

初等代數

下冊

編者 五陸
校者 胡李
余介石

民國三十五年十一月發行
民國三十六年十一月三版

初等代數

◎下冊定價國幣

(郵運匯費另加)

有 不
著 准
作 翻
權 印

編

者

胡

衡

五

李

修

睦

校

者

余

介

石

發

行

中華書局股份有限公司代表

李

虞

杰

印

刷

中華書局香港分廠

發

行

各埠中華書局

初等代數下冊目次

第七章 分式

	頁數
分式.....	1
I. 分式四則.....	6
III. 分方程式.....	11

第八章 比例

I. 比.....	18
II. 比例.....	20

第九章 乘方與開方

乘方.....	29
I. 開方.....	33

第十章 根式 指數與虛數

I. 根式.....	45
II. 指數.....	57
III. 虛數.....	62

第十一章 一元二次方程式

- I. 二次函數圖解.....68
- II. 一元二次方程式解法.....73

第十二章 可化爲二次方程式求解的 各種簡易方程式

- I. 高次方程式.....69
- II. 根式方程式.....94
- III. 聯立方程式.....97

第十三章 級數

- I. 等差級數.....105
- II. 等比級數.....110
- III. 二項定理.....123

總習題.....128

中西名詞對照表.....187

初等代數下冊

第七章

分式

I. 分式

115. 定義 一式 A , 除以一式 B (不爲零), 記做 $\frac{A}{B}$ 或 A/B ; 被除式 A 叫分子, 除式 B 叫分母. 代數式中分母含有文字或元的, 叫分式.

對分式而言, 分母不含文字或元的, 叫整式.

如 $x+y$, $\frac{x+y}{2}$, 都是整式.

$\frac{1}{x}$, $\frac{1+x^2}{x}$, 都是分式.

上二分式中 x 是分母, 1 和 $1+x^2$ 是分子.

【註】 分式與除法有同等意義, 所以 $\frac{1+x^2}{x}$ 也可以寫成 $(1+x^2) \div x$, 或 $(1+x^2)/x$.

116. 基本原則 和算術中關於分數的情形一樣, 一分式用不爲零的任何數同時來乘或除分子, 分母,

分式的值不變。

$$\frac{x}{y} = \frac{ax}{ay}; \text{ 或 } \frac{ax}{ay} = \frac{ax+a}{ay+a} = \frac{x}{y}.$$

117. 符號律 因為分式與除法同義,所以分式的性質號,與除法商的性質符號一樣,可以由分子,分母的性質號來定。

$$\text{【例】} \quad \frac{+x}{+y} = +\frac{x}{y}; \quad \frac{-x}{-y} = +\frac{x}{y}; \quad (一)$$

$$\frac{-x}{+y} = -\frac{x}{y}; \quad \frac{+x}{-y} = -\frac{x}{y}. \quad (二)$$

觀察上四式,可併為二式:

$$\frac{+x}{+y} = \frac{-x}{-y} = +\frac{x}{y}; \quad \frac{-x}{+y} = \frac{+x}{-y} = -\frac{x}{y}.$$

更取前式寫作

$$+\frac{+x}{+y} = -\left(-\frac{x}{y}\right).$$

$$\text{則有關係} \quad +\frac{+x}{+y} = -\frac{-x}{+y}, \quad (三)$$

$$\text{或} \quad +\frac{+x}{+y} = -\frac{+x}{-y}.$$

故得分式性質符號的符號律:

(一)分子,分母同號,則分式為正

(二)分子,分母異號,則分式為負

(三)分子,分母,分式前面三個性質符號,可以任意

改變兩個,對分式的符號不生影響.

$$\begin{aligned} \text{【例】} \quad \frac{-3}{5-x} &= \frac{-(-3)}{-(5-x)} = \frac{3}{x-5}; \\ &= -\frac{-(-3)}{5-x} = -\frac{3}{5-x}; \\ &= -\frac{-3}{-(5-x)} = -\frac{-3}{x-5}. \end{aligned}$$

【註】 分式前面的正號,可以省去不寫.

