

算 術 問 題

一 題 數 解 法

趙 餘 勳 編

商 務 印 書 館 發 行

算 術 問 題

一 題 數 解 法

趙 餘 勳 編



商 務 印 書 館 發 行

編輯大意

一。本書正編，搜集算術題一百問，每題均示數種解法，故定名為“一題數解法。”

一。本書目的，在抉發算術問題變化之妙，以增進有志研究算術者之興趣。

一。本書擇算術題之可依公式或一定方法求解者，定為模範問題，列入前編，詳示解法，正編內對此類問題，僅列算式，不再詳細說明。

一。本書前編，對分數及比例問題，舉例特詳。因分數為百分算、利息算之基本，比例為求解算術問題之利器，故不嫌煩瑣，反復說明，期無贖義。

一。本書為節省篇幅起見，凡大致相同之解法，略去甚多。讀者倘能舉一反三，當有左右逢源之樂。

一。本書正編，因限於體例，不能儘量容納算術難題，爰舉十例，列為附編，以作好學者深思之一助。

一。本書係屬草創，體例未能詳密；又編者學力有限，解法難免未盡精當。尚希海內專家，不吝賜教。

目 次

前編	模範問題(二十種).....	1
正編	一題數解示例(一百問).....	53
附編	難題十問.....	179

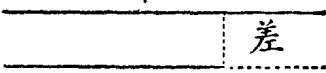
算術問題

一題數解法

前編 模範問題

一 和差問題

例 大小二數之和是 88, 差是 16. 求此二數.

解 大數 

由圖, 可見 大數 - 差 = 小數,

小數 + 差 = 大數.

由是: 和 + 差 = (大數 + 小數 + 差)

= 大數 + (小數 + 差)

= 大數 + 大數

= 大數的 2 倍,

和 - 差 = (小數 + 大數) - 差

= 小數 + (大數 - 差)

$$= \text{小數} + \text{小數}$$

$$= \text{小數的 } 2 \text{ 倍。}$$

$$\therefore 88 + 16 = 104 \text{ 是大數的 } 2 \text{ 倍，}$$

$$\text{大數是 } 104 \div 2 = 52;$$

$$88 - 16 = 72, \text{ 是小數的 } 2 \text{ 倍，}$$

$$\text{小數是 } 72 \div 2 = 36.$$

公	大數 = (和 + 差) \div 2
式	小數 = (和 - 差) \div 2

二 盈虧問題

例 童子分桃：每人分 5 隻，則餘 13 隻；每人 8 隻，則不足 11 隻。求童子數及桃數。

解 第二次比第一次每人多分 8 隻 - 5 隻 = 3 隻。第一次分時餘 13 隻，第二次分時缺 11 隻，足見第二次分時，除將第一次餘的 13 隻分掉外，還當預備 11 隻。

從總數上看來，第二次比第一次要多

$$13 \text{ 隻} + 11 \text{ 隻} = 24 \text{ 隻。}$$

每人多分 3 隻，總數要多出 24 隻。

可知兒童有 $24 \div 3 = 8$ (人)；

$$\text{桃子有 } 5 \text{ 隻} \times 8 + 13 \text{ 隻} = 53 \text{ 隻,}$$

$$\text{或 } 8 \text{ 隻} \times 8 - 11 \text{ 隻} = 53 \text{ 隻.}$$

公式	總數差 ÷ 一單位差 = 單位數
----	------------------

【注意】 本題因為一個條件是餘的，一個條件是不足的，所以通常叫做盈虧問題。但算術題的變化很多：有時兩個條件都是盈的，有時兩個條件都是虧的，這些問題似乎不能叫做盈虧問題了；但題目的性質沒有差異，上面的公式能普遍適用，所以這類問題，都可歸入盈虧問題。參看下面二例：

