主编 王 林

初中数学
升学与竞赛指导

青岛出版社

初中数学升学与竞赛指导

王　林　主编

青　岛　出　版　社

鲁新登字08号

主　　编　王　林

编　　委　王　林　李盛彦　臧德运　孙相武　孙立灏

毕圣初　彭胜涛　黄梅竹　黄瑞显

审　　订　臧德运　李盛彦　邓锡成

责任编辑　戚道浚

封面设计　董　伟

初中数学升学与竞赛指导

王　林　主　编

青岛出版社出版
（青岛市徐州路77号）
新华书店北京发行所发行
平度大众报社印刷厂印刷

1990年3月第1版　　1992年2月第3次印刷
32开本（787×1092毫米）12.75印张　270千字
印数10251—30370
ISBN7—5436—0440—X/G　G.257
定价：3.95元

前　　言

数学是学习和研究现代科学技术必不可少的基础知识和基本工具。它在我国的改革开放、四化建设中具有十分重要的作用。为使学生掌握好初中数学内容，激发学习兴趣，发展智力，培养能力，我们组织编写了这本书。

全书按知识系统分13章。每章分A、B两组，各组包括基础知识、典型例题和习题三部分内容。基础知识力求简明扼要，涉及内容要点及所需掌握的概念、定理；典型例题指出了解题的思路、方法与技巧，一些题目还给了多种解法。A组习题以大纲为依据，以课本内容为范围，参照教学要求的说明，围绕各章节知识点而编写。题型力求多样化、标准化，有较大的覆盖面。可用于学生平时学习时参考，亦可用于升学复习指导。B组题主要是为学有余力的学生而编写，目的在于能使他们的数学能力得到充分发展，拓宽所学知识，充实数学第二课堂活动，以便适应中学数学竞赛的需要。可供学生参加县、市、全国初中数学竞赛训练之用。

书后附有《数学竞赛知识简介》、《A组题自测题（一）（二）、（三）》及1986年—1989年全国初中数学竞赛试题。最后是各章A组、B组习题及附录中习题的解答和提示。特别是B组题因难度较大，答案中均做了较详细的解答。总之，这本书的特点是：A组题重在基础，B组题重在能力。

由于水平所限，书中难免有缺点错误。欢迎读者提出宝贵意见。

编　者

1990.1

目　　录

第一章　数与式

一　常用基本概念

（一）实数

1.实数分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数（包括有限小数与无限循环小数）}\end{cases}\\ \text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}$$

2.奇数和偶数：不能被 2 整除的整数叫做奇数，能被 2 整除的整数叫偶数。奇数一般表示为 $2n-1$，偶数一般表示为$2n$，其中n为整数。

3.质数与合数：只能被 1 和它本身整除的自然数叫做质数。（又叫素数）。除了能被 1 和它本身整除外，还能被其它整数整除的自然数，叫做合数。 1 既不是质数；也不是合数； 2 是最小的质数，也是唯一的偶质数。

4.互质：如果两个自然数的最大公约数是 1 ，那么这两个自然数叫互质。

5.绝对值：在数轴上表示一个数的点到原点的距离，叫做这个数的绝对值，a的绝对值可表示成

$$|a|=\begin{cases} a\ (a>0) \\ o\ (a=0) \\ -a\ (a<0). \end{cases}$$

6.稠密性：有理数、实数都具有稠密性，就是任何两个有理数或实数之间总还存在着另一个有理数或实数。而整数就没有这个性质。

7.连续性：实数具有连续性，就是实数和数轴上的点能建立一一对应关系，而有理数就没有这个性质。

8.顺序性：实数具有顺序性。就是任何两个实数可以比较它们的大小。

（二）代数式

1.代数式：用运算符号（加、减、乘、除、乘方、开方）把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式。

2.代数式的值：用数值代替代数式里的字母，并且按照指定的顺序进行计算所得到的结果，叫做代数式的值。

求代数式的值时，一般应先将原代数式化简，然后把数值代入，求出代数式的值。

3.代数式的分类：

$$\text{代数式}\begin{cases} \text{有理式}\begin{cases} \text{整式}\begin{cases} \text{单项式} \\ \text{多项式} \end{cases} \\ \text{分式} \end{cases} \\ \text{无理式：根式} \end{cases}$$