習 題 四 七

填出下面各式的缺項:

$$1. \quad -\frac{3}{5} = \frac{?}{15}$$

$$2. \quad -\frac{5}{9} = -\frac{-10}{?}$$

$$3. \quad \frac{3x}{4x+5} = \frac{6x}{?}$$

$$4. \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$$

$$5. \quad \frac{x-3}{x} = \frac{3-x}{?}$$

$$6. \quad -\frac{2-x}{x-1} = \frac{x-2}{?}$$

118.約分 根據基本原則,用分母,分子的最高公因式來除分子,分母,使成互素,所得的分式叫最簡分式.

約一分式爲最簡分式的方法叫約分.

【例一】 約 $\frac{-4ac^2}{12a^2c}$ 爲最簡分式.

【解】 分子,分母的 H. C. F. = $4ac$.

$$\therefore \frac{-4ac^2}{12a^2c} = \frac{-4ac^2 \div 4ac}{12a^2c \div 4ac} = -\frac{c}{3a}.$$

可演算如次:

$$\frac{-4ac^2}{12a^2c} = -\frac{\cancel{2^2} \cancel{4} c^{\cancel{2}}}{\cancel{2^2} \cdot 3a^{\cancel{2}} \cancel{c}} = -\frac{c}{3a}.$$

【例二】 約分 $\frac{2x-6}{x^2-5x+6}$. $\frac{2(\cancel{x}-3)}{(\cancel{x}-2)(x-3)}$

【解】 先分解分子、分母的因子，再消去公因子。

$$\frac{2x-6}{x^2-5x+6} = \frac{2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-2}.$$

【例三】 約分 $\frac{x^2-7x+12}{16-x^2}$. $\frac{(\cancel{x}-3)(\cancel{x}-4)}{-\cancel{x}^2-16} = \frac{(\cancel{x}-3)(\cancel{x}-4)}{-(4+x)(4-x)}$

【解】 $\frac{x^2-7x+12}{16-x^2} = \frac{(x-3)(x-4)}{(4+x)(4-x)} = \frac{-(x-3)(x-4)}{-(4+x)(4-x)}$

$$= \frac{(3-x)(x-4)}{(4+x)(x-4)} = \frac{3-x}{4+x}.$$

【註】 分子、分母所改的負號，可看作用 -1 相乘，這負號只能與一因子相乘，故只變一因子的號。

如 $-(x-3)(x-4) = -1 \times (x-3)(x-4) = (x-3)(4-x)$ ，或 $(3-x)(x-4)$ ，與 $-(x-3+x-4) = -1 \times (x-3+x-4)$ 裏面符號，乘出後全變者不同。

習 題 四 八

約分下列各式：

1. $12ab^3/18a^2b$, 2. $(a^2-b^2)/(a+b)^2$.

3. $(14-7x)/(x^2-4)$, 4. $(d^2-c^2)/(c^2-d^2)$.

5. $(ab^4-ab^2c^2)/(a^2b^2+a^3bc)$.

6. $(9-x^2)/(7x-x^2-12)$.

7. $\frac{x^2-9x+18}{3x^2+3x-36} \cdot \frac{x-4}{x(x+4)}$ 8. $\frac{2x^2-22x+56}{63-9x-7y+xy}$

119. 通分 把分母不同的分式，變成分母相同的分式的方法叫通分。

根據基本原則，分式的分子、分母可以用任一不為 0 的式來乘，便得通分的

法則 先求各分式分母的 $L.C.M.$ ，再用原分母除 $L.C.M.$ ，以除得的商，乘各分式的分子與分母。

【例一】 通分 $\frac{a}{2xy^2}$, $\frac{b}{3x^2y}$.

【解】 分母的 $L.C.M. = 2 \cdot 3x^2 \cdot y^2 = 6x^2y^2$.

$$6x^2y^2 \div 2xy^2 = 3x,$$

$$6x^2y^2 \div 3x^2y = 2y.$$

$$\therefore \frac{a}{2xy^2} = \frac{a \cdot 3x}{6x^2y^2} = \frac{3ax}{6x^2y^2}, \quad \frac{b}{3x^2y} = \frac{b \cdot 2y}{6x^2y^2} = \frac{2by}{6x^2y^2}.$$

【例二】 通分 $\frac{x+5}{x^2-x-6}$, $\frac{x+3}{x^2+7x+10}$.

