall y)Z]]$，则仍由2·2(2)和2·2(3)，Y等价于$Y'=[(\exists y)[\neg Z]]$。因此，若在任一语句中，分别以$[(\exists y)[\neg Z]]$或$[(\forall y)[\neg Z]]$，代替填式$[\neg[(\forall y)Z]]$或$[\neg[(\exists y)Z]]$，则可得一等价语句。

(5) 若$X=[[(\exists y)Z]\vee W]$，且变元u不出现在X中，则X等价于$X'=[(\exists u)[Z'\vee W]]$，其中$Z'$是将$Z$中的$y$代以$u$得出的。同理，若$X=[W\vee[(\exists y)Z]]$，且$u$，$Z'$同前，则$X$等价于$X'=[(\exists u)[W\vee Z']]$。若以全称量词$(\forall y)$和$(\forall u)$代替上述存在量词$(\exists y)$和$(\exists u)$，或将上述各处的析取联结词$\vee$均代以合取联结词$\wedge$，或这两种代换同时进行，则类似于上述的命题也成立。最后，若这种变换对含于语句Y中的填式X皆已完成，则可得一等价于Y的语句Y'，但新变元u须不出现在Y中的量词内，而X又含在这个量词的辖域中。

利用(1)和(2)，我们可用一既不含"$\equiv$"又不含"$\supset$"的等价语句来代替任一给定的语句X，例如

$$X=[[(\forall y)[R(a,y)]]\supset[\neg[(\forall y)[[Q(y)]\vee[(\exists z)[S(y,z)]\cdots]$$

等价于 $X_1=[[\neg[(\forall y)[R(a,y)]]]\vee[\neg[(\forall y)[[Q(y)]\vee[(\exists z)[S(y,z)]\cdots]$。

其次，利用(3)和(4)，我们可以把每一个不包含"$\equiv$"或"$\supset$"的语句X变换为一个等价的语句，以使在后者的结构中，每一非联结词的引入皆先于析取和合取联结词以及量词的引入。例如，继续变换上例，可得等价于X_1的

$$X_2=[[(\exists y)[\neg[R(a,y)]]]\vee[\neg[(\forall y)[[Q(y)]\vee[(\exists z)[S(y,z)]\cdots],$$

继续这种演算，逐步可得出语句

$$X_3=[[(\exists y)[\neg[R(a,y)]]]\vee[(\exists y)[\neg[[Q(y)]\vee[(\exists z)[S(y,z)]\cdots],$$

$$X_4=[[(\exists y)[\neg[R(a,y)]]]\vee[(\exists y)[[\neg[Q(y)]]\wedge[\neg[(\exists z)[S(y,z)]\cdots],$$

$$X_5=[[(\exists y)[\neg[R(a,y)]]]\vee[(\exists y)[[\neg[Q(y)]]\wedge[(\forall z)[\neg S(y,z)]\cdots].$$

最后的语句 X_5 即为所需的形式。

利用上述的（5），对已得语句再修改，以使最终的语句形式为：由原子公式构成，且所有的联结词皆先于所有的量词。例如，对于上述特例，X_5 等价于

$$X_6=[(\exists u)[[\neg[R(a,u)]]\vee[(\exists y)[(\forall z)[[\neg[Q(y)]]\wedge[\neg[S(y,z)]\cdots],$$

又等价于

$$X_0=[(\exists u)[(\exists w)[(\forall x)[[\neg[R(a,u)]]\vee[[\neg[Q(w)]]\wedge[\neg[S(w,x)]]]]]]]]。$$

最后的语句 X_0 属于前束范式。

可以看出，对于给定语句 X，等价的前束式语句不是唯一的。这可用上例来说明。更简单的例子，若 $X=[[(\exists y)[Q(y)]]\wedge[(\forall z)[R(z)]]]$，则语句 $[(\exists y)[(\forall z)[[Q(y)]\wedge[R(z)]\cdots]$ 与语句 $[(\forall z)[(\exists y)[[Q(y)]\wedge[R(z)]\cdots]$ 皆是等价于 X 的前束范式。