4.有理式：只含有加、减、乘（乘方）、除、四种运算的代数式叫有理式。

5.整式：除式中不含变数的有理式叫整式。没有加减运算的整式叫单项式，若干个单项式的代数和叫多项式。

6.分式：除式中含有变数的有理式叫分式。（分式的分母不能为零，否则分式无意义。）

7.无理式；根号内含有变数字母的代数式，叫无理式。

8.单项式与多项式的次数：

单项式中所有变数字母的指数和，叫做单项式的次数。

多项式中，次数最高的项的次数，叫做这个多项式的次数。

9.常用计算公式：

（1）幂的运算法则：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\quad a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$$

$$(a^m)^n = a^{mn},\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

（2）乘法公式：

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

10.因式分解的定义

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解，也可以叫做分解因式。

因式分解的方法：

（1）提取公因式法；（2）运用公式法；

（3）十字相乘法；（4）分组分解法；

（5）拆项，添项法；（6）待定系数法；

（7）多项式除法。

二 A组范例

例1 计算：$3.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+4\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\right]$

解： 原式 $=3\frac{3}{4}-\left[-\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right]$

$=3\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}$

$=-1\frac{1}{12}$

例2 计算：$-0.75^2\div\left(-1\frac{1}{2}\right)^3+(-1)^{12}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$

解： 原式 $=-\left(\frac{3}{4}\right)^2\div\left(-\frac{3}{2}\right)^3+1\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$

$=-\frac{9}{16}\times\left(-\frac{8}{27}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^2$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$

例3 把下列各式分解因式：

（1）$5(x-y)^3+10(y-x)^2$；

（2）$\frac{4}{9}m^2-0.01n^2$；

（3）$3x^2+11x+10$；

（4）$a^3+a^2b-ab^2-b^3$。

解：（1）$5(x-y)^3+10(y-x)^2$

$=5(x-y)^2(x-y)+5(x-y)^2\cdot 2$

$=5(x-y)^2[(x-y)+2]$

$=5(x-y)^2(x-y+2)$

（2）$\frac{4}{9}m^2-0.01n^2=(\frac{2}{3}m)^2-(0.1n)^2$

$=(\frac{2}{3}m+0.1n)(\frac{2}{3}m-0.1n)$

（3）$3x^2+11x+10$。

∵

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 2 \\ 3 & & 5 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{3\times 2+1\times 5=11} \end{array}$$

$\therefore 3x^2+11x+10=(x+2)(3x+5)$

（4）$a^3+a^2b-ab^2-b^3=a^2(a+b)-b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2-b^2)=(a+b)^2(a-b)$

例4 计算下列各式：

（1）$x+|x|$；（2）$(x-1)+|x-1|$；

（3）$|2+x|+|x-2|$

解：（1）当$x\geqslant 0$时，$x+|x|=x+x=2x$

当$x<0$时，$x+|x|=x-x=0$

（2）当$x\geqslant 1$时，$(x-1)+|x-1|$

$=x-1+x-1=2x-2$

当$x<1$时，$(x-1)+|x-1|$

$=x-1+1-x=0$。

（3）当$x\geqslant 2$时，$|2+x|+|x-2|$

$=2+x+x-2=2x$

当$-2<x<2$时，$|2+x|+|x-2|$

$=2+x+2-x=4$

当$x\leqslant -2$时，$|2+x|+|x-2|$

$=-2-x+2-x=-2x$。

例5 当a是什么整数时，方程$(a+1)x=4x+3$的解满足下列条件：

（1）自然数；（2）整数；（3）正数；（4）负数；（5）不存在。

解：由原方程$(a+1)x=4x+3$得$(a-3)x=3$，

$\therefore x=\dfrac{3}{a-3}$

（1）若x为自然数，则$a-3=1$或$a-3=3$

$\therefore a=4 \quad a=6$

（2）若x为整数，则$a-3=1$，$a-3=-1$，$a-3=3$，$a-3=-3$，$\therefore a=4$、$a=2$、$a=6$、$a=0$

（3）若x为正数，则$\dfrac{3}{a-3}>0$即$a-3>0$，$\therefore a>3$。

（4）若x为负数，则$\dfrac{3}{a-3}<0$即$a-3<0$，$\therefore a<3$。

（5）若方程解$x=\dfrac{3}{a-3}$不存在，由分式意义知：

$a-3=0$，即$a=3$。

例6 化简根式：

（1）$\sqrt{5(1-\sqrt{2})^2}$　　（2）$\sqrt{\dfrac{2}{(3-\sqrt{10})^2}}$

解：（1）$\sqrt{5(1-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}\,|1-\sqrt{2}|$

