21世纪高等学校教材

孙志忠 编著

数值分析全真试题解析

SHUZHI FENXI QUANZHEN SHITI JIEXI

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

数值分析全真试题解析

孙志忠　编著

东 南 大 学 出 版 社

·南 京·

内容简介

本书对东南大学近5年来工科硕士研究生、工程硕士研究生学位课程以及工科博士研究生入学考试“数值分析”试题作了详细的解答，部分题目还给出了多种解法．内容包括误差分析，非线性方程求根，线性方程组数值解法，函数插值与逼近，数值微分与数值积分，常微分方程初值问题的数值解法以及求矩阵特征值的幂法．

本书可作为理工科研究生、本科生学习数值分析课程或计算方法课程的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

数值分析全真试题解析/孙志忠编著．—南京：东南大学出版社，2004.4

ISBN 7-81089-629-6

Ⅰ．数…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．数值计算—研究生—入学考试—解题　Ⅳ．O241-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第011255号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号　邮编:210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销　　姜堰市晨光印刷有限公司印刷

开本:700mm×1000mm　1/16　　印张:11.25　　字数:220千

2004年7月第1版　　2004年7月第1次印刷

印数:1—5000　　定价:16.00元

(凡因印装质量问题，可直接向发行科调换。电话:025-83795801)

前　言

计算机的迅速发展为人类提供了强有力的计算工具.使用计算机进行科学计算已成为科学研究、工程设计中越来越不可缺少的一个环节,它有时甚至代替或超过了实验所起的作用.因此,科学计算应该成为高级科技人员的一个基本功.作为科学计算的核心——数值分析(Advanced Numerical Analysis)课程或计算方法(Elementary Numerical Analysis)课程,已被许多的理工科专业研究生、本科生作为必修课程.

本书对东南大学近5年来工科硕士研究生、工程硕士研究生学位课程以及工科博士研究生入学考试"数值分析"试题作了详细的解答,部分题目还给出了多种解法.内容包括误差分析,非线性方程求根,线性方程组数值解法,函数插值与逼近,数值微分与数值积分,常微分方程初值问题的数值解法以及求矩阵特征值的幂法.硕士生学位课程考试时间为150分钟,博士生入学考试时间为180分钟.

虽然本书仅选用东南大学试卷,但对所有学习这门课程的学生都有重要的参考价值.

工科硕士研究生学位课程部分8个题目是袁慰平教授、吴宏伟博士、石佩虎博士等同事提供的(在引用处以 * 标注),也有少量题目是大家共同讨论确定的(未作特殊说明).在此,作者向他们表示谢意.

作者衷心地期望使用本书的老师、同学以及广大读者对本书提出宝贵意见.电子邮箱:zzsun@seu.edu.cn.

作　者

2004年1月

目　录

试题部分 1

1999 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1. (1) 证明 $10-\sqrt{99}=\dfrac{1}{10+\sqrt{99}}$.

(2) 取$\sqrt{99}$ 的 6 位有效数 9.94987,则以下两种算法各有几位有效数字?

$$10-\sqrt{99}\approx 10-9.94987=0.05013 \qquad ①$$

$$\frac{1}{10+\sqrt{99}}\approx\frac{1}{10+9.94987}=\frac{1}{19.94987}=0.0501256399\cdots \qquad ②$$

(12′)

2. 证明迭代格式

$$x_{n+1}=\mathrm{e}^{-x_n},\qquad n=0,1,2,\cdots \qquad ①$$

对于任意的 $x_0\in\mathbf{R}$ 均收敛于同一极限,并求出该极限.(提示:先考虑 $x_0\in[\mathrm{e}^{-1},1]$,再考虑 $x_0\in[0,\infty)$,最后考虑 $x_0\in\mathbf{R}$) (12′)

3. 说明用 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

时为什么要选主元(其中系数矩阵为非奇异矩阵). (12′)

4. 对线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},\qquad a_{11}a_{22}\neq 0$$

用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解,证明这两种方法要么同时收敛,要么同时发散. (13′)

5. 设 $f(x)=\sin x, x\in[0,\pi]$.求一个 4 次多项式 $H(x)$ 使得

$$H(0)=f(0),\qquad H\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right),\qquad H(\pi)=f(\pi)$$

$$H'(0) = f'(0), \qquad H'(\pi) = f'(\pi)$$

并写出插值余项 $f(x) - H(x)$ 的表达式. (13′)

6. 求 $f(x) = x^3 + 2x^2$ 在区间$[2,4]$上的2次最佳一致逼近多项式,并估计误差. (13′)

7*. 已知

$$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{9}\left[5g\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8g(0) + 5g\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

为 Gauss 求积公式,且其截断误差为

$$\frac{g^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1}\left[\left(t+\sqrt{\frac{3}{5}}\right)t\left(t-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]^2\mathrm{d}t \equiv c_0 g^{(6)}(\xi), \qquad \xi \in (-1,1)$$

(1) 设 $f(x) \in C^6[a,b]$,给出在区间$[a,b]$上积分

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的 3 点 Gauss 求积公式及截断误差.

