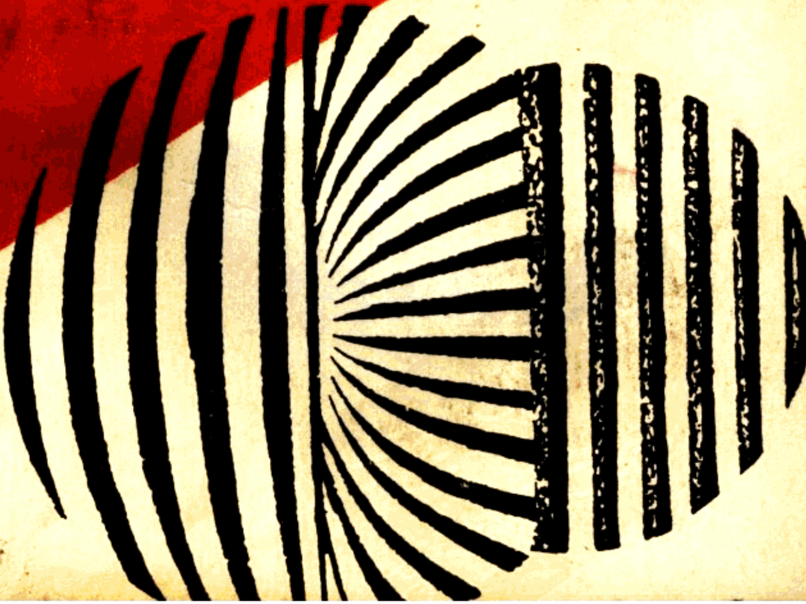
高中数学解题思路与典型问题

卢四维　李义真
范光州　李悦兴　编著

陕西人民教育出版社



解题思路与典型问题

卢四维　李义貞
范光洲　李悦兴　编著

高中数学解题思路与典型问题

卢四维　李义真
范光州　李悦兴　编著

陕西人民教育出版社出版发行

（西安长安路南段376号）

新华书店经销　　西安新华印刷厂排版

西安市雁塔区第二印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32开本　13.5印张　287千字

1991年11月第1版　　1991年11月第1次印刷

印数：1—4,160

ISBN 7—5419—2580—2/G·2255

定　价：4.40元

内容简介

本书着重对高中数学的主要数学方法和解题思路，以及典型问题，进行了系统的归纳总结，旨在使科学的思维方法能帮助学生巩固知识、开拓思路、提高能力，使读者的创造性思维得到激发，全书内容层次清晰，文字表述简明，例题充实典型，可读性强。

本书可供高中学生，尤其是高中毕业生总复习使用，同时也是教师教学的很好的参考资料。

前　言

《高中数学解题思路与典型问题》是作者积几十年的教学经验和丰富的资料编写而成的。

本书通过对高中数学的解题方法与思路的分析与总结，通过对典型问题的剖析与探讨，力求使科学的思维方法能帮助学生巩固知识、开拓思路、提高能力，使读者的创造性思维得到激发。本书以方法与思路为主导，试图改变那种死学知识为主的传统做法，培养学生会审题、会分析、能灵活运用、能综合归纳的本领，从而由那种死板的学习模式中解脱出来。

本书内容共分三部分。第一部分讲述了八种主要的数学方法，这些方法在学习中学数学阶段是最常用的方法；书中以简明的文字对这八种数学解题方法作了介绍，并以相当数量的例题就如何使用这些方法向读者作了示范。第二部分是在第一部分的基础上，以专题形式分十三小节讲述了探求解题思路的十三种思维方法。本部分是全书的精华，也是本书向读者讲述以及读者需要掌握和学习的最重要的内容。因为解数学题的过程是思维活动的过程，而数学题的内容和形式是变化无穷的，所以解数学题不会有固定的模式；即便是学习了一些概念、公理、定理、法则及解题方法，但要使用好这些方法，却需要极大的灵活性，这就必须解决好如何思考问题和分析问题，就必须学习和掌握数学的思维方法。本部

