期货
套期保值的统计分析

林孝贵 著

qihuo taoqi baozhi de tongji fenxi

中国矿业大学出版社

期货套期保值的统计分析

林孝贵 著

中国矿业大学出版社

内容提要

本书用数理统计的方法分析期货套期保值策略，其中包括期货套期保值的最小方差法和最小二阶矩法，期货套期保值的回归分析和最大概率分析，二重套期保值策略，期货套期保值的效用分析，期权套期保值和套期保值的风险价值(VaR)等内容。在各种方法中，讨论了套期比的确定，分析套期保值的收益和风险，套期保值效果的评价等问题。套期者可以应用这些理论对期货套期保值策略进行数量分析，以提高收益和降低风险。

本书可供具有一定数学基础的从事证券、期货、营销和财务管理人员阅读，也可作为高校金融、财经、管理和数理统计等专业的研究生、本科生、学者以及从事金融行业的专业人才的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

期货套期保值的统计分析/林孝贵著．—徐州：中国矿业大学出版社，2004.1

ISBN 7-81070-851-1

Ⅰ．期…　Ⅱ．林…　Ⅲ．期货交易—统计分析　Ⅳ．F830.9

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第119935号

书　　名　期货套期保值的统计分析
著　　者　林孝贵
责任编辑　何　戈
责任校对　杜锦芝
出版发行　中国矿业大学出版社
(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008)
排　　版　中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷　中国矿业大学印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　850×1168 1/32　**印张** 6.625　**字数** 252 千字
版次印次　2004年1月第1版　2004年1月第1次印刷
印　　数　1～3100册
定　　价　20.00元

序

在过去的计划经济体制下,我国的商品市场是封闭的,决定商品价格的主要因素是行政指令,无论国际市场怎样变化,商品价格怎样波动,国内市场总可以保持相对稳定状态,国内生产、加工、销售和消费企业都是在国家计划价格基础上获得预期的经济收益的。随着我国经济体制由计划经济向市场经济过渡,国内市场逐步与国际市场接轨,决定商品价格的主要因素是市场,商品的价格由于市场因素而剧烈变化,这给企业带来巨大的风险。目前,越来越多的生产企业和贸易公司在经营实践中逐渐认识到利用期货市场进行套期保值的好处,即利用套期保值策略规避或减少商品价格波动的风险。我国很多企业进入国际和国内期货市场从事套期保值运作,参与期货市场交易。经过多年的实践,不少企业充分体会到在期货市场进行套期保值的必要性。

然而,世上没有免费的午餐。期货市场交易风险巨大,套期保值本身也存在着风险。有些大型企业,虽然具有丰富的期货交易经验,但也曾发生过巨大风险事件。因此,我们必须清楚地认识到,套期保值可以创造获利的机会,但也会带来风险。所以,怎样设计合理的套期保值方案,最大限度地减少风险,同时也最大限度地保证企业的收益,这是亟待我们去探索、解决的问题。

为了解决这一问题,需要很好地进行数量分析。目前,对这一问题的研究还不够深入,大多数学者仅用一些朴素的数理方法进行分析。本书作者把中值建立在数理统计的基础上,用数理统计的方法对套期保值进行分析,使投资者更加灵活、更加可靠地应用套期保值策略规避经营风险,保证收益,把企业经营得更好,这是一件很有意义的工作。

本书作者长期从事数理统计和金融工程方面的研究,具有扎实的理论基础,能够正确地应用数理统计方法处理、解决相关的实际问题。在深入研究的

基础上，作者对套期保值做了系统分析。用随机变量的数字特征，建立数学模型，求出最优套期比，用最优套期比设计套期保值策略，还导出了评价套期保值策略的各种统计指标，并且用 VaR 方法对套期保值风险进行管理。同时，在理论上做了一些创造性的研究工作，如期货套期保值的最小二阶矩方法；一重套期保值、二重套期保值和贡献率；逐步组合套期保值的理论与方法；期货套期保值的风险系数和最大概率分析等。为了检验所得到的理论，并且把方法运用于实际，作者还结合企业实际举例分析。最后，还分析了用期权作为工具进行套期保值及组合套期保值。