(2) 将$[a,b]$分为 n 等分,记 $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih, 0 \leqslant i \leqslant n$, $x_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), 0 \leqslant i \leqslant n-1$. 试对 $I(f)$ 构造复化的 3 点 Gauss 公式,记为 $G_n^{(3)}(f)$.

(3) 证明当 h 充分小时,有

$$I(f) - G_n^{(3)}(f) \approx ch^6$$

并求出 c. (13′)

8. 对常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = \eta \end{cases}$$

使用预测校正公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{12}\left[5f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right] \end{cases}$$

求其局部截断误差,并指出该公式是一个几阶公式. (12′)

---

* 袁老师提供.

2000 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1*. 简答题.

(1) 要求计算圆面积 S 的相对误差限为 0.04,问测量其半径 r 的相对误差限最大可为多少?

(2) 已知 $f(x)=2x^6-2x^5+6x^2-2x+1$,求 $f[0,1]$ 及 $f[0,1,2,3,4,5,6]$.

(3) 求积公式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}[f(0)+f(1)]+\frac{1}{12}[f'(0)-f'(1)]$ 的代数精度为多少? (12′)

2. 给定方程 $x-2\cos x=0$.

(1) 分析该方程存在几个根.

(2) 用迭代法求出这些根,精确至 4 位有效数. (11′)

3. 给定线性代数方程组

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\0 & 2 & 3\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

(1) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式.

(2) 分析该迭代格式是否收敛. (11′)

4*. 给定线性代数方程组

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix} \qquad ①$$

将 ① 的第 1 个方程乘以 $\lambda(\lambda\neq 0)$ 后,得到

$$\begin{bmatrix}2\lambda & \lambda\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\lambda\\9\end{bmatrix} \qquad ②$$

记 ② 的系数矩阵为 $A(\lambda)$.

* 袁老师提供.

(1) 求 $\text{cond}(A(\lambda))_\infty$；

(2) 求 λ 使得 $\text{cond}(A(\lambda))_\infty$ 取最小值；

(3) 说明你所得的结果有何意义. (11′)

5. 设 $f(x)\in C^5[0,1]$.

(1) 求 4 次插值多项式 $H(x)$,使得

$$H(0)=f(0),\qquad H'(0)=f'(0),\qquad H''(0)=f''(0)$$
$$H(1)=f(1),\qquad H'(1)=f'(1)$$

(2) 写出插值余项 $f(x)-H(x)$ 的表达式. (11′)

6. 设 $f(x)=x^2, x\in[0,1]$.

(1) 求 $f(x)$ 的 1 次最佳一致逼近多项式 $p_1(x)=a_0+a_1x$；

(2) 求 $f(x)$ 的 1 次最佳平方逼近多项式 $q_1(x)=b_0+b_1x$. (11′)

7. 给定数据

x	1.30	1.32	1.34	1.36	1.38
$f(x)$	3.60210	3.90330	4.25560	4.67344	5.17744

用复化 Simpson 公式计算 $I=\int_{1.30}^{1.38}f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值,并估计误差. (11′)

8. 设 $f(x)\in C^4[a,b]$,对积分

$$I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(1) 构造具有 3 次代数精度的 Gauss 公式 $G(f)$；

(2) 证明

$$I(f)-G(f)=\frac{1}{135}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi),\qquad \xi\in(a,b);$$

(3) 构造 2 点复化 Gauss 公式 $G_n(f)$. (11′)

9. 考虑微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \qquad a \leqslant x \leqslant b & ① \\ y(a) = \eta & ② \end{cases}$$

记 $x_i = a + ih$，其中 $i = 0, 1, \cdots, n$，$h = \dfrac{b-a}{n}$.

(1) 写出 $f(x, y(x))$ 以 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} 为插值节点的 Lagrange 插值多项式 $L_2(x)$.

(2) 将方程 ① 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上积分，得

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x$$

试导出 2 步 Adams 隐式公式.

(3) 求出 2 步 Adams 隐式公式的局部截断误差，并指出该公式是几阶的.（11′）

2001 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1. 已测得某圆柱体底面半径 R^* 的近似值 $R = 100$ mm，高 h^* 的近似值 $h = 50$ mm. 若已知 $|R^* - R| \leqslant 0.5$ mm，$|h^* - h| \leqslant 0.5$ mm，则求体积 $V = \pi R^2 h$ 的绝对误差限和相对误差限各为多少？ (10′)

2. 分析方程

$$x^2 - \ln x - 4 = 0 \quad ①$$

存在几个根；用迭代法求出这些根(精确至 5 位有效数)，并说明所用迭代格式为什么是收敛的. (14′)

3. 给定线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

(1) 用列主元三角分解法求解所给线性方程组.