【解】 $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$,

$$x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2).$$

故分母的 $L.C.M. = (x-3)(x+2)(x+5)$.

$$\therefore \frac{x+5}{x^2-x-6} = \frac{(x+5)(x+5)}{(x^2-x-6)(x+5)} = \frac{(x+5)^2}{(x-3)(x+2)(x+5)},$$

$$\frac{x+3}{x^2+7x+10} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x^2+7x+10)(x-3)} = \frac{x^2-9}{(x+5)(x+2)(x-3)}.$$

【例三】 通分 $a, \frac{b}{x-y}, \frac{c}{x+y}$.

【解】 整式 a 可視作分母爲 1 的分式.

分母的 $L.C.M. = (x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

$$\therefore a = \frac{a}{1} = \frac{a(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2};$$

$$\frac{b}{x-y} = \frac{b(x+y)}{x^2 - y^2};$$

$$\frac{c}{x+y} = \frac{c(x-y)}{x^2 - y^2}.$$

習題四九

通分下列各組分式:

1. $\frac{a}{xy}, \frac{b}{yz}, \frac{c}{zx}$.

2. $\frac{a}{x}, \frac{2b}{x-y}, \frac{3c}{x+y}$.

3. $\frac{a}{x^2-6x+8}, \frac{a+b}{x^2-16}$.

4. $\frac{x+y}{x^2-2xy}, \frac{x-y}{xy-2y^2}$.

5. $x^2+x+1, \frac{1+x}{1-x}$.

6. $\frac{2x-3y}{6x^2+11xy+3y^2}, \frac{5x}{4x^2-9y^2}$.

II. 分式四則

120. 分式加減法 分式四則運算法則和算術中

關於分數的情形完全一樣。

加減法法則：

(一)分母相同的分式相加減，以各分子加減的結果爲新分子，分母不變。

(二)分母不同的分式相加減，先通分，再照(一)算。

【例一】 求 $\frac{2a}{x+y} + \frac{b}{x+y} - \frac{a}{x+y}$ 的結果。

【解】 $\frac{2a}{x+y} + \frac{b}{x+y} - \frac{a}{x+y} = \frac{2a+b-a}{x+y} = \frac{a+b}{x+y}$ 。

【例二】 求 $\frac{2}{x^2-4x+3} - \frac{4}{x^2+2x-15}$ 的差。

【解】
$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2-4x+3} - \frac{4}{x^2+2x-15} &= \frac{2}{(x-1)(x-3)} - \frac{4}{(x+5)(x-3)} \\&= \frac{2(x+5) - 4(x-1)}{(x-1)(x-3)(x+5)} \\&= \frac{2x+10-4x+4}{(x-1)(x-3)(x+5)} \\&= \frac{-2x+14}{(x-1)(x-3)(x+5)} \\&= -\frac{2(x-7)}{(x-1)(x-3)(x+5)}.\end{aligned}$$

【註】 若結果式分子、分母有公因子，應約分。

習題五 ○

求下列各式的結果：

$$1. \frac{2a+n}{a+an} + \frac{2n+a}{a+an}.$$

$$2. \frac{n^3-n^2}{n+1} + \frac{2n^2}{n+1}.$$

$$3. \frac{m}{m-1} - \frac{1}{m+1}.$$

$$4. \frac{m}{n} - \frac{5}{2n^3} + \frac{x}{4}.$$

$$5. \frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2x-3}{x^2-5x+6}.$$

$$6. \frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x}.$$

$$7. \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} + \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}.$$

$$8. \frac{x}{x^3+y^3} - \frac{y}{x^3-y^3} + \frac{x^3y+xy^3}{x^6-y^6}.$$

121. 分式乘法 用一分數去乘別數,就是將那數照分子倍起來,而照分母分爲等分;換句話說,就是用分子乘,用分母除,所以得

分式乘法法則 各分子相乘爲新分子,各分母相乘爲新分母.

