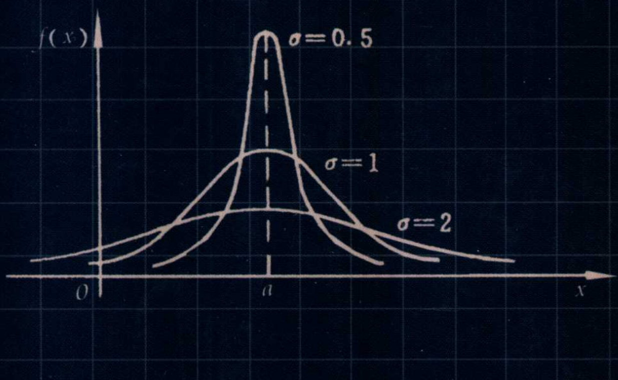
"十五"规划系列教材

SHI WU GUIHUA XILIE JIAOCAI

# HYDROLOGIC STATISTICS

# 水文统计学

黄振平 编著




河海大学出版社

河海大学"十五"规划系列教材

# 水文统计学

黄振平　编著

河海大学出版社

## 内 容 提 要

本书比较系统地介绍了水文学中常用的概率论与数理统计原理与方法，由概率论、数理统计、误差分析以及随机过程四部分组成。全书条理清晰，叙述简练通俗，循序渐进。书中例题较多，每章配有适量习题，书后还附有习题答案和常用数表，便于自学和应用。

本书可作为高等学校水文水资源、水利水电等专业的本科教材，也可供水文、水利、环境、海洋、气象、地理等专业的科技人员作参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

水文统计学/黄振平编著. —南京：河海大学出版社，2003.8

ISBN 7-5630-1897-2

Ⅰ.水… Ⅱ.黄… Ⅲ.水文统计 Ⅳ.P333.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第056342号

书　　名 / 水文统计学

书　　号 / ISBN7-5630-1897-2/TV·229

责任编辑 / 施　萍

出　　版 / 河海大学出版社

地　　址 / 南京市西康路1号(邮编:210098)

电　　话 / (025)83737852(总编室)

　　　　　(025)83722833(发行部)

经　　销 / 江苏省新华书店

印　　刷 / 丹阳教育印刷厂

开　　本 / 787毫米×960毫米　1/16

印　　张 / 24.25

字　　数 / 503千字

版　　次 / 2003年8月第1版

印　　次 / 2003年8月第1次印刷

定　　价 / 38.00元

# 前　言

本书是根据河海大学“十五”教材出版规划，依据新编水文与水资源工程专业的教学大纲编写的。主要作为高等院校水文与水资源工程及相关专业《水文统计》课程的本科教材，也可供水文、水利、环境、海洋、气象、地理等专业的科技人员作参考。

全书共11章，由概率论、数理统计、误差分析和随机过程四部分组成，全面系统地介绍了水文统计的基本原理和方法。本书的取材立足于水文工作的实际需要，在适当注意数学理论系统性的基础上，避免某些抽象的数学推理和繁琐的公式演绎，着重内容的实用性。本书编写力求结构合理，条理清楚，并注重概念的清晰正确，知识的系统完整，文字的通顺流畅，语言的简练易懂。书中举例较多，每章配有适量的习题，书后附有习题答案和常用数表，便于学习和应用。

本书由河海大学王俊德副教授审稿，水利部南京水利科学研究院沈福新高级工程师、河海大学朱元甡教授、芮孝芳教授、陈元芳教授、梁忠民教授以及刘治中副教授等专家学者审阅了书稿，并提出了许多宝贵意见，研究生侯云青参与了部分校对工作，在此，谨致以诚挚的谢意！

