分析力学

FENXI LIXUE

主编 韩广才 李鸿 商大中
主审 张耀良

哈尔滨工程大学出版社

分 析 力 学

主编　韩广才　李　鸿　商大中
主审　张耀良

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

分析力学/韩广才,李鸿,商大中主编.—哈尔滨:
哈尔滨工程大学出版社,2003
ISBN 7-81073-495-4

Ⅰ.分… Ⅱ.①韩…②李…③商… Ⅲ.分析力
学 Ⅳ.O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 060295 号

内容简介

本书系统全面地阐述了分析力学的基本内容。全书共分六章,第一章介绍了分析力学的基本概念,第二章详细介绍了动力学的普遍方程和拉格朗日方程,第三章重点介绍了拉格朗日方程在各方面的应用,第四章介绍了哈密顿正则方程,第五章介绍了哈密顿变分原理,第六章介绍了非完整系统动力学方程。每章末均附有习题。

本书可作为大学力学专业及工程专业高年级学生的教材或教学参考书,亦可供有关专业的工程技术人员参考。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
哈尔滨工程大学印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm 1/16 印张 12.75 字数 315 千字
2003年12月第1版 2003年12月第1次印刷
印数:1—1 000 册
定价:16.50元

前　　言

本书是我校“十五”教材建设规划重点资助教材之一。适用于工程力学系工程力学专业的教学需要，是一本简明扼要重点突出偏重工程应用的教材。

在编写过程中，编者广泛地收集了有关资料，进行了同类教材的对比研究，吸取了它们的精华。在反映分析力学研究的最新进展方面也做了一些有益的尝试，力求把握教材的科学性、系统性和适用性。

由于分析力学内容丰富，而且比较抽象，不同类型的教材其难易程度差异比较大，同时考虑到本专业的学时所限，我们设想编写出一本简明扼要，重点突出的教材。但限于编者水平的不足，加之时间又十分仓促，所以书中难免有疏漏和不妥之处，敬请同行专家和读者指正。

本书由韩广才、李鸿、商大中主编。韩广才编写第 4～6 章；李鸿编写第 1～2 章，商大中编写第 3 章。李鸿承担了书中图表的设计工作和全部习题收集整理及打字任务。最后由韩广才对全书在文字上作了统一修改定稿。

本书主审，导弹工程系张耀良教授在百忙中认真审阅了全部初稿，并提出了许多宝贵意见。

在成书的过程中还得到了我校有关同志的热情帮助，从教材结构的安排到具体内容，都提出了不少中肯的建议，使我们受益匪浅，在此一并致以诚挚的谢意。

编　者

2003 年 7 月

目　　录

1　基本概念及基本定理

分析力学的研究对象主要是非自由质点系统的动力学问题,从力学的发展过程看,可以将其过程分为这样几个阶段,在理论力学阶段可以认为是初等动力学,或称为牛顿(Newton)力学,之后也就是分析力学中所要讲的拉格朗日(Lagrange)力学,再者是哈密顿(Hamilton)力学。

初等动力学中的基本力学量为:力、质量、加速度。

基本定理是:牛顿定律。

对于一个质点而言其动力学方程为:$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ 或其投影方程:

$$m\ddot{x} = F_x$$
$$m\ddot{y} = F_y$$
$$m\ddot{z} = F_z$$

其优点是:直观性强。

这部分内容称为牛顿力学。

但在工程实际中所遇到的问题大多是非自由系统 —— 即所研究的对象的位置、速度在运动中常受到预先规定的某些限制,这些限制统称为约束。用牛顿定律直接解决这一类问题时,往往显得很困难。例如:由 N 个质点组成的系统,首先要解除约束,代之以约束反力,约束反力通常是未知的,然后列出 $3N$ 个包含未知约束力在内的二阶微分方程组,再加上约束方程组成一个数目很大的方程组;显然方程的数目越多,求解就越困难,在有些情况下很可能无法求解。

在这种情况下 Lagrange 从另一个途径出发来研究关于非自由质点系统的问题。也就是我们后面要讲的 Lagrange 力学。

Lagrange 力学的基本力学量是:能量和功。

基本原理是:虚功原理。用数学分析的方法统一处理任意非自由质点系统的动力学问题。

1788 年他的巨著《分析力学》问世后,奠定了分析力学的基础,而且分析力学的研究方法也适用于研究电学和机电系统的复杂问题。

本章首先介绍一下有关分析力学中所用到的一些基本概念。

1.1　约束及其分类

1.1.1　约束及约束方程

1. 系统在空间的位置描述 —— 位形

设有这样一个系统由 N 个质点 $P_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 组成,为了描述该系统在空间的位置,我们可以采用直角坐标系(笛卡尔坐标系),对于第 i 个质点,其位置由惯性参考系中一