如各分子與分母間有公因子,應先約分.

$$\text{【例一】} \quad \frac{a^2-4}{3x} \cdot \frac{6x}{a-2} = \frac{(a+2)(a-2)}{(a-2)} \cdot \frac{2 \times 3x}{3x} = 2(a+2).$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】} \quad \frac{x^2-1}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

習 題 五 一

求下列各題中諸式的積:

$$1. \quad \frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}.$$

$$2. \quad 2a, \frac{3}{b}, \frac{c}{6}.$$

$$3. \quad \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a^2}, \frac{2x + 2a}{3x}.$$

$$4. \quad \frac{5a + 5c}{ax - cx}, \frac{ax^2 - cx^2}{a^2 + ac}.$$

$$5. \quad \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 8x + 16}, x^2 - 5x + 4.$$

$$6. \quad \left(1 + \frac{2 - 2a}{a^2 - 1}\right), \left(\frac{2a}{a - 1} - 1\right).$$

$$7. \quad \frac{2 + 5x + 3x^2}{(1 + x)^3}, \frac{1 + x}{4x^2}.$$

$$8. \quad \frac{a^2 - 2ab - 3b^2}{(a + b)^3}, \frac{a^2 - 4ab + 3b^2}{a^3 + b^3}.$$

$$9. \quad \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 25}, \frac{x + 1}{x^2 + 5x}, \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 8}, \left(1 + \frac{4}{x + 1}\right)^2.$$

122. 分式除法 除法是乘法的逆運算, 如用 $\frac{a}{b}$ 除 c , 得商爲 x , 則以 $\frac{a}{b}$ 乘 x 的積, 應當是 c , 可見商必爲 $\frac{b}{a} \cdot c$ 故得分式除法法則如下:

顛倒除式的分子、分母, 去乘被除式.

$$\text{【例一】} \quad \frac{ab}{x} \div \frac{ac}{nx} = \frac{ab}{x} \cdot \frac{nx}{ac} = \frac{bn}{c}.$$

$$\begin{aligned} \text{【例二】} \quad \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} \div (x^2 - 4) &= \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2} \div \frac{(x^2 - 4)}{1} \\ &= \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x+2}{(x-1)^2(x-2)}. \end{aligned}$$

習 題 五 二

求下列各題的商:

$$1. \frac{4a^2}{x} + \frac{2a}{x^2}$$

$$2. \frac{24a^2b^2}{5x^4y^3} + 6a^2b^2$$

$$3. \frac{x^2+2x-35}{x^2+10x+21} \div (x^2-4x-5), \quad 4. \left(2 - \frac{y}{x+y}\right) \div \left(2 - \frac{x}{x+y}\right)$$

$$5. \left(\frac{n}{a} - \frac{9a}{n}\right) \div \left(\frac{n^2}{4a^2} - \frac{81a^2}{4n^2}\right), \quad 6. \left(3 - \frac{1}{n+2}\right) + \left(3 - \frac{4}{n+3}\right)$$

$$7. \left(x - 3 - \frac{28}{x}\right) \div \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2}\right)$$

123. 繁分式 分子、分母皆含分式的分式，叫繁分式。

繁分式的運算，只須認清分子和分母，照分式四則化爲簡分式。

【例一】 化簡 $\frac{a}{x + \frac{a}{y}}$

【解】 分母爲一分式，先照分式四則化簡分母。

$$\begin{aligned} \frac{a}{x + \frac{a}{y}} &= \frac{a}{\frac{xy+a}{y}} \\ &= a \div \left(\frac{xy+a}{y}\right) = a \cdot \frac{y}{xy+a} = \frac{ay}{xy+a} \end{aligned}$$