在编写过程中，本人参考了国内外很多著作和论文，在此谨向有关作者表示感谢！

由于时间仓促，本人水平所限，书中不足之处，恳请读者批评指正。

本书由“河海大学新世纪教育教改工程”专项经费资助出版。

**黄振平**

2003年6月于南京

# 目　录

## 第5章 极限定理



## 第6章 抽样分布



## 第7章 估计理论



## 第8章 假设检验



## 第9章 回归分析

## 第 10 章　误差分析



## 第 11 章　随机过程简介

# 绪　论

自然界和社会中存在着各种各样的现象,但归纳起来,可以分为两种类型。一类称为确定性现象,或必然现象。其特点是,在一定条件下,某种结果一定会发生(或出现)。例如,在标准大气压下,将水加热到100℃,“水沸腾”这一结果一定会发生;使两个带正电的小球相靠近,“两小球互相排斥”这一结果一定会发生;在一段导线两端施加电压时,“导线内产生相应的电流”这一结果也一定会发生,等等。这类现象与其形成的条件之间存在比较固定的因果联系,可以用经典的数学物理方法和定律来描述。因此,对于这类现象,只要满足一定条件,人们可以准确地预测其结果。另一类现象称为随机现象,或偶然现象。这类现象的特点是:在一定条件下,有多种可能发生的结果,但究竟哪个结果发生,事先不能确定。例如,抛一枚质地均匀的硬币,有两种可能发生的结果,正面朝上和反面朝上(我们把有币值的一面称为正面),在抛硬币之前,我们不能确定哪面朝上。又例如,投掷一颗骰子,观测向上那面的点数,有6种可能结果,投掷前,我们不能确定将出现几点。在水文领域,很多水文现象都属于随机现象。例如,观察某地的年降水量,有无穷多个可能结果,在年终之前,我们不能确定该年的降水量是多少。观测河流某断面处的年最高水位,年最大洪峰流量等,也都属于随机现象。这类现象带有很大偶然性,所以,又称为偶然现象。这类现象之所以具有不确定性,是因为它们除受基本的起主导作用的因素制约外,还受许多次要且多变的偶然因素影响。

随机现象虽然具有显著的不确定性,但并不是说它们没有规律可循。实践经验表明,在对一种随机现象作了大量的观测或试验之后,就能揭示出某种规律性。例如,若抽检产品的件数足够多,就可以发现,该批产品的合格率总是稳定地在某一常数附近摆动;若上抛一枚质地均匀的硬币次数足够多,就会发现,落下后出现图面和字面的次数大体相等;若在同一条件下对靶射击次数足够多,就会发现,命中点大体对称地分布于靶心周围,且命中点的密度从靶心向边缘递减;再如,物理学告诉我们,在一个盛满水的容器中,水对器壁的压力是由各个水分子对器壁的冲击力汇合而成的,虽然每个水分子的运动速度和轨迹都是随机的,致使它们对器壁的冲击力千差万别,但从宏观角度看,器壁各点所受的压力都是稳定的,可以用水力学定律来描述。随机现象的这种规律称为统计规律。它是随机现象的宏观规律,与随机现象个别观测结果的特性几乎没有关系。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的数学分支。

水文现象是一种具有明显随机性的自然现象,这是因为,河流的水文情势除主要决定于流域的地理位置、地质条件、气候的季节变化等因素外,在很大程度上,还与流域的下垫面状况、各种尺度的大气环流等因素有关,这些因素不仅种类繁多,

变化不定，而且相互组合也很复杂，从而使水文情势在其稳定的季节变化背景上，不断发生各种随机偏差，以致人们至今尚无法用传统的数学物理方法准确预测河流的水文状况。正由于水文现象的这一特性，使得概率论与数理统计在水文学的各个领域都得到了日益广泛的应用。例如，在水文测验中，观测站网的规划，观测规范的制订，观测资料质量的分析等；在水文预报中，某些预报方案（特别是中长期预报方案）的制订，预报误差分析与预报质量评定等；在水文水利计算中，水利系统的规划设计和运营管理等，都离不开概率统计方法。通常，人们把水文学中的概率统计方法称为水文统计法。