“水果商賣桃：每隻賣銅元 10 枚，可賺 300 枚；每隻賣 12 枚，可賺 600 枚。求桃子數”。

$$\text{每隻的賣價相差銅元 } 12 \text{ 枚} - 10 \text{ 枚} = 2 \text{ 枚,}$$

$$\text{獲利的總數相差銅元 } 600 \text{ 枚} - 300 \text{ 枚} = 300 \text{ 枚.}$$

$$\text{可見有桃 } 300 \div 2 = 150 \text{ (隻).}$$

“某市學生捐款購飛機一架：原定每人捐 1 角，還缺 24800 元；後來改定每人捐 1 角 5 分，但還缺 7200 元。求某市的學生數”。

$$\text{每人的捐款相差 } 0.15 \text{ 元} - 0.1 \text{ 元} = 0.05 \text{ 元,}$$

$$\text{總數相差 } 24800 \text{ 元} - 7200 \text{ 元} = 17600 \text{ 元.}$$

可見有學生 $17000 \div 0.05 = 350000$ (人)。

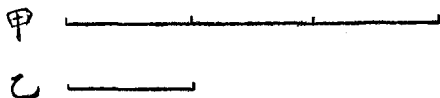
三 總和不變問題

例 甲缸裏有水 3 石 2 斗 5 升，乙缸裏有水 2 石 6 斗 7 升。現在要使甲缸的水 3 倍於乙缸，那末應從乙缸裏倒多少水到甲缸裏去？

解 無論倒多少，兩隻缸裏水的總和是不變的。兩缸共有水 325 升 $+ 267$ 升 $= 592$ 升。

看下面的圖，可知甲缸 3 倍於乙缸時，這個總和是乙缸的

$$3 + 1 = 4 \text{ (倍)}。$$



∴ 甲缸 3 倍於乙缸時，乙缸有水

$$592 \text{ 升} \div 4 = 148 \text{ 升}，$$

乙缸應倒入甲缸

$$267 \text{ 升} - 148 \text{ 升} = 119 \text{ 升} = 1 \text{ 石 } 1 \text{ 斗 } 9 \text{ 升}。$$

公式	$\text{二數和} \div (\text{倍數} + 1) = \text{小數}$
----	---

【注意】 已知二數的和，又知二數的倍數關係，便可應用上面的公式演算。參看下面二例：

“大小二數的和是 56, 已知大數是小數的 $2\frac{1}{2}$ 倍, 求二數”。

依公式: 小數是 $56 \div \left(2\frac{1}{2} + 1\right) = 16,$

大數是 $16 \times 2\frac{1}{2} = 40.$

“某人有遺產 6450 元, 提出 1950 元捐助某小學基金; 其餘分給二子, 已知長子所得是幼子的 $1\frac{1}{2}$ 倍, 問二子各得多少?”

二子所得的和是 $6450 \text{ 元} - 1950 \text{ 元} = 4500 \text{ 元}.$

依公式: 幼子得 $4500 \text{ 元} \div \left(1\frac{1}{2} + 1\right) = 1800 \text{ 元},$

長子得 $1800 \text{ 元} \times 1\frac{1}{2} = 2700 \text{ 元}.$

四 差數不變問題

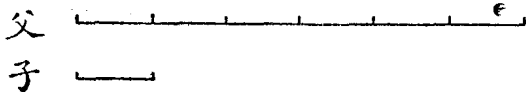
例 父年 43 歲, 子年 18 歲, 幾年以前, 父年是子年的 6 倍?

解 無論在那一年, 父子二人總是相差

$$43 \text{ 歲} - 18 \text{ 歲} = 25 \text{ 歲}.$$

看下面的圖, 可知父年 6 倍於子年時,

這個差數是子年的 $6 - 1 = 5$ (倍)。



∴ 父年 6 倍於子年時，子年是

$$25 \text{ 歲} \div 5 = 5 \text{ 歲},$$

在 $(18-5) = 13$ 年前。

公式	二數差 \div (倍數 $- 1$) = 小數
----	-----------------------------

[注意] 已知二數的差，又知二數的倍數關係，便可應用上面的公式演算，參看下面二例：

“大小二數的差是 84，已知大數是小數的 $3\frac{1}{3}$ 倍，求二數”。

依公式：小數是 $84 \div \left(3\frac{1}{3} - 1\right) = 36$,

大數是 $36 \times 3\frac{1}{3} = 120$ 。

“甲乙二人每年的收入相等，甲每年用 760 元，乙每年用 640 元，所餘的都存入銀行，已知乙每年的存款是甲的 $1\frac{1}{2}$ 倍，求二人每年的收入”。

