

北京市海淀区教育局特高级教师编写组 编写
北京市海淀区教师进修学校特级教师



数学

基础知识手册

> 初中版

- ◆ 依纲靠本 系统全面
- ◆ 编排新颖 使用方便
- ◆ 名师打造 科学高效

主编 **张光璐**



海淀特高级
教师通力合作
最新版

内蒙古大学出版社

初中数学 基础知识手册

北京市海淀区教育局特高级教师编写组/编写

张光珞/主编



内蒙古大学出版社

书 名 初中数学基础知识手册
主 编 张光珞
责任编辑 赵 英
出版发行 内 蒙 古 大 学 出 版 社
呼和浩特市大学西路 235 号(010021)
电子信箱 inmt@nmg2.imu.edu.cn
发 行 内蒙古新华书店
印 刷 北京飞达印刷有限责任公司
开 本 $880 \times 1230/32$
总 印 张 55.125
总 字 数 1850 千
版 次 2004 年 6 月第 1 版
印 次 2004 年 6 月第 1 次印刷
标准书号 ISBN 7-81074-601-4/G·119
总 定 价 72.20 元

本书如有印装质量问题,请直接与出版社联系

目 录

代 数

第一章 实数	
第1节 实数的有关概念及实数的分类	(3)
第2节 实数的运算和实数大小的比较	(10)
第二章 代数式	
第1节 列代数式	(21)
第2节 整式	(24)
第3节 因式分解	(41)
第三章 一元一次方程	(51)
第四章 二元一次方程组	(61)
第五章 分式	(74)
第六章 数的开方	(91)
第七章 二次根式	(104)
第八章 一元二次方程	(123)
第九章 可化为一元二次方程的分式方程和无理方程、 及二次二次方程组	(153)
第十章 一元一次不等式和不等式组	(171)
第十一章 函数及其图像	
第1节 平面直角坐标系	(182)
第2节 函数及其图像	(192)
第3节 一次函数的图像和性质	(198)
第4节 二次函数的图像和性质	(214)
第5节 反比例函数	(239)
第十二章 统计初步	(248)

几 何

第一章 线段、角	(261)
第二章 相交线和平行线	(282)
第三章 三角形	(302)
第四章 四边形	(338)
第五章 相似形	(385)
第六章 解直角三角形	(430)
第七章 圆	(456)

代

数



第一章 实数

第1节 实数的有关概念及实数的分类

一、知识点排序

1. 有理数:

整数和分数统称有理数, 有理数也可按正负性分为正有理数、负有理数和零。

2. 无理数:

无限不循环小数叫做无理数, 无理数也可分正无理数和负无理数。

3. 实数:

有理数和无理数统称为实数, 实数有时也按照正负性分为正实数、零和负实数。

4. 数轴:

规定了原点、正方向和单位长度的直线叫数轴, 数轴上的点与实数成一一对应的关系。

5. 数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点与原点的距离。

它将数与点、距离与线段联系起来, 构成了数形结合的基础。

6. 一般地, $x^2 = a$, 我们把 x 叫做 a 的平方根, 记作 $x = \pm\sqrt{a}$

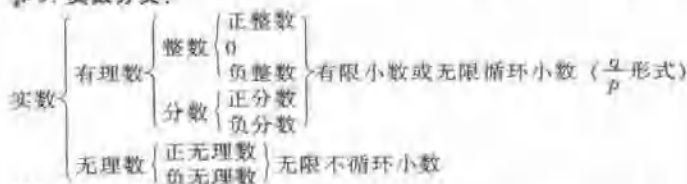
正数有两个平方根, 它们互为相反数; 零的平方根是零; 负数没有平方根。

7. 我们把正数 a 的正的平方根叫做 a 的算术平方根; 零的算术平方根是零。

8. 一般地 $x^3 = a$, 我们把 x 叫做 a 的立方根, 记作 $x = \sqrt[3]{a}$ 。

正数有一个正的立方根, 负数有一个负的立方根, 零的立方根是零。

9. 实数分类:



10. 相反数:

数 a 的相反数是 $-a$, 是有理数减法的依据, 体现了化归思想。

倒数: a 的倒数是 $\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$), 是有理数除法转化为乘法的前提, 也体现了化归思想。

绝对值: 正数的绝对值是它本身, 负数的绝对值是它的相反数, 零的绝对值是零, 体现了分类思想。

11. 实数的运算, 除了注意符号, 还要注意绝对值, 符号和绝对值是构成实数的两个元素。

12. 近似数与有效数字:

有效数字是从左边第一个不是零的数字算起, 到精确到的数位止。例如: 2.40万精确到百位, 有3个有效数字。 2.31×10^4 有三个有效数字, 精确到百位。

13. 科学记数法:

$N = a \times 10^n$ 中 $1 \leq a < 10$; n 为整数, 当 N 大于1时, n 等于 N 的整数位数减1, 当 $0 < N < 1$ 时, n 为负整数。 $|n|$ 等于 N 的第一个非零数字前面零的个数。(包括小

数点前面的零)

二、各类题型的例题

例1 选择题

1. 在实数 $-\sqrt{5}$, 2, $0.\overline{31}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{3}$, 0.20345 中无理数的个数为 ()
A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个
2. 气温是零下6摄氏度记作 ()
A. -6 B. 6 C. -6°C D. 6°C
3. 下列各组数中, 互为相反数的是 ()
A. $-\frac{1}{3}$ 与 -3 B. $|-3|$ 与 3 C. -3 与 $\sqrt{(-3)^2}$ D. -3 与 $\sqrt[3]{-27}$
4. $|- \frac{1}{4}|$ 的倒数是 ()
A. $\frac{1}{4}$ B. 4 C. $-\frac{1}{4}$ D. -4
5. 下列说法正确的是 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是分数 B. $\frac{1}{25}$ 的倒数是 25
C. 负数和零没有平方根 D. 0 和 1 的相反数是它本身
6. 下列说法正确的是 ()
A. (-3) 是 $(-3)^2$ 的算术平方根 B. 25 的平方根是 ± 5
C. 3 是 -9 的算术平方根 D. 64 的立方根是 ± 4

解: 1. (B) 2. (C) 3. (C) 4. (B) 5. (B) 6. (B)

解析: 本组合题主要考查实数的有关概念. 1. 属实数的分类, 无理数指无限不循环小数.

2. 考查用有理数表示实际问题中的数量, 即实数在现实生活中的应用.

3. 考查了相反数的意义.

4. 综合考查了绝对值与倒数的意义.

5. 综合考查了平方根的意义. 负数没有平方根. 倒数的意义. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是无理数及相反数意义.

6. 综合考查了平方根、立方根、算术平方根的意义.

例2 下列各数是正数还是负数, 是整数还是分数?

-8, 20.11, $-\frac{1}{16}$, 89, 0, -0.68, $4\frac{3}{5}$

解: 正数有 20.11, 89, $4\frac{3}{5}$ 负数有 -8, $-\frac{1}{16}$, -0.68;

整数有 89, 0 分数有 20.11, $-\frac{1}{16}$, -0.68, $4\frac{3}{5}$.

评析: 本例题主要考查有理数的有关概念与分类.

例3 画一条数轴, 并且用 A、B、C、D 各点分别表示 $+3$, -5 , 1.5 , $-2\frac{1}{2}$, 0 各数并用 “<” 连接各数.

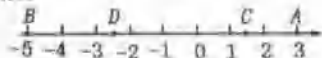


图 1-1-1

解: $-5 < -2\frac{1}{2} < 0 < 1.5 < 3$

评析: 画数轴不能缺少正方向、原点和单位长度这三个要素.

A、B、C、D 四个点用实心原点表示出来.

可以用数轴比较有理数的大小: 在数轴上表示的两个数, 右边的数总比左边的数大.

例4 一个点从数轴上的原点开始,先向右移动3个单位长度,再向左移动5个单位长度,终点表示的数是多少。

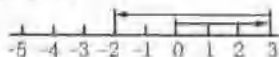


图 1-1-2

解法一:如图 1-1-2 所示。

根据运用数轴表示的运动过程知终点表示的数是-2。

解法二:从原点向右运动3个单位长度表示 $0+3=3$;再向左运动5个单位长度表示 $3-5=-2$,因此终点表示的数是-2。

例5 填空: (1) $|-8| = \underline{\hspace{2cm}}$, $-|+\frac{5}{2}| = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 $|x|=3$, 那么 $|x| = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 绝对值是 $\frac{3}{4}$ 的数有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个, 是 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(4) 绝对值不大于3的整数有 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(5) 已知 $|3x-1|=5$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: (1) $|-8|=8$, $-|+\frac{5}{2}|=-\frac{5}{2}$;

(2) $x=\pm 3$;