本书的出版无论是对套期保值的研究，还是对数理统计应用的研究，都有积极意义。数理统计还有很丰富的理论和方法，希望作者继续努力，把工作做得更深入，在数理统计和金融工程的研究中作出更大的贡献。

王炜炘

2003 年 12 月于广西师范大学

前　言

随着我国从计划经济转向市场经济,我国的企业已经走向市场。在市场中,商品的价格是变化的,所以企业在销售产品和采购原材料等方面都面临着商品价格波动的风险。这种风险会直接影响企业的正常生产经营活动,在制定生产计划时,企业可能是盈利的,但是到产品生产出来时,企业可能是亏损的。我国已经加入 WTO,企业更要面对全球经济一体化的趋势和加入 WTO 的挑战,所以,商品价格波动的风险就更加突出。但是,我国正在逐步建立期货市场,国外早就有成熟的期货市场,如果企业利用期货市场进行套期保值,就可以规避这种价格风险。然而,怎样应用好套期保值策略?这是一件不容易的事。所以,研究套期保值问题是很重要的,而且是非常迫切的。而我国在 20 世纪 90 年代才开始研究期货套期保值问题,大多数都停留在直观描述上,很少进行数量分析。有些企业也在利用期货市场进行套期保值,但大多数都是凭感觉,缺乏系统的数量分析指导,有时造成巨大损失。所以,对套期保值进行数量分析的书籍就显得特别重要。从国外的发展来看,由于人们使用计算机作为工具,处理数据、信息的能力大大提高,因此迫切需要一种处理大量数据的技术,促进套期保值策略的更加成熟,于是把一些近代的统计方法用于分析套期保值问题也就变得非常迫切。

笔者这几年在这一领域做了一些研究,用数理统计的方法对套期保值策略进行分析,并且主持了广西教育厅管理科学高校科研课题"二重期货套期保值策略的统计分析"的研究,已完成了该项目的专题研究报告,发表论文 20 余篇。现在对这些研究进行整理、总结,写成这本书,以供需要对套期保值进行数量分析的人们参考。

本书内容分为九章,第一章是统计基础,介绍统计分析涉及到的概念、方

法和技巧等；第二章是期货套期保值概述，介绍套期保值的作用、概念、分类、经济原理、基差和评价方法等；第三章是期货套期保值最小方差法，介绍用方差来度量风险，寻找方差（风险）最小的套期保值策略；第四章是套期保值回归分析，介绍套期比的参数估计、假设检验，参加保值的每种期货对套期保值的贡献率和逐步组合套期保值策略等内容；第五章是二重套期保值，介绍企业既对购买原材料保值，同时又对销售产品保值的二重套期保值策略；第六章是期货套期保值的最小二阶矩方法，分析最小方差法存在的缺陷，提出了用二阶矩方法度量套期保值风险，研究使二阶矩最小的套期保值策略；第七章是期货套期保值的效用分析，介绍在套期者对套期保值收益有不同态度的情况下，对期货套期保值进行分析；第八章是套期保值的风险价值（VaR），介绍用风险价值的方法对套期保值风险进行分析，包括 VaR 的计算方法、边际 VaR、成分 VaR、增量 VaR 和条件 VaR 等内容；第九章是期权套期保值，介绍以期权作为避险工具，对现货进行套期保值。

期货套期保值是属于金融工程的内容，而金融工程是 20 世纪 90 年代初才兴起的新兴综合性学科，有许多问题有待我们进一步深入研究。本书试图用数理统计的方法分析套期保值的问题。由于本书是一本尝试性的书，不足和错误在所难免，真诚希望广大读者对书中的错误批评、指正并提出宝贵的意见。

在本书的写作过程中，我的导师广西师范大学王炜炘教授、王成名教授和上海财经大学张尧庭教授一直给予帮助和支持。在出版过程中，获得广西省教育厅高校科研项目基金的资助和中国矿业大学出版社的帮助，在此一并致以衷心的感谢。