固定点 o 所引的矢径$\boldsymbol{r}_i$ 或直角坐标x_i,y_i,z_i 所确定,为了简单计,有时也将系统的所有坐标按统一序号记为 $x_1,x_2,\cdots,x_{3N}$。这样第 i 个质点的坐标为x_{3i-2},x_{3i-1},x_{3i}。各质点的位置确定以后,这时整个系统的位置和形状也就确定了,我们称之为位形。系统运动时位形也将随时间不断发生变化。

2.约束

系统运动时如果各质点的位置、速度等受到一定的限制,则称这种限制为约束。

例如:① 用一根无质量的刚性杆连接两个小球(质点),运动时由于刚性杆的存在使两球心的距离始终保持不变。这里刚性杆构成了对质点系统的约束。

② 如导弹追踪目标时,要求其飞行方向这里也就是速度方向应时时对准目标。这里并没有一个具体的实物来限制导弹的飞行速度的方向,这种约束关系是通过导弹的控制系统来实现的。

3.约束方程

从上面的两个例子中我们可以看出约束的形式和机理是不同的,但它们却有共同的本质,那就是使得系统中的某些或全部质点的位置、速度等一些运动学要素受到了一定的限制,换句话说这些运动学要素必须满足一定的条件,这种条件可以用下面一般形式的数学方程来统一表示,即

$$f_\alpha(x,t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

或

$$f_\beta(x,\dot{x},t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-2}$$

其中 x 是$x_1,x_2,\cdots,x_{3N}$ 的全体,$\dot{x}$ 中的·表示该字母的量对时间的导数(如 $\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$),而 $\dot{x}$ 则是 $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_{3N}$ 的全体(这种用一个不带下标的字母代表有下标的同一字母的全体的简化记法今后将一直采用,不再作说明)。

我们将这种用来描述约束关系的数学方程(1-1)或式(1-2)称为约束方程。有时为了简便起见也将约束方程(1-1)表示成如下的矢径形式:

$$f_\alpha(\boldsymbol{r},t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-3}$$

或

$$f_\beta(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-4}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是质点的矢径,代表 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N$ 的全体。

例1-1 如图1-1所示,一个质点被限制在一个不断膨胀的球面上运动,写出此情况下质点的约束方程。

解 将球的半径记为 $R(t)$,则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2-R^2(t)=0$$

例1-2 如图1-2所示,用一个不计质量且不断改变长度的细杆将质点 A 与固定点联结,写出此情况下的质点的约束方程。

解 将杆的长度记为 $l(t)$,则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2-l^2(t)=0$$

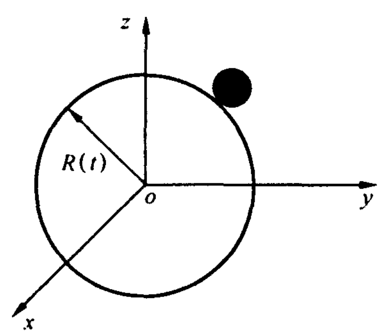


图1-1

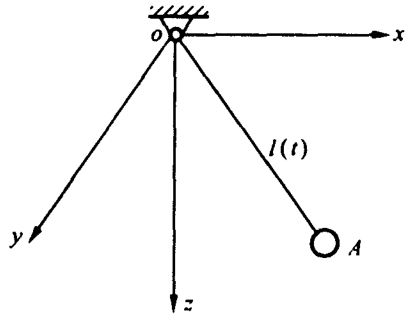


图 1-2

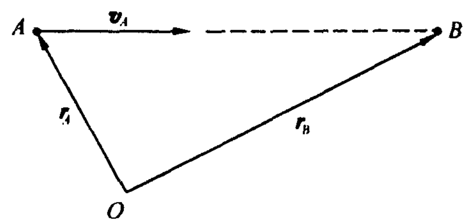


图 1-3

例 1-3　如图 1-3 所示,导弹 A 追击目标 B,要求导弹速度方向总指向目标,试写出约束方程。

解　系统由 A,B 两个质点组成,位置可用 $\boldsymbol{r}_A,\boldsymbol{r}_B$ 来描述,则速度方向应分别为 $\dot{\boldsymbol{r}}_A$,$\dot{\boldsymbol{r}}_B$,其直角坐标应为 x_A,y_A,z_A,x_B,y_B,z_B 及 $\dot{x}_A,\dot{y}_A,\dot{z}_A,\dot{x}_B,\dot{y}_B,\dot{z}_B$;根据题义约束方程应这样表示为