分的每个专题，题目都以形象、生动的语言文字概括出一种解题思路，简明易记，吸引力强；例题充实，思路清晰，解答详细。第三部分以知识块为范围，以问题为对象，深入地剖析了高中数学的典型问题。本部分不但是前两部分的继续，也是从另一个侧面去反映高中数学的重要问题，同时又给读者以使用和理解“思路”的机会，使之达到更深一步的理解和掌握。

作者真诚地期望这本书能成为高中学生的良师益友。

由于水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者不吝赐教。

作者

1990年12月

目　录

第一部分　主要的数学方法

学习数学不仅要掌握前人研究的结果，记住重要的概念、公理、定理、公式、法则和性质，更须掌握获得成果所使用的方法。

解决数学问题没有死板的格式，那种希望遇到问题套入固定模式以求问题的解决，是脱离实际，根本行不通的。数学问题千变万化，解决问题的方法也是各种各样的，但从解决问题的途径加以区分的话，有直接法和间接法两种。从原命题入手的证明方法叫直接证法；从证明原命题的等效命题成立，间接地推知原命题成立的方法叫间接证法。间接证法包括反证法和同一法。反证法是证明原命题的逆否命题成立；同一法是证明原命题的逆命题成立，从证明问题的逻辑思维分，有演绎法和归纳法两种。

掌握数学概念固然重要，但注意探索和掌握解题方法，又是锻炼和培养分析问题和解决问题能力的不可缺少的一环。本部分就一些常用的数学解题方法作一简明叙述。

一、分析法与综合法

分析法是从未知到已知的思考方法，即从问题的结论入手，追索其成立的原因，这样逐步逆推，直到与已知条件相吻合为止、简单说，就是“执果索因”。

分析法是从“未知”看“需知”，逐步靠拢“已知”。

一般地说，分析法有两种证明途径：

（1）由命题结论出发，找其成立的充分条件，逐步推演下去；

（2）由命题结论出发，找其成立的必要条件，逐步推演下去。

下面通过一些例题，说明分析法的运用。

例1．求证：$\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$．

证明：欲证　$\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$，

只须证　$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2<16$，

即证　$8+2\sqrt{15}<16$，

而　$2\sqrt{15}<2\sqrt{16}=8$，

∴　$8+2\sqrt{15}<16$成立．

故逆推回去可知$\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$成立．

例2．设a、b、c是互不相等的正数．

求证：$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>9$．

本题只给出分析过程：

从“未知”看“需知”：

欲证　$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>9$，

即证　$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}>9$，

即证　$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}>6$．

逐步靠拢“已知”：

即需证 $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)>6$，

可证 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$，$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}>2$，$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}>2$，

则需a、b、c为互不相等的正数，

这就靠拢了“已知”．

以上各步均可逆，故原命题成立。

例 3．若$a>b>c>0$．

求证：$a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$．

证明：欲证 $a^{2a}b^{2b}c^{2c}>a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$成立，

只须证 $\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}>1$，

即证 $a^{2a-(b+c)}b^{2b-(c+a)}c^{2c-(a+b)}>1$，

即要证 $\frac{a^{a-b}b^{b-c}c^{c-a}}{a^{c-a}b^{a-b}c^{b-c}}>1$，

只须证 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1$，

$\because$ $\frac{a}{b}>1$，$\frac{b}{c}>1$，$\frac{a}{c}>1$，$a-b>0$，$b-c>0$，

$a-c>0$．

故有 $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1$，$\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}>1$，$\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}>1$，