林孝贵

2003 年 11 月于广西工学院管理工程系

目　录

第1章 统计基础

为了本书后面分析的需要,本章介绍一些常用的线性代数知识和统计知识,包括投影矩阵、矩阵四块逆公式、常用的概率分布和回归分析等。

1.1 矩阵与二次型

1.1.1 对称矩阵

方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称的,如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$。对一个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$,任给一个向量 x,$x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$ 就是 x 的一个齐次二次函数,把它称为 $\boldsymbol{A}$ 所相应的二次型。如果对任给的 x,$\boldsymbol{A}$ 的二次型 $x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x$ 恒不取负值,即 $x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x\geqslant 0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是非负定的。对非负定的矩阵 $\boldsymbol{A}$,如果有 $x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x=0$ 当且仅当 $x=0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 是正定的。为了方便,今后用 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 是非负定的,用 $\boldsymbol{A}>0$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 是正定的,$\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\geqslant 0$,$\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}>0$。

1.1.2 对称矩阵的谱分解

如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 p 阶对称矩阵,则存在 $\boldsymbol{A}$ 的 p 个特征向量 r_1,$r_2,\cdots,r_p$,使得

$$r_i^{\mathrm{T}}r_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

设 $r_1,r_2,\cdots,r_p$ 相应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$。记

$$\boldsymbol{P}=(r_1,\cdots,r_p),$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{pmatrix}$$

则有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PD}$，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}_p$，于是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{-1}$，且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{D} \tag{1-1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{PDP}^{-1}=\boldsymbol{PDP}^{\mathrm{T}}\\ &=(r_1,\cdots,r_p)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ r_p^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\\ &=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i r_i r_i^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{1-2}$$

(1-1)、(1-2)式都称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱分解式。其中，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根，$\boldsymbol{P}=(r_1,\cdots,r_p)$是相应特征向量所组成的正交矩阵。

1.1.3 非负定矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是 p 阶非负定矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{pmatrix}$。对任给的 x，取 $y=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}x$，则

$$\begin{aligned}x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x&=x\boldsymbol{PP}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{APP}^{\mathrm{T}}x\\ &=y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p\end{pmatrix}y\\ &=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i y_i^2\end{aligned}$$

于是有：

(1) $A\geqslant 0$ 当且仅当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 非负;

(2) $A>0$ 当且仅当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 均为正数。

若 A 是秩为 r 的非负定矩阵,则

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}$$

$$=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}$$

取 $L=P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}$,则有 $L^{\mathrm{T}}=L,A=L^{\mathrm{T}}L=L^2$。

反之,对任给的 x,由于 $A=L^{\mathrm{T}}L$,则 $x^{\mathrm{T}}Ax=x^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}Lx\geqslant 0$。于是有:

(3) $A\geqslant 0$ 当且仅当存在 p 阶矩阵 L,使 $L^{\mathrm{T}}=L,A=L^{\mathrm{T}}L$。此时,记 $A^{\frac{1}{2}}=L$。

1.1.4 二次型的不等式

(1) Cauchy−Schwarz(C−S)不等式。

对任意两个实数向量 x,y,恒有

$$(x^{\mathrm{T}}y)^2\leqslant(x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}y)$$

当且仅当存在实数 λ 与 μ 使 $\lambda x+\mu y=0$ 时等号成立。

因为对关于 λ 与 μ 的二次型

$$(\lambda x+\mu y)^{\mathrm{T}}(\lambda x+\mu y)=\lambda^2x^{\mathrm{T}}x+2\lambda\mu x^{\mathrm{T}}y+\mu^2y^{\mathrm{T}}y\geqslant 0$$

所以应用初等代数的知识，二次型的判别式大于或等于零，即

$$\begin{vmatrix} x^{\mathrm{T}}x & y^{\mathrm{T}}x \\ y^{\mathrm{T}}x & y^{\mathrm{T}}y \end{vmatrix} \geqslant 0 \text{ 或} (x^{\mathrm{T}}y)^2 \leqslant (x^{\mathrm{T}}x)(y^{\mathrm{T}}y) \tag{1-3}$$