水文学中应用概率统计方法至今已有一个多世纪的历史，由于水文现象的高度复杂性和水文观测资料的相对有限性，致使水文统计法仍处于不断完善和发展中，其主要内容仍然是概率统计理论和方法在水文学中的应用。本书的重点是结合水文现象的特点，介绍概率论和数理统计的基本概念和原理，只有透彻理解和牢固掌握概率论数理统计的基本原理和方法，才有可能在实际工作和科学研究中正确、灵活和创造性地运用各种水文统计方法，也才有可能正确理解和运用水文统计分析的结果。

# 第1章　事件与概率

## §1-1　事件及其运算

### 一、随机试验

众所周知,为了研究某种自然或社会现象,就要对它进行观测、调查或实验。我们将这类活动统称为“试验”。例如,观测一次水位、观测某年年降水量、抽检一件产品、投掷一次骰子、对靶射击一次等,都称作一次“试验”。每作一次试验就有一个结果。例如,记录一次水位,就有一个水位数值;投掷一颗骰子,就会出现某个点数;打靶一次,就有一个命中环数等等。我们把试验的每一个结果,称为该试验的一个事件。如果一次试验出现了结果 $A$,则我们说“事件 $A$ 发生了”,或“事件 $A$ 出现了”。例如,若观测一次水位,记录了水位为 8.55 m,就说“水位等于 8.55 m 这一事件发生了”,或“水位等于 8.55 m 这一事件出现了”。

显然,对各种确定性现象所作的试验,在试验之前我们就能准确预测它将会出现怎样的结果。而对随机现象作试验时,我们却不能根据试验的条件预测试验将会出现怎样的结果,对于这种试验,由于结果具有随机性,所以称之为随机试验。下面给出它的明确含义。若一种试验满足下列三个条件,则称之为随机试验。

① 试验可以在相同条件下重复进行;

② 每次试验的可能结果不止一个,但在试验之前能明确知道有哪些可能的结果;

③ 每次试验中必然而且只能出现这些结果中的某一个,但在试验前却不能肯定该次试验将会出现哪一个结果。

我们将随机试验简称试验,并用符号 $E$ 表示。随机试验的结果称为随机事件。

除随机事件外,还有两类特殊事件:必然事件和不可能事件。必然事件是在一定试验条件下必然会发生的事情。不可能事件是在一定试验条件下一定不会发生的事情。

显然,必然事件和不可能事件都是对确定性现象试验的结果。为了研究的方便和统一,我们把必然事件和不可能事件也看成为随机事件,即把它们作为随机事件的两个极端情况。

下面用一些例子进一步说明随机试验与事件的概念。

**例1**　“抛一枚硬币,正面朝上”是随机事件。这里“抛一枚硬币”是一个随机

试验,因为这种试验可以在相同条件下重复进行,它的结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,抛硬币之前不能肯定哪面朝上。因此,“抛一枚硬币,正面朝上”是一个随机事件。

**例 2** “记录某电话总机在上午 9 时至 10 时的一小时内接到呼唤的次数”是一个随机试验,而“接到至少 15 次呼唤”是这一试验的一个随机事件,因为在这一小时内,接到至少 15 次呼唤这件事可能出现,也可能不出现。

**例 3** “从某厂生产的产品中,随机抽取 100 件,检查其中所含次品的件数”是一个随机试验,“其中恰有 5 件次品”是这一试验的一个随机事件,因为抽取的 100 件产品中不一定恰好有 5 件次品。

**例 4** “观测南京市 8 月份的降水量”是一个随机试验,而“降水量在 400 ~ 430 mm 之间”是一个随机事件,因为在具体观测南京某年 8 月份的降水量时,可能在 400 ~ 430 mm 之间,也可能不足 400 mm 或多于 430 mm。