$=\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)$

（2）$\sqrt{\dfrac{2}{(3-\sqrt{10})^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{|3-\sqrt{10}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}-3}$

$=\sqrt{2}(\sqrt{10}+3)$

例7 化简：

（1）$\sqrt{X^2-2X+1}+\sqrt{X^2-6X+9}\ (\frac{3}{2}<X<\frac{5}{2})$；

（2）$\sqrt{(\sqrt{X-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{X-1}-1)^2}$

$(1\leqslant X<2)$。

解：（1）原式 $=\sqrt{(X-1)^2}+\sqrt{(X-3)^2}$

$=|X-1|+|X-3|$

$=X-1+3-X=2$。

（2）原式 $=|\sqrt{X-1}+1|+|\sqrt{X-1}-1|$

$=\sqrt{X-1}+1+1-\sqrt{X-1}=2$。

例8 计算：

（1）$(3x^n y^{m+1})^2\cdot(-2x^{n+1}y^m)^3$；（m、n是正整数）

（2）$[(a^{-\frac{2}{3}}b^2)^{-1}\cdot(ab^{-3})\cdot(b^{\frac{1}{2}})^7]^{\frac{1}{3}}$；

（3）$\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{2a\sqrt[6]{a}}$.

解：（1）原式 $=3^2x^{2n}y^{2(m+1)}\cdot(-2)^3x^{3(n+1)}y^{3n}$

$=9\times(-8)\cdot x^{2n+3n+3}y^{2m+2+3m}$

$=-72x^{5n+3}y^{5m+2}$.

（2）原式 $=\left[a^{\frac{2}{3}}b^{-2}\cdot ab^{-3}\cdot b^{\frac{7}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$

$=\left(a^{\frac{2}{3}+1}\cdot b^{-2-3+\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(a^{\frac{5}{3}}b^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{9}}b^{-\frac{1}{2}}$;

（3）原式 $=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{2a\cdot a^{\frac{1}{6}}}=\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1-\frac{1}{6}}$

$=\frac{1}{2}a^0=\frac{1}{2}$.

例9 用乘法公式计算：

（1）$(-a-2b)^2$;

（2）$(9a^4+3a^2+1)(3a^2-1)$;

（3）$(3x^2+4x+5)(3x^2-4x-5)$;

（4）$1027\div13$.

解：（1）原式 $=[-(a+2b)]^2=(a+2b)^2$

$=a^2+4ab+4b^2$;

（2）原式 $=[(3a^2)^2+1\times(3a^2)+1^2]$

$(3a^2-1)=(3a^2)^3-1^3=27a^6-1$;

（3）原式 $=[3x^2+(4x+5)][3x^2-(4x+5)]$

$=(3x^2)^2-(4x+5)^2=9x^4-(16x^2+$

$40x+25)=9x^4-16x^2-40x-25$;

（4）$\because 1027=1000+27=10^3+3^3$　而$13=10+3$

$\therefore 1027\div 13=(10^3+3^3)\div(10+3)$

$=(10+3)(10^2-10\times 3+3^2)\div(10+3)$

$=10^2-10\times 3+3^2=79$。

例10　求下列各式值：

（1）$\dfrac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}$；　　当$a=-3$，$b=\frac{1}{2}$时。

（2）$\dfrac{x^2+4xy-y^2}{x^2-3xy+y^2}$，　　当$3x=4y\neq 0$时。

解：（1）$\dfrac{3a^2-ab}{9a^2-6ab+b^2}=\dfrac{a(3a-b)}{(3a-b)^2}=\dfrac{a}{3a-b}$

当$a=-3$，$b=\frac{1}{2}$时，

$$原式=\frac{a}{3a-b}=\frac{-3}{-9-\frac{1}{2}}=\frac{-3}{-\frac{19}{2}}=\frac{6}{19}$$