且当行列式等于零时，(1-3)式的等号成立。而当第一行与第二行线性相关时，行列式等于零。即存在 λ 与 μ，使得 λ 乘第一行加 μ 乘第二行等于 0。即

$$\lambda x^{\mathrm{T}}x + \mu y^{\mathrm{T}}x = 0$$
$$\lambda y^{\mathrm{T}}x + \mu y^{\mathrm{T}}y = 0$$
$$(\lambda x + \mu y)^{\mathrm{T}}\lambda x = 0$$
$$(\lambda x + \mu y)^{\mathrm{T}}\mu y = 0$$

因此 $(\lambda x+\mu y)^{\mathrm{T}}(\lambda x+\mu y)=0$，即 $\lambda x+\mu y=0$。

(2) 设 x,y 是两个向量，$\boldsymbol{A}$ 是非负定矩阵，则存在 $\boldsymbol{L}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$。取 $u=\boldsymbol{L}x, v=\boldsymbol{L}y$，并对 u 与 v 应用C-S不等式有

$$(x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}y)^2 \leqslant (x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x)(y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}y) \tag{1-4}$$

(3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则在 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$ 中，$\boldsymbol{L}$ 也可逆，取 $u=\boldsymbol{L}x, v=(\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})^{-1}y$，就有 $x^{\mathrm{T}}y=u^{\mathrm{T}}v$，再对 u 与 v 应用C-S不等式有

$$(x^{\mathrm{T}}y)^2 \leqslant (x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x)(y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}y) \tag{1-5}$$

且对任意实数 α，当 $x=\alpha\boldsymbol{A}^{-1}y$ 时，上式等号成立。

(4) 如果设 f 与 g 是定义于某个集 B 上的实函数，f^2 与 g^2 关于测度 v 可积，考虑关于 λ 与 μ 的非负二次型

$$\int_B (\lambda f + \mu g)^2 \mathrm{d}v = \lambda^2 \int_B f^2 \mathrm{d}v + 2\lambda\mu \int_B fg \mathrm{d}v + \mu^2 \int_B g^2 \mathrm{d}v$$

所以根据二次型的判别式大于或等于零得到

$$\left(\int_B fg\mathrm{d}v\right)^2 \leqslant \int_B f^2 \mathrm{d}v \int_B g^2 \mathrm{d}v$$

这就是C-S不等式的积分形式。特别地，若 v 是概率测度，则有：

$$[E(xy)]^2 \leqslant E(x)^2 E(y)^2$$

$$[\mathrm{Cov}(x,y)]^2 \leqslant \mathrm{Var}(x)\mathrm{Var}(y)$$

其中,x 与 y 是随机变量,E、Var 与 Cov 分别表示期望、方差和协方差。

1.1.5 二次型的极值

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 p 阶正定矩阵,u 是一个已知的 p 维向量,则对任何 p 维向量 x,应用(1-5)式有:$(u^{\mathrm{T}}x)^2 \leqslant (x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x)(u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}u)$。于是有

$$\max_{x\neq 0}\frac{(u^{\mathrm{T}}x)^2}{x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x} = u^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}u \tag{1-6}$$

而且,当 $x=\alpha\boldsymbol{A}^{-1}y$($\alpha$ 是任意非零实数)时到最大值。

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 p 阶非负定矩阵,$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根,而 $r_1, r_2, \cdots, r_p$ 是对应的特征向量。从(1-2)式所列的谱分解式有

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i r_i r_i^{\mathrm{T}},$$

$$I = \sum_{i=1}^{p} r_i r_i^{\mathrm{T}}$$

由于 $r_1, r_2, \cdots, r_p$ 已是 p 维欧氏空间的一组标准正交基,所以对任何 p 维向量 x 都可以表示为 $x=\sum\limits_{i=1}^{p} a_i r_i$,于是有

$$\frac{x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x}{x^{\mathrm{T}}x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{p} a_i^2}$$