$$\frac{\boldsymbol{r}_A}{|\dot{\boldsymbol{r}}_A|}=\frac{\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A}{|\dot{\boldsymbol{r}}_B-\dot{\boldsymbol{r}}_A|}$$

实际计算时我们应将上式向三个坐标轴方向上投影,这样有

$$\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}_A|}\dot{x}_A=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}_B-\dot{\boldsymbol{r}}_A|}(x_B-x_A)$$

$$\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}_A|}\dot{y}_A=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}_B-\dot{\boldsymbol{r}}_A|}(y_B-y_A)$$

$$\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}_A|}\dot{z}_A=\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}_B-\dot{\boldsymbol{r}}_A|}(z_B-z_A)$$

也可将上面三式写成如下更为简单的形式:

$$\left(\frac{1}{x_B-x_A}\right)\dot{x}_A-\left(\frac{1}{y_B-y_A}\right)\dot{y}_A=0$$

$$\left(\frac{1}{x_B-x_A}\right)\dot{x}_A-\left(\frac{1}{z_B-z_A}\right)\dot{z}_A=0$$

1.1.2　约束的分类

从例 1-1 和例 1-2 中我们可以看出两个结构不同的约束却有着相同的约束方程,在分析力学中,由于我们关心的是各质点间的位置、速度等所应满足的关系,而不是约束的具体结构,因而对于例 1-1 和例 1-2 中的两种约束也就无需区别,也就是说,今后所说的约束,仅是指约束方程而言,而不追究其具体结构。因而约束的分类我们自然也就是完全按约束方程的不同类型而区分。

1. 完整约束和非完整约束

完整约束——在约束方程(1-1)或(1-3)中如果仅含坐标 x 和时间 t,而不含速度 $\dot{x}$ 时,这时的约束称为完整约束或几何约束。

这也就是说完整约束只限制系统各质点的位置而不限制速度，完整约束的约束方程具有如下的数学表达式：

$$f_\alpha(x,t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

或

$$f_\alpha(\boldsymbol{r},t)=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-3}$$

非完整约束——在约束方程(1－2)或(1－4)中既含有坐标 x 和时间 t，又含有速度 $\dot{x}$ 时，这时的约束称为非完整约束。

这也就是说非完整约束对于各质点的速度也进行了限制，非完整约束的约束方程具有如下的数学表达式：

$$f_\beta(x,\dot{x},t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-2}$$

或

$$f_\beta(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-4}$$

也就是说系统除了位形受到限制外，系统中各质点坐标对时间的导数(速度、加速度等)也受到了一定的限制。在非完整约束中最简单也是最常见的一种情况是所谓的"一阶线性非完整约束"——其特点是仅速度受到限制，且约束方程中被限制的速度以线性项的形式出现，即

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{\beta s}\dot{x}_s + A_\beta = 0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-5}$$

上式中的 $A_{\beta s}$, A_β 都是 x,t 的函数。

这样我们上面讲的例题中例 1－1 和例 1－2 中的约束应为完整约束，例 1－3 中的约束应为一阶线性非完整约束。

例 1－4　如图 1－4 所示，冰刀在平面上滑动，冰刀中点的速度始终沿冰刀的轴线方向，试写出冰刀所受的约束方程。

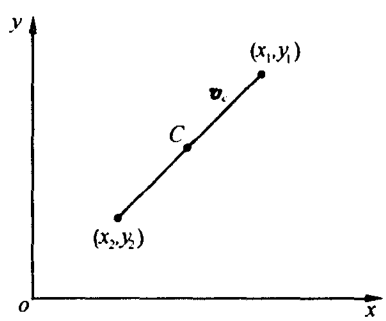


图 1－4

解　我们采用笛卡尔坐标，冰刀的位置由冰刀两端点的坐标来描述记为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)。首先来看这两组描述系统位形的坐标受到了哪些限制即约束。设冰刀的长度为 l，则有