**例 5** 在标准大气压下,纯净水加热到 100 ℃的试验中,“水沸腾”是一个必然事件,因为在标准大气压下加热到 100 ℃的纯净水必定会沸腾。

**例 6** “同性的电荷互相排斥”是一个必然事件,因为只要是两种同性的电荷相碰,就必然会出现互相排斥的现象。

**例 7** “钢在温度100 ℃以下熔化”是一个不可能事件,因为钢在 100 ℃以下不可能熔化。

**例 8** “在标准大气压下,60 ℃的水结成冰”是一个不可能事件,因为在标准大气压下,温度为 60 ℃的水必然不会结成冰。

今后,为了叙述简便起见,将随机事件、必然事件和不可能事件都简称为事件。而且在不致引起误解的情况下,也不一定每次都把“一定的条件”明确地写出来。但必须注意,在讨论一个事件的必然性、不可能性或随机性时,要把它与一定的条件联系起来。因为在不同的条件下,同一事件可以是必然的,也可以是不可能的或随机的。例如,“在标准大气压下,纯净水加热到 100 ℃”中抽出“标准大气压”这一条件,那么事件“水沸腾”就不是必然事件了。又如,一次射击命中目标,通常是一个随机事件,但如果射击者距离目标极近,那么“命中目标”这一事件就将成为必然事件了。所以,抽象地或一般地谈论某一事件的必然性、不可能性或随机性,而不与一定的条件联系起来,是没有意义的。

今后,用大写的英文字母 $A,B,C\cdots$ 或 $A_1,A_2\cdots$ 等符号表示随机事件,用 $\Omega$ 表示必然事件,用 $\phi$ 表示不可能事件。

## 二、基本空间

在说明基本空间概念之前,还需对事件的概念作一次较深入的讨论。我们来看一个例子:投掷一颗骰子,观察朝上一面的点数。显然,这是一个随机试验。现分别用 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 表示掷出的点数是 1,2,…,6 这六种结果。显然,$A_1,A_2,\cdots,A_6$

都是随机事件，而“掷出奇数点”（以 $B_1$ 表示）、“掷出偶数点”（用 $B_2$ 表示）、“出现的点数大于 3”（以 $C_1$ 表示）、“出现的点数小于等于 4”（用 $C_2$ 表示）等等，都是试验的可能结果，因此也是随机事件。但仔细分析，比较一下上述两类事件后可以发现，它们在结构上有很大区别，前者（$A_1,A_2,\cdots,A_6$）是不可再细分的，而后者（$B_1,B_2,C_1,C_2$）都是可分解的。例如，$B_1$ 可分解为 $A_1,A_3,A_5$；$C_1$ 可分解为 $A_4,A_5,A_6$ 等等。如同物理学中把不可再分的粒子称为基本粒子一样，我们把一个试验中不可再分的事件称为基本事件。而把可再分的事件称为复合事件，也就是说，复合事件是由若干基本事件组成的。这样，上例中，$A_1,A_2,\cdots,A_6$ 是基本事件，而 $B_1,B_2,C_1,C_2$ 都是复合事件。

应当注意，一个事件是否不可再分，不是绝对的和固定不变的，而是相对于一定的试验目的而论的。例如，我们观测某地某年降水量，其目的是为了确定该年是旱年 $A_1$（年降水量小于 700 mm），正常年 $A_2$（年降水量介于 700 至 1000 mm 之间），还是涝年 $A_3$（年降水量大于 1000 mm），则 $A_1,A_2,A_3$ 是三个基本事件，是不可再分的。但若我们关心的是该年降水量的数值，则 $[0,PMP]$ 之间的任一实数都是一个基本事件（这里 $PMP$ 为该地区可能最大年降水量），而 $A_1,A_2,A_3$ 又都是复合事件了。

今后，试验 $E$ 的基本事件用 $\omega$ 或 $e$ 表示，基本事件也称为样本点。

随机试验 $E$ 的所有基本事件的全体所构成的集合，称为 $E$ 的基本空间或样本空间，记为 $\Omega$ 或 $S$。而复合事件则是由基本空间中某些基本事件构成的集合。