利用上面的等式,就得到下面的结论

$$\max_{x\neq 0}\frac{x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x}{x^{\mathrm{T}}x} = \lambda_1 \tag{1-7}$$

$$\min_{x\neq 0}\frac{x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x}{x^{\mathrm{T}}x} = \lambda_p \tag{1-8}$$

1.1.6 矩阵四块逆公式

设 A 是 p 阶可逆方阵，把 A 分成四块，即

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} r \\ p-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & p-r \end{array} & \end{array}$$

(1) 若 A_{11} 可逆，则有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}A_{12} \\ -I \end{pmatrix} B^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1} \quad -I) \tag{1-9}$$

其中 $B = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$，$I$ 是 $p-r$ 阶单位阵。

(2) 同理，若 A_{22} 可逆，则有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I \\ A_{22}^{-1}A_{21} \end{pmatrix} D^{-1}(-I \quad A_{12}A_{22}^{-1}) \tag{1-10}$$

其中 $D = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$，$I$ 是 r 阶单位阵。

我们把(1-9)和(1-10)式称为矩阵四块逆公式。

比较(1-9)和(1-10)式中右端两表达式左上角的子块，将 A_{11}，A_{22}，A_{12}，A_{21} 分别写成 F，G，H，K，还有以下结论：

(3) 如果 F^{-1}，G^{-1} 存在，则当 $(F-HG^{-1}K)^{-1}$ 存在时，就有

$$(F - HG^{-1}K)^{-1}$$

$$= F^{-1} + F^{-1}H(G - KF^{-1}H)^{-1}KF^{-1} \tag{1-11}$$

(4) 如果 $G=I$，则有

$$(F - HK)^{-1}$$
$$= F^{-1} + F^{-1}H(I - KF^{-1}H)^{-1}KF^{-1} \tag{1-12}$$

(5) 如果 $H=u, K=v^{\mathrm{T}}$，则有

$$(F - uv^{\mathrm{T}})^{-1} = F^{-1} + \frac{1}{1 - v^{\mathrm{T}}F^{-1}u}F^{-1}uv^{\mathrm{T}}F^{-1} \tag{1-13}$$

1.1.7 投影矩阵

(1) 投影矩阵的概念。我们用 L 表示欧氏空间 R_n 的线性子空间，用 $L(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量所生成的线性子空间，即

$$L(\boldsymbol{A}) = \{\underset{n\times p}{\boldsymbol{A}}\, x \mid x \in R^p\}$$

用 $\boldsymbol{P}_A$ 表示在线性空间 $L(\boldsymbol{A})$ 上的投影矩阵，简称为 $\boldsymbol{A}$ 的投影矩阵。

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是满列秩的，即 $rk(\boldsymbol{A})=p$，则线性空间 $L(\boldsymbol{A})$ 上的投影矩阵是 $\boldsymbol{P}_A=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

因为对任何 $y\in L(\boldsymbol{A})$，有 $y=\boldsymbol{A}x$，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_A y &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}y \\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x \\ &= \boldsymbol{A}x = y \end{aligned}$$

对任何 $y\perp L(\boldsymbol{A})$，有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}y=0$，则

$$\boldsymbol{P}_A y = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}y = 0$$

这就证明了 $\boldsymbol{P}_A=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是线性空间 $L(\boldsymbol{A})$ 上的投影矩阵。

(3) 两次投影公式。设 $\underset{n\times p}{\boldsymbol{A}}=(\underset{r}{\boldsymbol{A}_1}\quad \underset{p-r}{\boldsymbol{A}_2})$，且 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_1$ 都是满列秩的，即 $rk(\boldsymbol{A})=p, rk(\boldsymbol{A}_1)=r$，则有两次投影公式

$$\boldsymbol{P}_A = \boldsymbol{P}_{(A_1\ \ A_2)} = \boldsymbol{P}_{A_1} + \boldsymbol{P}_{(I-P_{A_1})A_2} \tag{1-14}$$