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0 \tag{a}$$

另外，冰刀中点的速度始终沿冰刀的轴线方向，设冰刀中点的坐标为 (x,y)，则有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

根据题意应有约束方程

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

即

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2}$$

整理可写成

$$(y_1-y_2)\dot{x}_1+(y_1-y_2)\dot{x}_2+(x_2-x_1)\dot{y}_1+(x_2-x_1)\dot{y}_2=0 \tag{b}$$

式(a) 是完整约束，式(b) 是一阶线性非完整约束。

在本书中以后如无特别说明，非完整约束均指一阶线性非完整约束。

对于非完整约束方程式(1-2) 也常常写成微分的形式

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{\beta} \mathrm{d}x_s + A_{\beta}\mathrm{d}t = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-6}$$

因此，非完整约束有时又称为微分约束，如果微分约束可积成有限形式，如：$f_{\beta}(x,t) = C_{\beta}$，$(\beta = 1,2,\cdots,g)$ 其中 C_{β} 是积分常数，这种微分约束可称为可积微分约束，它实质上就是完整约束，因此，在以后我们所说的微分约束都是指不可积的微分约束。

有时也需要将完整约束(1-1) 写成微分约束的形式，只要将(1-1) 式微分处理即可：

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_s}\mathrm{d}x_s + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}\mathrm{d}t = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,l) \tag{1-7}$$

若将式(1-7) 看成是微分约束，那么它们就是可积微分约束。

下面再定义两个概念：

① 完整系统 —— 只有完整约束的系统称为完整系统；

② 非完整系统 —— 具有非完整约束的系统称为非完整系统。

完整系统不能任意占据空间位置，这是因为完整系统对系统各点的位置加上了限制。若系统只有非完整约束，则系统可以占据空间的任何位置，但在这些位置上各点的速度都要受到非完整约束的限制。

2. 定常约束和非定常约束

定常约束 —— 当约束方程中不显含时间时，称这种约束为定常约束。

非定常约束 —— 当约束方程中显含时间时，称这种约束为非定常约束。

其约束方程分别为：

定常约束：

$$f_{\alpha}(x) = 0 \qquad (\alpha = 1,2,\cdots,l) \tag{1-8}$$

$$f_{\beta}(x,\dot{x}) = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-9}$$

非定常约束：

$$f_{\alpha}(x,t) = 0 \quad (\alpha = 1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

$$f_{\beta}(x,\dot{x},t) = 0 \quad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-2}$$

另外再定义两个概念：

① 定常系统 —— 只具有定常约束的系统称为定常系统；

② 非定常系统 —— 具有非定常约束的系统称为非定常系统。

3. 单面约束和双面约束

双面约束 —— 在约束方程中，用等式表示的约束称双面约束；

单面约束 —— 约束方程如果用不等式表示，则称单面约束。

例 1-5　一单摆由质量为 m，长为 l 的轻杆组成，悬挂点以 $y = u(t)$ 运动如图 1-5 所

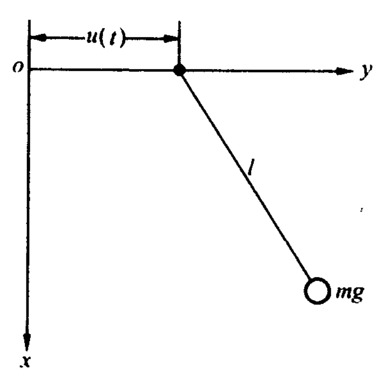


图 1-5

示，试列写问题的约束方程，并说明约束是完整的还是非完整的，是定常的还是非定常的，是双面的还是单面的？

解　设摆的坐标为(x_m, y_m)，则约束方程为

$$x_m^2 + (y_m - u(t))^2 = l^2$$

$$x_m^2 + y_m^2 - 2y_m u(t) = l^2 - u^2(t)$$

约束是完整的、非定常的、双面的。

1.2　广义坐标、广义速度和广义加速度

在上面的讨论中，我们确定系统的位形均采用了笛卡尔坐标，也就是用了这样一组参数，$x_1, x_2, \cdots, x_{3N}$，那么描述系统的位形是否一定要用这样 $3N$ 个参数呢？很显然不一定非得要这样做，如图 1－6 所示的机构，确定系统的位形只要用一个角度 φ 就可以了。对于图 1－7，确定系统位形所需要的坐标可以用两个角度 α 和β。这些参数就不是通常意义上的直角坐标了，但它们同样可以描述系统的位形，而且数目明显要比用直角坐标参数描述要少得多。由此，可以看出直角坐标存在着某种不平衡性（有的独立有的不独立）。下面我们从理论上来具体阐述一下广义坐标的定义。