每年甲比乙多用 $760 \text{ 元} - 640 \text{ 元} = 120 \text{ 元}$ ，

因為二人每年的收入是相等的，

甲多用 120 元，存款便少 120 元。

依公式： 甲的存款是 $120 \text{ 元} \div \left(1\frac{1}{2} - 1\right) = 240 \text{ 元}$ ，

\therefore 每年收入 $760 \text{ 元} + 240 \text{ 元} = 1000 \text{ 元}$ 。

五 雞兔問題一

例 雞兔頭數的和是22，足數的和是72。問雞兔各有幾隻？

解 a. 假定兔子也只有2隻腳，

那末22頭只有腳 $2 \text{ 隻} \times 22 = 44 \text{ 隻}$ ，

比題中少腳 $72 \text{ 隻} - 44 \text{ 隻} = 28 \text{ 隻}$ 。

這是因為每隻兔子少算 $4 - 2 = 2$ 隻腳的緣故。

每隻兔子少算2隻腳，總數少28隻。

可見有兔子 $28 \div 2 = 14$ (隻)，

雞 $22 - 14 = 8$ (隻)。

b. 假定雞也有4隻腳，

那末腳數要多出 $4 \times 22 - 72 = 16$ ，

每隻雞多算2隻腳，總數多出16隻。

可見有雞 $16 \div 2 = 8$ (隻)，

兔子 $22 - 8 = 14$ (隻)。

公	$(\text{足數和} - \text{頭數和} \times 2) \div (4 - 2) = \text{兔}$
式	$(\text{頭數和} \times 4 - \text{足數和}) \div (4 - 2) = \text{雞}$

【注意】公式中的 4，是兔一頭的足數；2 是雞一頭的足數

這兩個公式，不但適用於雞兔問題；凡是性質和雞兔問題相同的問題，都可用這兩個公式演算。不過公式中的 4 和 2 是因題而異，要隨時變換的。參看下列：

“大和尚每人吃 4 個饅頭，小和尚每 4 人吃 1 個饅頭。已知 100 個和尚吃 100 個饅頭。問大小和尚各有幾個？”

和尚的總數相當於雞兔頭數的和，

饅頭的總數相當於雞兔足數的和，

大和尚吃饅頭 4 個，相當於兔有 4 足，

小和尚吃饅頭 $\frac{1}{4}$ 個，相當於雞有 2 足。

依公式：大和尚 $(100 - 100 \times \frac{1}{4}) \div (4 - \frac{1}{4}) = 20$ ，

小和尚 $100 - 20 = 80$ ；

或 小和尚 $(100 \times 4 - 100) \div (4 - \frac{1}{4}) = 80$ ，

大和尚 $100 - 80 = 20$ 。

六 雞兔問題二

例 雞兔頭數的和是 24，足數相差 36。問雞兔各有幾隻？

解 本題但云足數相差 36，究竟兔多還是雞多，不曾明白說出，當分別求其解答。

a. 兔的足數比雞的足數多 36.

假定 24 隻都是兔，

那末兔有腳 $4 \times 24 = 96$ 雞有腳 0，

兔比雞多腳 96，

比題中更多出 $96 - 36 = 60$ ，

這是因為把雞都算做兔的緣故。

1 雞算做 1 兔，雞方面少腳 2，兔方面多腳 4；差數要增多

$$4 + 2 = 6.$$

現在差數增多 60.

可見錯算 $60 \div 6 = 10$ (隻)，

即有 10 隻雞錯算做 10 隻兔子了。

∴ 原來有雞 10 隻，

$$\text{兔 } 24 \text{ 隻} - 10 \text{ 隻} = 14 \text{ 隻}.$$

b 雞的足數比兔的足數多 36.

假定 24 隻都是雞，

那末雞的腳比兔多 $2 \times 24 = 48$ ，

比題中更多出 $48 - 36 = 12$ ，

1 兔錯算 1 雞，差數增多 $4 + 2 = 6$ ，

由 $12 \div 6 = 2$ ，知錯算 2 隻。

∴ 原來有兔 2 隻，

雞 24 隻 - 2 隻 = 22 隻。

公	$(\text{頭數} \times 4 - \text{足數差}) \div (4 + 2) = \text{雞 (少)}$
式	$(\text{頭數} \times 2 - \text{足數差}) \div (4 + 2) = \text{兔 (少)}$