举例如下：

$E_1$　抛一枚硬币，观察所出现的面。

基本事件　$\omega_1=$“正面朝上”，$\omega_2=$“反面朝上”。

基本空间　$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$。

$E_2$　掷一粒骰子，观察向上那面的点数。

基本事件　$\omega_i=$ 出现点数 $i$，$i=1,2,3,\cdots,6$。

基本空间　$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$。

事件 $A$“掷出的点数大于 3”，则 $A=\{4,5,6\}$。

$E_3$　观测某电话总机在一天内所接到的呼唤次数。

基本事件　$\omega_i=$ 呼唤次数 $i$，$i=0,1,2,3,\cdots$。

基本空间　$\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}=\{0,1,2,\cdots\}$。

事件 $A$“接到的呼唤次数在 100 到 200 之间”，则 $A=\{100,101,\cdots,199,200\}$。

$E_4$　用一门炮向区域 $D$ 内某目标射击，观察弹着点的位置（用以目标为原点的直角坐标 $(x,y)$ 表示）。

基本事件　$\omega=\{\omega(x,y)\}$。

基本空间　$\Omega=\{$全部弹着点的散布区域 $D\}$。

事件 $A$“弹着点位于以目标为圆心，$R$ 为半径的圆 $G$ 内”，则 $A=\{\omega;\omega\in G\}$。

$E_5$　观测某地年降水量。

基本事件　$\omega_x=$年降水量为 $x$。

基本空间　$\Omega=\{x:0\leqslant x\leqslant PMP\}$，设该地可能最大年降水量为 $PMP$。

事件 $A$“年降水量≤500 mm”，则 $A=\{x;0\leqslant x\leqslant 500\}$。

$E_6$　一个盒中装有完全相同的 10 个球，分别标以号码 1，2，…，10，从中随机抽取一个球，观察球的标号的奇偶性。

基本事件　$\omega_1=$“球的标号为偶数”；$\omega_2=$“球的标号为奇数”。

基本空间　$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$。

$E_7$　在随机试验 $E_6$ 中，把“观察球的标号的奇偶性”改为“观察球的标号”，试验的要求变了，研究的内容不一样，基本事件也发生相应的变化。

基本事件　$\omega_i=$取得球的标号为 $i$。

基本空间　$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{10}\}=\{1,2,\cdots,10\}$。

事件 $A$“所取球的标号为偶数”，则 $A=\{2,4,6,8,10\}$。

有了随机试验和基本空间的概念后，就可以通过研究随机试验来研究随机现象的普遍规律，而不涉及具体的随机现象了。

## 三、事件之间的关系与运算

### （一）事件之间的关系

研究随机现象，常常要研究几个事件以及它们之间的关系。例如，研究一次洪水时，不仅要考虑洪峰流量，还要考虑洪水总量；研究区域洪水时，不仅要研究干流洪水，还要研究支流洪水；不仅要关心下游洪水，还要关心上游洪水。详细地分析各个事件之间的关系，不仅能使我们更加深刻地认识事件的本质，而且还能大大简化某些复杂事件的概率计算。

设 $\Omega$ 为随机试验 $E$ 的基本空间，$A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$ 是定义在 $\Omega$ 中的事件，则事件之间的关系可归结为下列几种：

1. 包含关系

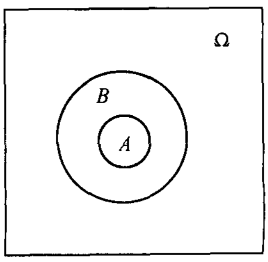



图 1－1　$B\supset A$

若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $B$ 包含事件 $A$，或称 $A$ 是 $B$ 的特款。记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，此时属于 $A$ 的基本事件都属于 $B$，可用图 1－1 表示。图中方形区域表示基本空间 $\Omega$，圆 $A$ 和圆 $B$ 分别表示事件 $A$ 和事件 $B$。例如，设 $A$ 表示“南京市一年中降水日数超过 100

天”，$B$ 表示“南京市一年中降水日数超过 80 天”，则 $B$ 包含 $A$，因为若一年降水日数超过 100 天，则必然超过 80 天。

若事件 $B$ 包含事件 $A$，且事件 $A$ 也包含事件 $B$，即 $B \supset A$ 及 $A \supset B$ 同时成立，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 等价（或相等），记为 $A = B$，此时，事件 $A$ 与事件 $B$ 所含的基本事件相同。