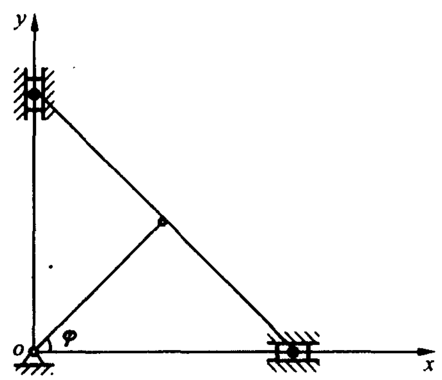


图 1－6

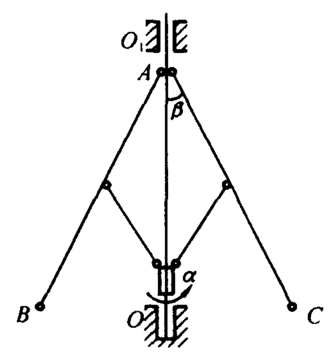


图 1－7

1.2.1　笛卡尔坐标的不平衡性

设有由 N 个质点组成的完整系统，其约束方程为

$$f_\alpha(x, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, l < 3N) \tag{1-1}$$

如果这些方程是相互独立的，则按线性代数的理论，其 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_l)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{3N}}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{3N}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \frac{\partial f_l}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_{3N}}\end{bmatrix} \tag{1-10}$$

的秩为 l,则按隐函数存在定理由方程组(1 - 1)可以将 l 个坐标作为 t 及其余 $3N-l$ 个坐标的函数解出来,不失一般性,假定被解出的是前 l 个坐标,即

$$x_1=x_1(x_{l+1},x_{l+2},\cdots,x_{3N},t)$$
$$x_2=x_2(x_{l+1},x_{l+2},\cdots,x_{3N},t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_l=x_l(x_{l+1},x_{l+2},\cdots,x_{3N},t)$$

上式表明确定系统在 t 时刻位形的 $3N$ 个坐标中,只有 $n=3N-l$ 个是独立的,其余 l 个是不独立的,这就是说,确定系统在 t 时刻的位形只需要 n 个独立的参数坐标,而不是 $3N$ 个,由于笛卡尔坐标参数的这种不平衡性即有的独立有的不独立,使得在具体问题的处理中,取笛卡尔坐标参数作为确定系统位形的参数往往很不方便。

1.2.2 选取另外一组相互独立的参数表示系统的位形

由于笛卡尔坐标的不平衡性,因此,我们希望根据系统的具体结构选取另外一组 $n=3N-l$ 个独立的参数 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 来确定系统的位形。这是完全可以做到的,例如,可以任取 $n=3N-l$ 个函数

$$f_{l+1}(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})=q_1$$
$$f_{l+2}(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})=q_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{3N}(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})=q_n$$

使它们与 l 个约束方程

$$f_\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})=0 \qquad (\alpha=1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

相互是独立的,即 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_{3N})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_{3N})}\neq 0 \tag{1-11}$$

按隐函数存在定理,若令(1 - 1)式左端诸函数等于 $q_{n+\alpha}(\alpha=1,2,\cdots,l)$ 即

$$f_\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_{3N},t)=q_{n+\alpha} \tag{1-12}$$

则可解出

$$x_s=x_s(q_1,q_2,\cdots,q_n,q_{n+1},\cdots,q_{n+l},t) \quad (s=1,2,\cdots,3N) \tag{1-13}$$

再注意到 $q_{n+\alpha}=0$ 则有

$$x_s=x_s(q_1,q_2,\cdots,q_n,t) \qquad (s=1,2,\cdots,3N) \tag{1-14}$$

这是 q 到 x 的一组变换式,利用约束条件(即约束方程)可对 x 和 q 进行一对一地变换,这样我们就可以用任意取值的独立变量 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 来表示系统的位形,由式(1 - 14)式表明

这 n 个相互独立的参数同样满足约束方程，而且由这 n 个参数所表示的系统的位形也必是约束所允许的。

(1－14) 式也可以简写为向量形式：

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \qquad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{1-15}$$