【例二】 化簡 $\frac{1 - \frac{3}{a} - \frac{10}{a^2}}{a - 13 + \frac{40}{a}}$

【解】 分子、分母都是分式，先照分式四則分別化簡分子和分母。

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{3}{a} - \frac{10}{a^2}}{a - 13 + \frac{40}{a}} &= \frac{\frac{a^2 - 3a - 10}{a^2}}{\frac{a^2 - 13a + 40}{a}} \\ &= \frac{(a-5)(a+2)}{a^2} \cdot \frac{a}{(a-5)(a-8)} \\ &= \frac{a+2}{a(a-8)} \end{aligned}$$

習題五 三

化簡下列各繁分式：

- | | |
|--|--|
| 2. $\frac{\frac{a}{b} - \frac{a}{b}}{\frac{a}{a} - \frac{a}{b}}$ | 2. $\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$ |
| 3. $\frac{1 + \frac{x}{x-y}}{\frac{x}{x-y}}$ | 4. $\frac{x + \frac{1}{x+2} - 2}{x + \frac{1}{x-2} + 2}$ |
| 5. $\frac{\frac{x}{3y} - \frac{3y}{x}}{\frac{4y}{x+y} - 1}$ | 6. $1 + \frac{x}{1+x + \frac{2x^2}{1-x}}$ |

III. 分方程式

124. 分方程式解法 分式分母含有未知數的方程式叫分方程式。分母不含未知數的叫整方程式。

如 $\frac{1}{x-3} = 2$, $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} - 3 = 0$ 等都是分方程式。

分方程式的解法 先用各分式分母的 *L.C.M.* 徧乘方程式,化爲整方程式再解.

解出的結果,必須代入原式驗算.

【註】 分方程式解法的討論,詳本局高中代數學.

【例一】 解方程式 $\frac{1}{x-3}=2$.

【解】 以分母的 *L.C.M.* 徧乘方程式,得

$$1=2x-6, \quad \text{解得 } x=\frac{7}{2}.$$

【驗算】 $\frac{1}{\frac{7}{2}-3}=\frac{1}{\frac{7-6}{2}}=1 \times \frac{2}{1}=2.$

$\therefore x=\frac{7}{2}$ 爲分方程式的根.

【例二】 解分方程式 $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=3.$

【解】 以 x 徧乘方程式,得

$$1+2+3=3x.$$

$$\therefore x=2.$$

【驗算】 $\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3.$

【又解】 原方程式可寫作

$$\frac{1}{x}+2 \cdot \frac{1}{x}+3 \cdot \frac{1}{x}=3,$$

或 $(1+2+3) \cdot \frac{1}{x}=3,$

$$6=3x,$$

$$\therefore x=2.$$

【例三】 解方程式 $\frac{7x}{x-2} = \frac{6x}{x-1} + 6$.

【解】 以 $(x-2)(x-1)$ 徧乘方程式,

$$7x(x-1) = 6x(x-2) + 6(x-2)(x-1),$$

$$7x^2 - 7x = 6x^2 - 12x + 6x^2 - 18x + 12.$$

移項,合併, $5x^2 - 23x + 12 = 0$.

分解因子, $(x-4)(5x-3) = 0$.

$$\therefore x = 4, \text{ 或 } x = \frac{3}{5}.$$

【驗算】 $x = 4, \frac{7 \times 4}{4-2} = \frac{6 \times 4}{4-1} + 6, 14 = 14.$

$$x = \frac{3}{5}, \frac{7 \times \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}-2} = \frac{6 \times \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}-1} + 6, \frac{21}{5} \times \frac{5}{-7} = \frac{18}{5} \times \frac{5}{-2} + 6,$$

$$-3 = -9 + 6, -3 = -3.$$

$\therefore 4, \frac{3}{5}$ 爲分方程式二根.

習題五四

解下列分方程式並驗算結果:

1. $\frac{5}{x} = 1, x = 5$

2. $\frac{3+2x}{2x-3} = \frac{1}{4}, x = -1.5$

3. $\frac{5x+1}{x-11} + 8 = 2x, x_1 = 14.5, x_2 = 3$

4. $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+3}{x+1}, x = 2$

5. $\frac{n}{x} + \frac{3n}{2x} = \frac{5}{4}, x = 2.12$

6. $\frac{3}{5-3x} = \frac{4-3x}{3x-5} + \frac{7}{5}, x = 0$