显然，对 $\Omega$ 中的任何事件 $A$，必有 $\Omega \supset A \supset \phi$。

2. 互斥关系

若事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，则称事件 $A$ 与事件 $B$ 互不相容，或称 $A$ 与 $B$ 互斥。显然，互不相容事件不含相同的基本事件。图 1－2 表示 $A$ 与 $B$ 互不相容。例如，设 $A$ 表示“南京市一年中降水日数超过 80 天”，$B$ 表示“南京市一年中降水日数少于 70 天”，则事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，所以 $A$ 与 $B$ 互斥。若 $A$ 与 $B$ 能同时发生，则称 $A$ 与 $B$ 为相容事件。

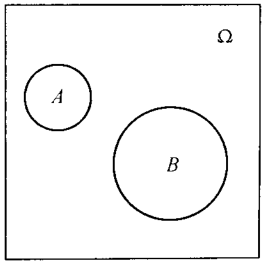


图 1－2

基本事件是互不相容的。

3. 对立事件

若事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，但每次试验中必有一个发生，则称事件 $A$ 是事件 $B$ 的对立事件（逆事件），或称事件 $B$ 是事件 $A$ 的对立事件（逆事件），或称事件 $A$ 与事件 $B$ 是对立事件，记成 $A = \overline{B}$ 或 $B = \overline{A}$。通常将 $A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$，显然 $\overline{A}$ 的对立事件即为 $A$，即 $\overline{\overline{A}} = A$。$A$ 的对立事件 $\overline{A}$ 是由基本空间中不属于 $A$ 的基本事件组成的。同理，$B$ 的对立事件 $\overline{B}$ 由基本空间中不属于 $B$ 的基本事件组成。

图 1－3 表示事件 $A$ 是事件 $B$ 的对立事件。

若令 $A$ 表示“南京市的年降水日数大于等于 80 天”，$B$ 表示“南京市的年降水日数少于 80 天”，那么事件 $A$ 和事件 $B$ 是对立事件。

这里需要指出，两个事件 $A$，$B$ 对立与互斥的差别在于后者不要求 $A$ 与 $B$ 中一定有一个发生，而二者共同之点在于 $A$ 与 $B$ 不能同时发生。所以，两个对立的事件一定是互斥的，但两个互斥的事件不一定是对立的。

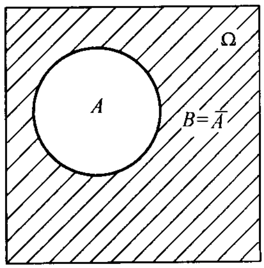


图 1－3　$A$，$\overline{A}$

## （二）事件的运算

1. 事件之和

如果定义事件 $C$ 为“事件 $A$ 与事件 $B$ 中至少有一个出现”，则称 $C$ 为事件 $A$ 与 $B$ 的和（或并），记作 $C = A + B$ 或 $C = A \cup B$。显然事件 $C$ 包含而且只包含 $A$ 与 $B$

的所有基本事件。

图 1 -4 表示事件 $C$ 为事件 $A$ 与 $B$ 的和。图中的阴影部分为事件 $C$。

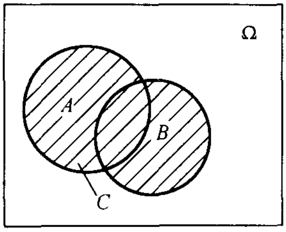



图 1 -4 $C=A+B$

**例 9** 高射炮向敌机连发2弹,以 $C$ 表示事件“击中敌机”,$A$ 表示事件“第一弹命中”,$B$ 表示事件“第二弹命中”,则事件 $C$ 为事件 $A$ 与 $B$ 的和。因为,如果 $A$ 发生,即第一弹命中,则事件 $C$“击中敌机”发生;如果 $B$ 发生,即第二弹命中,则事件 $C$ 也发生。如果 $A$ 与 $B$ 都发生,即两弹都命中,当然 $C$ 也发生,也就是,如果 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生,$C$ 就发生,所以 $C$ 为 $A$ 与 $B$ 之和。