由式(1－14)、式(1－15)可知 x 或 $\boldsymbol{r}$ 是 q, t 的单值函数，由此可知，只要给定 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 一组参数，便决定了系统在 t 时刻的为约束所允许的一个位形。

1.2.3 广义坐标的定义

由上面的讨论可知 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 确是确定系统位形的独立参数，我们将这样一组参数称做广义坐标。

它们是决定系统位形所必需的、最少的独立参数。它们的数目是 $n = 3N - l$。

到目前为止我们用 n 个相互独立的参数即同样可以表示系统的位形了，而且也是为约束所允许的位形，那么也就是说由 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 所决定的 x 必满足约束方程，且 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 之间是相互独立的。

$$f_a(x, t) = 0 \qquad (a = 1,2,\cdots,l) \tag{1-1}$$

所以采用了广义坐标之后就没有必要再考虑完整约束了，这正是采用广义坐标的优点之一。

1.2.4 广义坐标的选取

上面我们详细阐述了什么是广义坐标，但在具体的问题中广义坐标的选取，往往并不需要按上述方式通过一组代数方程来选定，而是根据系统的结构和问题的要求凭直观判断选取确定系统位形所需的 n 个最少的独立参数，而且这样一组 n 个独立的参数并不是惟一的，可以有多组，然后择优选用。这 n 个独立的参数不再是通常意上的直角坐标参数了，它们可以是角度坐标、面积坐标或其它可以用来描述位置的参数坐标，总之在数学上它就是一组 n 个相互独立的参数。

确定了独立参数后也可由式(1－14)即 $x_s = x_s(q_1, q_2, \cdots, q_n, t), (s = 1,2,\cdots,3N)$ 的一一对应关系来确定系统位形的直角坐标。这样，通过广义坐标范围内的求解再由该式转换成直角坐标范围内的解。

综上所述，对于非自由质点系统原来我们是在直角坐标空间中用初等动力学的知识来研究问题，现在我们可以换到另外一个空间即广义坐标空间中同样可以研究系统的位形及其运动，其最直接的好处就是所用的坐标参数减少了，而且不必再考虑完整约束了。

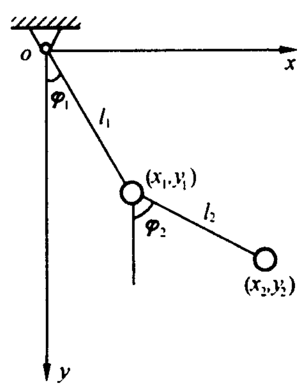


图 1－8

例 1－6 如图 1－8 所示的双摆，由两个质点 M_1，M_2 用长度为 l_1 及 l_2 的刚性杆铰接而成，试选取广义坐标来描述系统的位形。

解 如图约束方程有两个

$$x_1^2 + x_2^2 = l_1^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$$

由于是平面问题所以独立的参数个数应为 $n = 2N - l$

即$n = 2 \times 2 - 2 = 2$。所以广义坐标的个数是2,这样我们取如图1 - 8所示的φ_1, φ_2为广义坐标,而且由图可以知道广义坐标和直角坐标的一一对应关系为

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1$$
$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$$
$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$
$$y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

1.2.5 在广义坐标空间完整系统及非完整系统约束方程的表示

对于完整约束由于采用了广义坐标,所以无论是对于完整系统还是非完整系统就不需要再考虑完整约束方程了。

在非完整系统中,除了非完整约束外,一般还有完整约束同时存在,在这种情况下,首先根据完整约束选取广义坐标确定系统的位形,这就表明已考虑了完整约束,至于非完整约方程由于采用了广义坐标来描述系统的位形,那么系统的非完整约束也应化成由广义坐标的导数来表示的一阶线性微分方程,也就是将非完整约束方程中的直角坐标参数换成广义坐标参数。

下面我们对一阶线性非完整约束来考查其在广义坐标空间中的形式。

对于一阶线性非完整约束,其约束方程为

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{\beta s}\dot{x}_s + A_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-5}$$

由

$$x_s = x_s(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \qquad (s = 1,2,\cdots,3N) \tag{1-14}$$

有

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_s}{\partial t} \tag{1-16}$$

将其代入式(1 - 5)有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{3N} A_{\beta s}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}\dot{q}_j + \sum_{s=1}^{3N} A_{\beta s}\frac{\partial x_s}{\partial t} + A_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-17}$$