注意，这两个语句不可能仅由变元的改名而得出。

从现在起，为节省符号计，允许省去：

（1）原子公式外边的括号，

（2）任何填式最外边的括号，

（3）相继量词间的括号。

例如，运用这些规则，可将上面的 X_0 写成：

$$(\exists u)(\exists w)(\forall x)[[\neg R(a,u)]\vee[[\neg Q(w)]\wedge[\neg S(w,x)]]]。$$

2·5 有限性原理

这一节我们将证明低级谓词演算的一个主要结果，这对我们的理论是极其重要的。

若一个语句集具有一个（它的）模型，则称此语句集是**相容的**（consistent）。

2·5·1 有限性原理（紧性定理）。设 K 为一语句集，且 K 的每一有限子集都是相容的，则 K 是相容的。

为了简化证明，我们可以假定 K 的每一语句都属于前束范式。因为假若开始时不是这种情况，则对 K 中每一语句 X 都可代以与 X 等价且属于前束范式的语句 X_0，从而得到语句集 K_0。设 K 的每一有限子集都是相容的，且 K_0' 是 K_0 的某一有限子集。则 K_0' 是由 K 的某一有限子集 K' 得出：将 K' 中每一语句代以与之等价且属于前束范式的语句。由于 K' 是相容的，因而它有一个模型，这也是 K_0' 的模型，即 K_0' 也是相容的。设想我们已经证明了关于 K_0 的论断，则可断定 K_0 具有一个模型，而这也就是 K 的模型。因此，我们从现在起假定 K 中语句皆属于前束范式。

我们需要有一种解释属于前束范式语句的方式，这种方式是由斯科林（Skolem）和希耳伯脱（Hilbert）提出，继而为赫布兰德（Herbrand）所发展。为了介绍它，让我们考虑语句 $X=(\forall x)(\exists y)Q(x,y)$，其中 $Q(x,y)$ 是填式。按 2·2 节，所谓 X 在结构 M 中成立是指：对每一个体定元 a（它表示，即对应于，M 的一个个体），存在一个个体 b，使 $Q(a,b)$ 在 M 中成立。应用选择公理，对于每一 a，可以选择这样的一个 b，这时我们可以说，存在一个定义在个体定元集（它表示 M 的个体集）上并在此个体定元集内取值的函数 $\phi(x)$（称为**斯科林函数或函子**），使得对于集内的每一 a，$Q(a,\phi(a))$ 在 M 中成立。在这一表达式中，ϕ 是从个体定元集（即语言上的实体集）到个体定元集的函数，但我们允许用同一符号去表示相应的个体集到个体集的

函数。即，若 a 与 b 分别表示M的个体 a' 与 b'，且$b=\phi(a)$，则我们也写作 $b'=\phi(a')$。这样一个函数的存在，反过来又蕴涵语句 $(\forall x)(\exists y)Q(x,y)$ 在M中成立。表达式 $Q(x,\phi(x))$（它超出了我们的形式语言L的范围）称为（斯科林）开式语句。当我们说 $Q(x,\phi(x))$ 在M中成立时，是指对每一表示M的一个个体的个体定元 a，$Q(a,\phi(a))$ 在M中成立。

为了例证一般情况，考虑语句

2·5·2 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(\exists v)(\forall w)(\exists t)Q(x,y,z,u,v,w,t)$，

其中Q是没有量词的填式。2·5·2 在结构M中成立的充要条件是：对于适当选择的斯科林函数 $\phi(x)$，$\psi(x,z)$，$\chi(x,z)$，$\rho(x,z,w)$，开式语句

2·5·3 $Q(x,\phi(x),z,\psi(x,z),\chi(x,z),w,\rho(x,z,w))$

在M中成立，即对于所有表示（对应于）M中个体的a，b，c，

2·5·4 $Q(a,\phi(a),b,\psi(a,b),\chi(a,b),c,\rho(a,b,c))$

在M中成立。这里再次用超出形式语言L范围的符号 ϕ，ψ，χ，ρ 同时表示：（1）从L内（表示M的个体）的个体定元到个体定元的函数，（2）M内从相应的个体到相应的个体的函数。注意到斯科林函数对应于给定语句X中的存在量词，而其自变数则对应于全称量词变元，且它们均各自优先于X中的存在量词。若X是从一个存在量词开始的，则相应的斯科林函数将退化为一常数，即它在M中只取一个值。