**例 10** 衡量圆柱形产品质量有两个指标:长度和直径。如果以 $C$ 表示事件“产品不合格”,$A$ 表示事件“产品长度不合格”,$B$ 表示事件“产品直径不合格”,那么,事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生,$C$ 就发生,所以,事件 $C$ 是事件 $A$ 与事件 $B$ 的和,即 $C=A+B$。

事件之和的概念可以推广到有限个或可列多个事件的情况。如果定义事件 $A$ 为“事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生”,则 $A$ 就是事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和,记作 $A=A_1+A_2\cdots$,或 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots$,或 $A=\bigcup\limits_{i=1}A_i$,也可记为 $A=\sum\limits_{i=1}A_i$。

根据事件之和的定义可知,两个相同事件之和仍是它本身,即 $A+A=A$;如果 $A\supset B$,则 $A+B=A$。

2. 事件之积

如果定义事件 $C$ 为“事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生”,则称事件 $C$ 为事件 $A$ 与事件 $B$ 的积(或交)。记作 $C=AB$,或 $C=A\cap B$。显然事件 $C$ 包含而且只包含 $A$ 与 $B$ 共同的基本事件。

图 1 -5 表示事件 $A$ 与 $B$ 的积。图中阴影部分为事件 $C$。

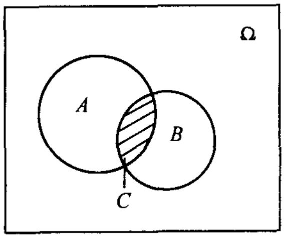



图 1 -5 $C=AB$

**例 11** 从编号为1至 15 的 15 张考签中任抽一张,令 $A$ 为事件“抽到偶数号考签”,$B$ 为事件“抽到的考签号数是 3 的倍数”,则 $C=A\cap B$ 就是“抽到的考签号数既是偶数又是 3 的倍数”这一事件,即 $C$ 为“抽到 6 号或 12 号考签”。

**例 12** 在例10中,若以 $C$ 表示事件“产品合格”,$A$ 表示事件“长度合格”,$B$ 表示事件“直径合格”,那么,只有长度与直径都合格时,产品才合格,所以 $C$ 为事件 $A$ 与 $B$ 的积,即 $C=AB$。

事件之积的概念可以推广到任意多个事件的情况,如果把“事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生”记作事件 $A$,则事件 $A$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积,记作 $A=A_1A_2\cdots$,或 $A=\bigcap\limits_{i=1}A_i$,也可记为 $A=\prod\limits_{i=1}A_i$。

根据事件之积的定义可知，两个相同事件之积等于它本身，即 $AA=A$；如果 $A\supset B$，则 $AB=B$；$A\Omega=A$。

3. 事件之差

如果定义事件 $C$ 为"事件 $A$ 发生，而事件 $B$ 不发生"，则称事件 $C$ 为事件 $A$ 与 $B$ 的差。记作 $C=A-B$。显然事件 $C$ 包含而且只包含属于 $A$，但不属于 $B$ 的基本事件。

图 1-6 表示事件 $A$ 与 $B$ 的差。图中从区域 $A$ 中去掉属于 $B$ 的部分，阴影所示区域即为事件 $C$。

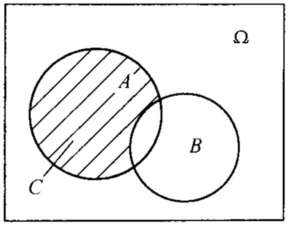


图 1-6　$C=A-B$

**例 13**　掷一颗骰子，观察它出现的点数。设 $A$ 表示事件"出现偶数点"，$B$ 表示事件"出现 2 点"，则事件 $A-B$ 是一个事件 $C$，它表示"出现 4 点或 6 点"。

**例 14**　令 $A$ 表示"某流域一年内发生 1 至 3 次洪水"，$B$ 表示"该流域一年内发生 2 至 5 次洪水"，则 $A-B$ 表示"该流域一年内发生 1 次洪水"。

因为 $A-B$ 表示在一次试验中 $A$ 发生而 $B$ 不发生，而 $B$ 不发生，必有 $\bar{B}$ 发生，所以 $A-B$ 表示 $A$ 与 $\bar{B}$ 同时发生，故 $A-B=A\bar{B}$。