将上式简写为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\beta j}\dot{q}_j + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1,2,\cdots,g) \tag{1-18}$$

其中$a_{\beta j}, a_\beta$都是q和t的函数。

1.2.6 广义速度和广义加速度

广义速度 —— 我们将广义坐标q对时间参数t的一阶导数$\dot{q}$称为广义速度。

广义加速度 —— 我们将广义坐标q对时间参数t的二阶导数$\ddot{q}$称为广义加速度。

1.3　可能位移、实位移和虚位移

1.3.1　可能位移及实位移

1. 可能位移

设在由 N 个质点组成的系统上作用 l 个完整约束和 g 个一阶线性非完整约束，将这些约束统一写成微分形式：

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs}\mathrm{d}x_s + A_r\mathrm{d}t = 0 \qquad (r = 1,2,\cdots,l+g) \tag{1-19}$$

当 $(r = 1,2,\cdots,l)$ 时有

$$A_{rs} = \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \qquad A_r = \frac{\partial f_s}{\partial t}$$

则对给定的 t 和 x，满足上述方程的无限小位移 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_{3N}$ 称为系统在时刻 t 由位形 x 出发，在 $\mathrm{d}t$ 时间内的可能位移。也就是说是约束所允许的无限小位移，也是系统有可能实现的位移。

如图 1－9、图 1－10 所示的约束所允许的无限小位移就是可能位移。

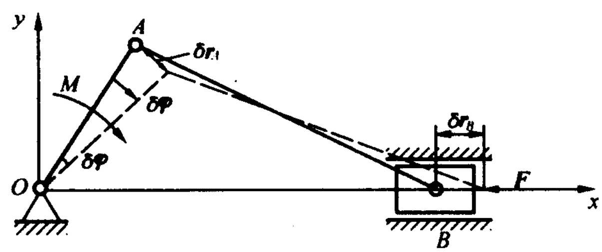
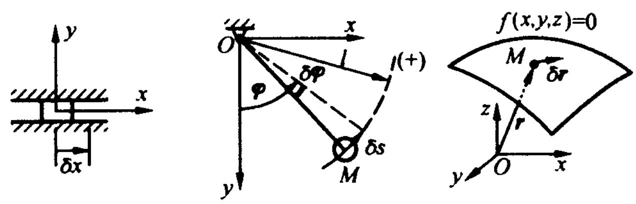


图 1－9



(a)　　(b)　　(c)

图 1－10

图 1－9 中 B 点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B$ 和 A 点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A$；图 1－10 中沿 x 轴的 $\mathrm{d}x$、沿圆弧线 $\mathrm{d}s$ 以及沿曲面任一切线的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，这些都是约束所允许的无限小位移，也是系统可能实现的位移。因而对于图 1－10(b) 中的 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在曲面 M 点处可沿曲面任一切线方向，所以可能位移不是惟一的。对于图 1－10(a) 如果滑道随时间而上下移动，则滑道所允许的可能位移仍为水平的 $\mathrm{d}x$。

另外，将上式(1－44)写成

$$\sum_{s=1}^{3N} A_{rs}\dot{x}_s + A_r = 0 \qquad (r = 1,2,\cdots,l+g) \tag{1-20}$$

这样将满足该式的 $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_{3N}$ 称为系统的可能速度；同样将满足约束方程的运动

$x_s(t)(s=1,2,\cdots,3N)$ 称为系统的可能运动。

2. 实位移

既满足约束方程,又满足动力学方程和初始条件的运动才是系统实际发生的运动,称为真运动。真运动只是可能运动集合中的一个。在真运动中,由时刻 t 经无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 所发生的无限小位移称为时刻 t 的实位移。显然实位移也是可能位移集合中的一个。

1.3.2 虚位移

虚位移是分析力学中一个基本概念,它对分析力学理论的建立具有举足轻重的地位。

在时刻 t 系统自同一位形出发,经过同一无限小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 所发生的任何两个可能位移 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}x'$ 之差称为系统在时刻 t 的虚位移,记作 δx,即

$$\delta x=\mathrm{d}x'-\mathrm{d}x \tag{1-21}$$

式中

$$\delta x=[\delta x_1,\delta x_2,\cdots,\delta x_{3N}]^{\mathrm{T}} \tag{1-22}$$

$$\delta x_s=\mathrm{d}x_s'-\mathrm{d}x_s \qquad (s=1,2,\cdots,3N) \tag{1-23}$$

上式中 δ 为变分符号,它表示变量的无限小"变更"。值得注意的是由上式所定义的无穷小量 δx_s 与函数 $x_s(t)$ 由于 t 的无限小变化而产生的无穷小增量不同,由函数 $x_s(t)$ 无限小变化而产生的无穷小增量我们记作微分,也可以这样理解真实位移的无穷小变化增量称为微分,而可能位移的"无穷小增量"称为变分。