为了证明 2·5·1，设语句集K的语句皆属于前束范式，且K的每一有限子集皆是相容的。我们将用超积的形式构造一个K的模型。K的所有的有限子集构成的集定义为指标集 I（因此，I 是非空的）。为了与 2·3 节中的记法一致，我们用小写希腊字母 ν，μ，……表示这些 K 的子集。对于每一 $\nu\in I$，我们选择一个相应的结构M_ν，使得经某一特定的映射 C_ν，M_ν 是 ν 的模型。按照假定，对于每一 $\nu\in I$，结构M_ν都是存在的，但断言一个带指标的集$Q=\{M_\nu\}$（其中 ν 遍历 I）的存在涉及到选择公理（除了 I 是有限这种平凡情况外）。对每一 ν，C_ν 是从 ν 的语句的个体定元和关系符号到对应的 M_ν 的个体和关系的映射。这样，在不同的 M_ν 中，为K中同一关系符号所表示的诸关系就可视为类同的。对于某 ν，若K的某个关系符号 R 不对应于M_ν中任何关系（因为R可以不出现在 ν 的语句中），则可在M_ν中任意定义一个空位数相同的对应的关系R'，例如，规定R'对于M_ν的任何一组个体都不成立。用这种方法可确保$Q=\{M_\nu\}$的结构都是相似的。一旦选定Q，剩下的问题就是在 I 上选择一个适当的超滤集D。

对于每一 $\nu\in I$，令 d_ν 为 I 中元素 μ 的集，其中 μ 满足条件 $\nu\subset\mu$（即 ν 为 μ 的子集），又令 D_0 为所有这些 d_ν 构成的集，记作$D_0=\{d_\nu\}_{\nu\in I}$。则 D_0 有下述性质：

（1）$\varnothing\notin D_0$，D_0 不含空集。

因为，若 $A\in D_0$，则存在 $\nu\in A$，使 $A=d_\nu$ 成立。故 $\nu\in A$，即A非空。

（2）若$A\in D_0$且$B\in D_0$，则$A\cap B\in D_0$。

若$A\in D_0$且$B\in D_0$，则存在 I 中元素 ν 和 μ，使$A=d_\nu$，$B=d_\mu$ 成立。令 $\sigma=\nu\cup\mu$，则 σ 为K的一个有限子集，因而为 I 的一个元素。我们要求 $d_\sigma=A\cap B$。因为若 $\rho\in A\cap B$，则 $\rho\supset\nu$ 且 $\rho\supset\mu$，因此 $\rho\supset\nu\cup\mu$。所以 $\rho\in d_\sigma$。而当 $\rho\in d_\sigma$ 时，则有 $\rho\supset\sigma$，$\rho\supset\nu$，$\rho\supset\mu$，因而 $\rho\in A$，$\rho\in B$，$\rho\in A\cap B$。这说明$A\cap B=d_\sigma$。故$A\cap B\in D_0$。

现在考虑 I 的某些子集构成的这样的集，一方面它是 D_0 的扩充，另一方面又须满足上面条件（1）和（2)。由佐恩（Zorn）引理，在这些集中有一些极大集。设 D 为其中之一，我们将证明，D 除具有上述（1），(2）两性质外，还具有以下性质。