(2) 写出 Gauss-Seidel 迭代格式，并分析该迭代格式是否收敛. (20′)

4*. 设 $f(x) = x^4$.

(1) 求以 $-1,0,1,2$ 为插值节点的 3 次插值多项式 $p_3(x)$，并写出余项表达式.

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的 3 次最佳一致逼近多项式 $q_3(x)$，并估计误差.

(3) 验证 $\left|f\left(\frac{1}{2}\right) - p_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - q_3\left(\frac{1}{2}\right)\right|$. 这与最佳一致逼近的定义矛盾吗？ (14′)

---

* 袁老师提供.

5*. 设 $f(x)\in C^2[a,b]$, $I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(1) 确定中点求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad ①$$

的代数精度.

(2) 证明截断误差

$$I(f)-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi),\qquad \xi\in(a,b)$$

(3) 将 $[a,b]$ 作 n 等分,构造计算 $I(f)$ 的复化中点公式,给出其截断误差.该复化求积公式是一个几阶的公式? (14′)

6. 考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), & a\leqslant x\leqslant b \\ y(a)=\eta \end{cases}$$

应用数值积分的有关理论导出2步 Adams 显式公式

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[3f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})] \qquad ①$$

给出局部截断误差的表达式,并指出该公式是几阶的. (14′)

7. 试在区间 $[0,3]$ 上构造一个具有2阶连续导数的分段3次多项式 $H(x)$,使满足

$$H(0)=3,\qquad H(3)=-2$$
$$H'(0)=1,\quad H'(1)=2,\quad H'(3)=3$$

注:用下列方法不得分.设 (14′)

$$H(x)=\begin{cases} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, & x\in[0,1] \\ b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3, & x\in[1,3] \end{cases}$$

得到含8个参数的线性方程组,再去确定8个参数.

* 袁老师提供.

2002 年工科硕士研究生学位课程考试试题

1. 填空.

(1) 设 $f(x)=3x^6+6x^4-5x^2+1$,则 $f[-1,0,1]=$ ________,

$f[-3,-2,-1,0,1,2,3]=$ ________. (2′ + 2′)

(2) 求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 3 \\ -1 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

的 Gauss-Seidel 迭代格式为________. (1′ + 1′ + 1′)

(3) 设 $f(x)\in C^5[a,b]$,且 3 次多项式 $H(x)$ 满足

$$H(a)=f(a),\qquad H\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\qquad H(b)=f(b)$$

$$H'\left(\frac{a+b}{2}\right)=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

则 $f(x)-H(x)=$ ________. (3′)

(4) 设 $f(x)\in C^3[a,b]$,则

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\text{________}.$$ (3′)

(5) 设

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|_2=$ ______, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=$ ______, $\|\boldsymbol{A}\|_1=$ ______.

(1′ + 1′ + 1′)

(6) 设 $f,g\in C[a,b]$,则 $\|f\|_1=$ ________, $\|f\|_2=$ ________, $\|f\|_\infty=$ ________, $(f,g)=$ ________. (4′)

(7) 求解常微分方程初值问题的改进 Euler 公式为________,它是________阶的. (3′ + 1′)

2. 取$\sqrt{2003}$和$\sqrt{2001}$的6位有效数分别为44.7549和44.7325.试分析如下两个算法各具有几位有效数字: (12′)

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2003}-\sqrt{2001})\approx\frac{1}{2}(44.7549-44.7325)=0.0112 \qquad ①$$

$$\frac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2001}}\approx\frac{1}{44.7549+44.7325}=\frac{1}{89.4874}=0.01117475756\cdots \qquad ②$$

3. 给定方程

$$e^x-x-2=0 \qquad ①$$

(1) 分析该方程存在几个实根;

(2) 用迭代法求出这些根,精确到4位有效数. (12′)

4. 用列主元 Gauss 消去法解线性方程组

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 12 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 2\\ 9\end{bmatrix} \qquad (12')$$

5. 设$f(x)=\ln(1+x),x\in[0,1]$,$p_n(x)$为$f(x)$以$(n+1)$个等距节点$x_i=\frac{i}{n},i=0,1,2,\cdots,n$为插值节点的$n$次插值多项式,证明

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-p_n(x)|=0 \qquad (12')$$

6. 设$f(x)\in C^3[0,1]$.考虑求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\approx Af(x_0)+Bf(1) \qquad ①$$

(1) 选取求积系数A,B和求积节点x_0,使得求积公式具有尽可能高的代数精度,并指出所达到的最高代数精度的次数;

(2) 将所得到的求积公式的截断误差表示成$c\cdot f^{(p)}(\xi)$的形式. (16′)