下面我们将看到 δx_s 就是 $x_s(t)$ 的等时变分,因而采用变分符号。

由于 $\mathrm{d}x'$ 和 $\mathrm{d}x$ 都是可能位移,因而都满足约束方程,即

$$\sum_{s=1}^{3N}A_{rs}(x,t)\mathrm{d}x_s+A_r(x,t)\mathrm{d}t=0 \qquad (r=1,2,\cdots,l+g) \tag{1-24}$$

$$\sum_{s=1}^{3N}A_{rs}(x,t)\mathrm{d}x_s'+A_r(x,t)\mathrm{d}t=0 \qquad (r=1,2,\cdots,l+g) \tag{1-25}$$

两式相减,并考虑到两组可能位移 $\mathrm{d}x'$ 和 $\mathrm{d}x$ 是由同一时刻,同一位形出发,经由同一时间间隔 $\mathrm{d}t$ 所发生的,即两式中 A_{rs},A_r 是相同的,于是得

$$\sum_{s=1}^{3N}A_{rs}(\mathrm{d}x_s'-\mathrm{d}x_s)=0 \tag{1-26}$$

即

$$\sum_{s=1}^{3N}A_{rs}\delta x_s=0 \qquad (r=1,2,\cdots,l+g) \tag{1-27}$$

这是虚位移 δx 所应满足的方程。

该方程与约束方程

$$\sum_{s=1}^{3N}A_{rs}\mathrm{d}x_s+A_r\mathrm{d}t=0 \qquad (r=1,2,\cdots,l+g) \tag{1-19}$$

比较仅差一项 $A_r\mathrm{d}t$,因此,也可以形象地说,虚位移就是约束被"冻结"时的可能位移,所谓"冻结"是对时间 t 而言的,即令约束方程中的时间 t 不变。因为虚位移是在 t 不变时系统位形 $x(t)$ 的无限小变化,因而称之为函数 $x(t)$ 的等时变分。

另外,如果约束是定常的,则虚位移与可能位移一致。

1.3.3　用广义坐标表示的虚位移

设表示一力学系统位形的广义坐标为 $q_1,q_2,\cdots,q_n$，根据变换式 $x_s=x_s(q_1,q_2,\cdots,q_n t)$ 可得到各质点的实位移为

$$dx_s=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial x_s}{\partial t}dt \qquad (s=1,2,\cdots,3N) \tag{1-28}$$

各质点的虚位移同样可得为

$$\delta x_s=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (s=1,2,\cdots,3N) \tag{1-29}$$

或

$$\delta \boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{1-30}$$

1.3.4　自由度数目

系统的自由度数目等于独立坐标变分的个数。用字母 m 表示。

1. 对于完整系统

$$m=3N-l=n \tag{1-31}$$

即对于完整系统自由度数等于广义坐标的个数。

2. 对于非完整系统

由广义坐标表示的约束方程

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}\dot{q}_j+a_\beta=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-18}$$

我们可将其写为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}dq_j+a_\beta dt=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-32}$$

同样可以写出

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}dq_j'+a_\beta dt=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-33}$$

式(1-32)、式(1-33)两式相减有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}(dq_j'-dq_j)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-34}$$

即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{\beta j}\delta q_j=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1-35}$$

所以

$$m=n-g=3N-l-g \tag{1-36}$$

综上所述，对于完整系统，n 个广义坐标q_j 是互相独立的，它们的变分 δq_j 也是互相独立的；对于非完整系统，广义坐标 q_j 仍保持独立，但它们的变分并非相互独立，而受到 g 个约束方程的限制：$\sum_{j=1}^{n}a_{rj}\delta q_j=0 \quad (r=1,2,\cdots,g)$，也就是说广义坐标的变分之间不是相互独立的。所以系统的自由度数目定义为独立的广义坐标变分的个数。