（2）原式分子、分母同除以x^2变形为：

$\dfrac{1+4\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-3\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$，当 $3x=4y\neq 0$时，即$\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{4}$时；

$$原式=\frac{1+4\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-3\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{1+4\times\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1-3\times\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{1+3-\frac{9}{16}}{1-\frac{4}{9}+\frac{9}{16}}=\frac{16+48-9}{16-4\times9+9}=\frac{55}{-11}=-5$$

三　A组习题

（一）判断题

1. a为任意实数，均有 $a^0+a^{-1}=1+\frac{1}{a}$；　（　）

2. $(a^3)^2=a^3\cdot a^2$；　（　）

3. 在 $a<-b<1$ 条件下，$\frac{\sqrt{(a+b)^2}}{|b+1|}=\frac{a+b}{b+1}$；　（　）

4. $-a^4=(-a)^4$；　（　）

5. 若 $x\neq y$，则 $x^2\neq y^2$；　（　）

6. 无论a，b为何值，总有 $|a-b|=|b-a|$　（　）

7. $a+b$ 一定大于 $a-b$；　（　）

8. 在实数范围内，如果一个数不是负数，一定是正数；　（　）

9. 若 $\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$；　（　）

10. 若a表示负数，则 $-a$ 表示正数。　（　）

（二）填空题

1. 最小的自然数是________。最大的负整数是________。

最小的质数是________。

2.比 -9 大 5 的数是__________；比 -2 大 -6 的数是________；比 3 小 -8 的数是________。

3.（1）-3的倒数是$a-3$，则$a=$________；

（2）-2的相反数与$-\frac{3}{2}$的倒数之和为________。

4.$\frac{10}{9}$、$\frac{8}{7}$、$\frac{11}{10}$三数中以________最大；

$-\frac{14}{15}$、$-\frac{13}{14}$、$-\frac{12}{13}$、$-\frac{11}{12}$四数中以________最大。

5.（1）当$a=2$，$b=5$时，$\frac{a^2-b^2}{ab-1}=$__________；

（2）当$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$时，$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}=$________。

6.$1\frac{17}{64}$的平方根是________；算术根是________。

7.绝对值是 7 的数是________。

8.$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$中$x=$________无意义；$x=$__________值为零。

9.若$b>a>0$，则$-a$________$-b$。

10.若a^2+3取最小值，则$a=$________。

（三）选择题

1.下列说法正确的是（　　）。

（A）无限小数都是无理数；

（B）小数都是有理数；

（C）自然数可以分为质数和合数两大类；

（D）整数和分数统称有理数。

2．小于30的质数中，个位数为1的有a个；个位数为3的有b个；个位数为5的有c个；个位数为7的有d个；个位数为9的有e个．下列说法错误的是（　　）．

（A）$b>c$；（B）$b>d$；（C）$d>e$；（D）$d>a$。

3．$a-b=b-a$；　$(a-b)^2=(b-a)^2$；$(a-b)^2=-(b-a)^2$；$(a+b)(a-b)=(-a-b)(-a+b)$，以上等式中正确的有（　　）

（A）1个；（B）2个；（C）3个；（D）4个。

4．若a、b、c、k是正整数且$b=a+k$，$a=c+k$，则a、b、c的大小顺序为（　　）．

（A）$a>c>b$；　（B）$a>b>c$；

（C）$c>a>b$；　（D）$b>a>c$。

5．若a、b为负数；且$|a|<|b|$，则下列正确的式子是（　　）。

（A）$a<|b|$；（B）$|a|<b$；

（C）$a<b$；　（D）$-a<b$。

6．设$\frac{3}{11}-\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=a$，$(\frac{3}{11}-\frac{1}{2})\div\frac{3}{4}=b$则有（　　）。

（A）$a>b$；　（B）$a=b$；

（C）$a<b$；　（D）$a+b=0$。

7．若$|x|+|-7|>|x+(-7)|$则x可能是下列中的数（　　）。

（A）-2；（B）0；（C）2；（D）-3。