（3）若 $A\in D$ 且 $A\subset B\subset I$，则 $B\in D$。

因为，令 $D'=\{B\mid B\subset I$ 且存在 $A\in D$ 使 $A\subset B\}$，即 D' 由 I 的所有这样的子集组成，这些子集分别以某些 D 的元素作为子集。因而 $D\subset D'$。又若 $B\in D'$ 则 $B\neq\varnothing$，因 B 含有一个属于 D 的子集 A，故非空。最后，若 B 和 B' 均属于 D'，则存在 D 中的 A 和 A'，使 $B\supset A$，$B'\supset A'$。所以，$B\cap B'\supset A\cap A'$。由上面的（2）有 $A\cap A'\in D$。因而有 $B\cap B'\in D'$。这说明 D' 是满足上述（1),(2）两条件的 I 的子集的集。但 D 是这类集中的一个极大集，故 $D=D'$。现在，由 D' 的定义立即可得：若 $A\in D'$ 且 $A\subset B\subset I$，则 $B\in D'$。因 $D'=D$，这就证明了 (3)。

（4）若 $A\subset I$，则 $A\in D$ 或 $I-A\in D$。

注意到，A 与 $I-A$ 不能同时属于 D，因为其交是空的。设对于某个 $A\subset I$，A 和 $I-A$ 都不属于 D。定义 D_1 为

$$D_1=\{B\mid B=C\cap F,\ \text{其中} A\subset C\subset I \text{ 且 } F\in D\},$$

则 $D\subset D_1$，因为，当 $F\in D$，$C=I$ 时，有 $B=F$。又若 $B\in D_1$ 且 $B'\in D_1$，则对于满足 $A\subset C\subset I$，$F\in D$，$A\subset C'\subset I$，$F'\in D$ 的 C，F，C'，F' 有 $B=C\cap F$，$B'=C'\cap F'$，这时 $B\cap B'=(C\cap C')\cap(F\cap F')$，其中 $A\subset C\cap C'\subset I$ 且 $F\cap F'\in D$，所以 $B\cap B'$ 也属于 D_1。此外，可以看出，在 D_1 的定义中，当取 $C=A$，$F=I$ 时，则有 $A\in D_1$。这样，作为 D 的真扩充的 D_1，满足了上述条件（2)。再由 D 的极大性，D_1 不可能满足（1）。因而 $\varnothing\in D_1$ 且存在某集 $F_1\in D$，使 $A\cap F_1=\varnothing$。类似地，定义 D_2 为

$$D_2=\{B\mid B=C\cap F,\ \text{其中} I-A\subset C\subset I \text{ 且 } F\in D\},$$

并进行与前相同的讨论，则存在某 $F_2\in D$，使 $(I-A)\cap F_2=\varnothing$。现令 $F_3=F_1\cap F_2$，则有 $F_3\in D$。于是

$$\begin{aligned}F_3&=I\cap F_3=(A\cup(I-A))\cap F_3=(A\cap F_3)\cup((I-A)\cap F_3)\\&=(A\cap(F_1\cap F_2))\cup((I-A)\cap(F_1\cap F_2))\subset(A\cap F_1)\cup(I-A)\cap F_2)=\varnothing。\end{aligned}$$

但由于（1），这是不可能的。这就证明了（4）。

将本节的条件（1）至（4）与上面2·3节的条件(1)至(4)进行比较，可以看出 D 是 I 上的一个超滤集。我们再证，超积 Q_D（其中 $Q=\{M_\nu\}$），对于某 C_k（C_k 是定义在 K 的诸个体定元和诸关系符号上的映射），是 K 的一个模型。前面对于 K 中一个给定的关系符号 R，不同 M_ν 中的对应关系曾视为类同的。于是，我们可把 R 看成是表示一个出现在所有 M_ν 中的关系 R'。由超积的定义，可知 R' 也在 Q_D 中出现。于是，就定义 R 经 C_k 对应于 R'。下面将对短语‘K 中个体定元经 C_k’进行解释。令 a 为出现在 K 中的个体定元，即它至少出现在 K 的一个语句中。我们必须在对应于 K 的 Q_D 中确定一个元素，即我们必须在 I 上定义一个适当的函数 $f(\nu)$，使得 $f(\nu)\in M_\nu$。现在，若 ν 的某个语句含有 a，则 M_ν 将含有一个经 C_ν 对应于 a 的个体 a'。这时令 $f(\nu)=a'$。在另一种情况下，即若 a 不在 ν 中，则可选 M_ν 中任一元素作为 $f(\nu)$。