【注意】 凡是與本問題性質相同的問題，都可用這兩個公式演算，但題中的 4 和 2 要隨時變換，參看下列：

“某人有甲乙兩宗存款，共計 6300 元。甲款的年利率是 6% 乙款的年利率是 5%。每年利息相差 345 元。問兩宗存款各是多少？”

6300 元相當於頭數的和，

345 元相當於足數的差，

6% 相當於兔有 4 足，

5% 相當於雞有 2 足。

把 6300 元全算做乙，每年只有利息 $6300 \text{ 元} \times 5\% = 315 \text{ 元}$ ，決不能比甲多 345 元，所以本題的存款一定甲比乙多。由求雞的公式：

$$(6300 \times 6\% - 345) \div (6\% + 5\%) = 300 \text{ 元} \cdots \cdots \text{乙，}$$

$$6300 \text{ 元} - 300 \text{ 元} = 6000 \text{ 元} \cdots \cdots \text{甲。}$$

七 雞兔問題三

例 雞兔的頭數相差12,足數的和是96.問雞兔各有幾隻?

解 本題但云頭數相差12,不曾明白說出雞多還是兔多,所以要分兩方面研究。

a 雞的頭數比兔多12.

假定只有12隻雞,沒有兔子。

那末只有腳 $2 \text{隻} \times 12 = 24 \text{隻}$ 。

比題中少 $96 - 24 = 72$ 。

如果同時各增雞兔1隻,

則頭數的相差仍是12,

而足數可增多 $4 + 2 = 6$ 。

現在要增多72,可見要各增 $72 \div 6 = 12$ 。

∴ 兔有12隻,

雞有 $12 \text{隻} + 12 \text{隻} = 24 \text{隻}$ 。

b. 兔的頭數比雞多12.

假定只有12隻兔,沒有雞。

那末只有腳 $4 \text{隻} \times 12 = 48 \text{隻}$,

比題中少 $96 - 48 = 48$ 。

同時各增雞兔1隻,則頭數的差不變,而足數增多 $4 + 2 = 6$ 。

因爲共要增 48, 可見要各增 $48 \div 6 = 8$.

∴ 有雞 8 隻,

兔 8 隻 + 12 隻 = 20 隻。

公	$(\text{足數和} - \text{頭數差} \times 2) \div (4 + 2) = \text{兔 (少)}$
式	$(\text{足數和} - \text{頭數差} \times 4) \div (4 + 2) = \text{雞 (少)}$

[注意] 凡性質與本題相同的問題, 都可用這兩個公式演算. 但 4 與 2 是因題而異的. 參看下列:

“某校購買國語、算術兩種書籍, 共計 100 元. 已知算術每冊 0.8 元, 國語每冊 0.3 元; 又知兩種書冊數的相差是 150. 問各買幾冊?”

100 元相當於足數的和,

150 冊相當於頭數的差,

國語每冊 0.3 元, 相當於雞有 2 足,

算術每冊 0.8 元, 相當於兔有 4 足。

把 150 冊算做算術, 已共值 $0.8 \text{ 元} \times 150 = 120 \text{ 元}$, 已比題中的 100 元多了, 可見算術決不滿 150 冊. 所以應當是國語比算術多 150 冊。

由求兔的公式:

$(100 - 0.3 \times 170) \div (0.8 + 0.3) = 50$ 冊……算術，

50 冊 + 150 冊 = 200 冊……國語。

八 雞兔問題四

例 雞兔頭數的相差是 8 ，足數的相差是 6 。問雞兔各有幾隻？

解 本題可分四種情形研究：

a 雞的頭數多 8 ，雞的足數多 6 。

假定只有 8 隻雞，

則雞的足數多 $2 \times 8 = 16$ 。

比題中更多出 $16 - 6 = 10$ 。

同時各增 1 雞 1 兔，則雞的足數增 2 ，兔的足數增 4 ，兔多增 2 。可見上面的差數 (10) 要減少 2 。

由 $10 \div 2 = 5$ 。

知各增 5 隻，則雞的足數比兔多 6 。

\therefore 兔有 5 隻，

雞有 5 隻 + 8 隻 = 13 隻。

b. 雞的頭數多 8 ，雞的足數少 6 。

假定只有 8 隻雞，

則雞的足數多 $2 \times 8 = 16$ 。

但題言雞的足數少 6 ，即兔的足數多 6 ，可知必須使兔的足