根据前面的定义，事件 $A$ 与事件 $B$ 不相容（互斥）可以写成

$$AB=\phi$$

事实上，不论"$A$ 与 $B$ 互斥"还是"$AB=\phi$"都表示事件 $A$ 与 $B$ 不可能同时发生。

同样，事件 $A$ 与事件 $B$ 对立，可以写成

$$A+B=\Omega \quad 且 AB=\phi$$

事实上，前一式表示事件 $A$ 与 $B$ 至少要发生一个，后一式表示事件 $A$ 与 $B$ 不可能同时发生，因此，上两式表示在一次试验中，事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，但必有一个发生，即表示事件 $A$ 与事件 $B$ 互为对立事件。

## 四、事件的集合表示

前面已经指出过，可以用基本空间中的集合来表示事件。现在再详细介绍一下事件的集合表示方法。

首先，建立集合论与概率论之间的对应关系，进而借助集合论的知识来研究事件间的关系与运算。

对于一个试验的每一个基本事件，可以用只含一元素 $\omega$ 的单点集 $\{\omega\}$ 表示。而复合事件则是由基本空间中若干元素构成的集合，是基本空间（全集）中的子集。基本空间也是一个事件，它表示每次试验中出现基本空间中的一个事件，显然这是必然事件。而空集是不含任何元素的事件，即每次试验中不出现基本空间中的任一事件，这是不可能的，因此空集代表不可能事件。这样，就可在事件与点集之间建立起如表 1-1 所示的一种对应关系了。

表 1-1

| 符号 | 集合论含义 | 概率论含义 |
| --- | --- | --- |
| $\Omega$ | 空间、全集 | 基本空间,样本空间,必然事件 |
| $\phi$ | 空集 | 不可能事件 |
| $\omega\in\Omega$ | $\Omega$ 中的点(元素) | 基本事件 |
| $A\subset\Omega$ | $A$ 是 $\Omega$ 的子集 | 事件 $A$ |
| $A\subset B$ | 集合 $A$ 包含在集合 $B$ 中 | 事件 $A$ 包含于事件 $B$ |
| $A=B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 相等(或等价) | 事件 $A$ 与事件 $B$ 相等(或等价) |
| $A\cup B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 之和(或并) | 事件 $A$ 与 $B$ 至少有一个发生。(事件 $A$ 与 $B$ 之和或并) |
| $A\cap B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 之交 | 事件 $A$ 与 $B$ 同时发生(事件 $A$ 与 $B$ 的积或交) |
| $\bar{A}$ | 集合 $A$ 的余集 | 事件 $A$ 的逆事件(对立事件) |
| $A-B$ | 集合 $A$ 与 $B$ 之差 | 事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生(事件 $A$ 与 $B$ 的差) |
| $A\cap B=\phi$ | 集合 $A$ 与 $B$ 没有公共元素 | 事件 $A$ 与 $B$ 互不相容(互斥) |

建立起集合论与概率论的上述对应关系之后,就可以借助集合论的全部知识来研究概率论。例如,由集合的运算法则可知,事件间的运算满足下列法则。

① 交换律

$$A+B=B+A \qquad AB=BA$$

② 结合律

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$
$$(AB)C=A(BC)$$

③ 分配律

第一分配律 $\qquad (A+B)C=AC+BC$

第二分配律 $\qquad AB+C=(A+C)(B+C)$

④ 德・摩根定律

$$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$$
$$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$$

对 $n$ 个事件,德・摩根定律也成立:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i$$
$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$$

⑤ 差化积公式

$$A-B=A\cap\bar{B}$$

⑥ 若 $B\supset A$,则

$$A\cup B=B(\text{求和取大})$$