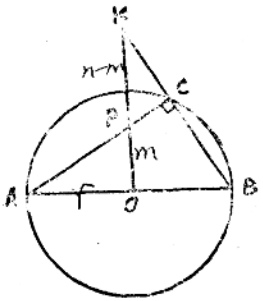
以上各步均可逆，故原命题成立。

例 4．已知AB是$\odot O$的直径，C为圆上任一点，OK

$\perp AB$交AC于P、交BC延长线于K，$AO=r$，$OP=m$，$OK=n$。

求证：$\lg m$、$\lg r$、$\lg n$成等差数列。

证明：若$\lg m$、$\lg r$、$\lg n$成等差数列，



则须　$2\lg r=\lg m+\lg n$成立，

即　　$\lg r^2=\lg(mn)$，$r^2=mn$，

$r:m=n:r$成立，

则须　$\triangle AOP\backsim\triangle BOK$；

因为在$\triangle AOP$与$\triangle BOK$中，

$\angle AOP=\angle BOK=90°$，

$\angle OAP=\angle OKB$，

$\therefore$　$\triangle AOP\backsim\triangle BOK$。

因为以上各步均可逆，

故　$\lg m$、$\lg r$、$\lg n$成等差数列。

综合法是从已知到未知的推理方法。即从已知条件出发，根据学过的有关性质、定理、公理、公式等，逐步推出所求的结论。在由“已知”想“可知”，逐步靠拢“未知”的过程中，“可知”往往不止一个，而是有关联的多个，它们并不一定都是证明题目所需要的，因此在证明过程中，对“可知”要逐个分析、比较和选择，才能找到通往“未知”的途径。

综合法可简单概括为“由因导果”，或通俗地比喻为“顺藤摸瓜”。

例5．求证：$\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$。

证明：$\because$　$15<16$，

$\therefore$　$\sqrt{15}<4$，

则　$2\sqrt{15}<8$，

∴　$8+2\sqrt{15}<16$，

即　$3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+5<16$，

∴　$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2<16$。

故　$\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$。

例6．设a、b、c为互不相等的正数。

求证：$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>9$。

从"已知"想"可知"

∵　a、b、c是互不相等的正数，

∴　$(a-b)^2>0$，$(b-c)^2>0$，$(c-a)^2>0$，

则　$a^2+b^2>2ab$，$b^2+c^2>2bc$，$a^2+c^2>2ac$。

逐步靠拢"未知"：

观察要证的不等式是分式不等式，故需将上述三个不等式变为：

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2,\quad \frac{c}{b}+\frac{b}{c}>2,\quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a}>2.$$

上面三式两端分别相加，得

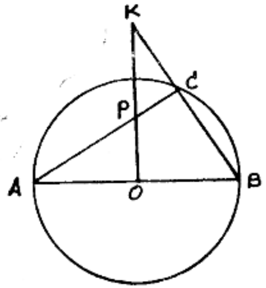
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+1>9,$$

则　$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}>9,$$

故　$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>9.$$

例7．题同例4．

证明：∵　$OK\perp AB$，



$\therefore \quad \angle AOP = \angle BOK = 90°$,

又 $\quad \angle OAP = \angle BKO$,

$\therefore \quad \triangle AOP \backsim \triangle BOK$.

$\therefore \quad OA : OK = OP : OB$,

即 $\quad r : n = m : r$,

$\therefore \quad r^2 = mn$,

又 $\quad r$、m、n均为正数。

$\therefore \quad \lg r^2 = \lg mn$,

即 $\quad 2\lg r = \lg m + \lg n$,

故 $\lg m$、$\lg r$、$\lg n$为等差数列.

综上所述，分析法思维简明，综合法结构严谨完善．两者相比，分析法思维的方向性强一些．由结论出发寻求结论成立的条件时，自然要产生一些联想或猜想；由已知靠拢未知时，头绪多，发散性强，因此不易找准合理正确的途径．所以遇到具体问题时，使用分析法可使隐藏在数式之间的某些内在关系明显的暴露出来，因而较易探求出解题途径，再用综合法叙述解题过程．

恩格斯曾说：没有分析就没有综合。分析法和综合法不能绝对分开，分析与综合是相比较而存在的，它们既是对立的，又是统一的；分析是为了综合，综合又须依据分析，因而有时在一个命题的论证中，往往同时应用两种方法。

例 8．已知：a、b、c、d均为正数．

求证：$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

分析：欲证$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$成立，

即证 $\quad (a+c)(b+d) \geqslant ab + cd + 2\sqrt{abcd}$成立，

即证 $\quad bc + ad \geqslant 2\sqrt{abcd}$成立，

亦即证　$bc+ad-2\sqrt{abcd}=(\sqrt{bc}-\sqrt{ad})^2$成立。

证明：$\because$　a、b、c、d均为正数，

$\therefore$　$(\sqrt{bc}-\sqrt{ad})^2\geqslant 0$。

即　$bc+ad\geqslant 2\sqrt{abcd}$，

$\therefore$　$ab+cd+bc+ad\geqslant ab+cd+2\sqrt{abcd}$，

$\therefore$　$(a+c)(b+d)\geqslant(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2$，

故　$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$。

例9．若$\sin\alpha+\cos\alpha=1$，求证：$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1$。

分析：欲证　$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1$，

由　$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)$

$=\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$

$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$，

故只须证　$3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0$。

证明：$\because$　$\sin\alpha+\cos\alpha=1$，

两边平方，化简整理，得

$\sin\alpha\cos\alpha=0$，

$\therefore$　$3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=0$。

给　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$两边同时立方，得

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=1$，

$\therefore$　$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$，

而　$3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=0$，

故　$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1$。

例10．若n为大于1的正整数。

求证：$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>n2^{\frac{n-1}{2}}$.

分析：$\because\quad C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1$.

故只须证　$2^n-1>n2^{\frac{n-1}{2}}$.

证明：$\because\quad \dfrac{2^n-1}{2-1}=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1$

$$>n\cdot\sqrt[n]{2^{n-1}\cdot2^{n-2}\cdots2^2\cdot2\cdot1},$$

$\therefore\quad 2^n-1>n\cdot\sqrt[n]{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}=n2^{\frac{n-1}{2}}$.

又$\because\quad C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-1$,

故　$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>n2^{\frac{n-1}{2}}$.

例11. 斜边为AB的直角三角形ABC，过A作$AP\perp$平面ABC．且$AP=AB=2$，$AE\perp PB$交于E，$AF\perp PC$交于F．求证：$PB\perp$平面AEF，$AF\perp EF$．

分析：要证$PB\perp$平面AEF，只要$PE\perp EF$，$\angle PEF=\angle PCB=90°$，就是要证$E$、$F$、$C$、$B$四点共圆．

证明：$\because\quad PA\perp$平面ABC,

$\therefore\quad PA\perp AB$，$PA\perp AC$；

又　$AE\perp PB$，$AF\perp PC$,

在$Rt\triangle PAC$中，$PA^2=PF\cdot PC$；

在$Rt\triangle PAB$中，$PA^2=PE\cdot PB$,

$\therefore\quad PF\cdot PC=PE\cdot PB$.

因此　E、F、C、B四点共圆,

$\therefore\quad \angle PEF=\angle PCB$；

又　$PA\perp$平面ABC，$BC\perp AC$,

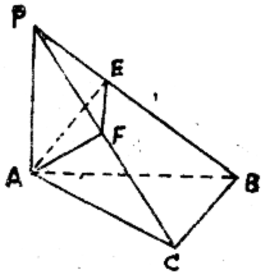
$\therefore\quad BC\perp PC$，$\angle PEF=\angle PCB=90°$,

$\therefore\quad PE\perp EF.$

又　$PB\perp AE$,

故　$PB\perp$平面AEF.

$\because$　PF在平面AEF上的射影是EF,



由已知　$AF\perp PF$,

故　$AF\perp EF$.

有些较复杂的题目，常常是从条件和结论同时推证，一边顺推，一边逆导，从两头夹击而求得问题的解决。

例12. 证明对于任意的实数t，复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$的模$r=|z|$适合$r\leqslant\sqrt[4]{2}$ $(t\in R)$。

证明：（顺推）$\because z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$,

$$\therefore\quad r=|z|=\sqrt{(\sqrt{|\cos t|})^2+(\sqrt{|\sin t|})^2}$$

$$=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}.$$

（逆导）要证对于任意实数t，有$r\leqslant\sqrt[4]{2}$,

只要证对于任意实数t，有$|\cos t|+|\sin t|\leqslant\sqrt{2}$,

即有$|\cos t|^2+|\sin t|^2+2|\cos t|\cdot|\sin t|\leqslant 2$,

即　$1+2|\cos t|\cdot|\sin t|\leqslant 2$.

（顺推）事实上，

$\because$　$|\sin 2t|\leqslant 1$,

$\therefore$　$1+|\sin 2t|\leqslant 2$对于实数t总成立。

因为以上逆导各步均可逆，

所以对于任意实数t都有$|\cos t|+|\sin t|\leqslant 2$成立，即$r\leqslant\sqrt[4]{2}$。