(3) 2个, $\pm\frac{3}{4}$;

(4) 0, ± 1 , ± 2 , ± 3 ;

(5) $3x-1=5$ 或 $3x-1=-5$ 解得 $x=2$ 或 $x=-\frac{4}{3}$

评析:本题通过填空考查绝对值的概念。

例6 若 $(\sqrt{3}-a)^2$ 与 $|b-1|$ 互为相反数, 则 $\frac{2}{a-b}$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解析:本题主要考查互为相反数概念、非负数概念及性质、二元一次方程组的解法、二次根式的化简和求代数式值等多个知识点。

解:由互为相反数概念, 有 $(\sqrt{3}-a)^2+|b-1|=0$

再根据非负数性质, 得 $(\sqrt{3}-a)^2=0$, $|b-1|=0$

解得 $a=\sqrt{3}$, $b=1$

$\therefore \frac{2}{a-b} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$

例7 2003年6月1日9时, 举世瞩目的三峡工程正式下闸蓄水, 首批4台机组率先发电, 预计年内可发电5500000000度, 这个数用科学记数法表示, 记为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 度。近似数0.30精确到 $\underline{\hspace{2cm}}$ 位, 有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个有效数字。

解: 5.5×10^9 百分位 两个有效数字

解析: $5500000000 = 5.5 \times 10^9$

近似数0.30精确到百分位

有两个有效数字

例8 绝对值小于100的所有整数之和是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解: 0

解析: 设 x 的绝对值小于100即 $|x| < 100$

$\therefore x=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 99$

$\therefore$ 这些整数和为0

三、基础题

(一) 填空题

1. 把下列各数填在相应集合里:

$\frac{3}{4}$, 12, 0.012, 1, -0.52, 0, -3, $1\frac{1}{31}$, $0.\dot{2}3$, $-\frac{1}{6}$

自然数集合: { ... }

整数集合: { ... }

分数集合: { ... }

非负数集合: { ... }

有理数集合: { ... }

答案: 12, 1; 12, 1, -3, 0; $\frac{3}{4}$, 0.012, -0.52, $1\frac{1}{31}$, $0.\dot{2}3$, $-\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}$,
12, 0.012, 1, 0, $1\frac{1}{31}$, $0.\dot{2}3$; $\frac{3}{4}$, 12, 0.012, 1, -0.52, 0, -3, $1\frac{1}{31}$, $0.\dot{2}3$,
 $-\frac{1}{6}$

解析: 非负数包括零和正数, 有理数包括整数和分数

2. 不大于 2.999 的最大整数是 _____, 不大于 -2.999 的最大整数是 _____。

答案: 2; -3

解析: “不大于”即“小于等于”

3. 如果一个数和它的倒数相等, 那么这个数是 _____。

答案: 1 或 -1

4. 比负数大的所有数中, 最小的数是 _____。

答案: 0

5. 若 $-a$ 表示正数, 那么 _____ 表示负数。

答案: a

6. 若 x 与 y 互为倒数, 则 $-\frac{xy}{6}$ 的值是 _____。

答案: $-\frac{1}{6}$

解析: $\because x$ 与 y 互为倒数, $\therefore xy=1$, $\therefore -\frac{xy}{6} = -\frac{1}{6}$

7. $2\frac{1}{5}$ 是 _____ 的相反数, _____ 的相反数是 -3.1, 0 的相反数是 _____, a 的相反数是 _____。

答案: $-2\frac{1}{5}$; 3.1; 0; $-a$

8. 如果一个数的相反数是 $\frac{3}{5}$, 那么这个数是 _____。

答案: $-\frac{3}{5}$

9. a, b 是两个不为零的数, 且 a 与 b 互为相反数, 那么 $a+b=$ _____, $\frac{a}{b}=$ _____。

答案: 0; -1

10. 一个数 a 的相反数的相反数是 _____。

答案: a

11. $\frac{1}{9}$ 的倒数的相反数是 _____。

答案: -9

12. 若 x 与 y 互为相反数, 则 $-\frac{2}{9}(x+y)^{99}=$ _____。

答案: 0

解析: $\because x$ 与 y 互为相反数, $\therefore x+y=0$, $\therefore -\frac{2}{9}(x+y)^{99}=0$

13. 设 a 是一个有理数, 且 $a \neq 0$, 则 a 与它的相反数 $-a$ 一定位于数轴上

的两侧,且到原点的距离_____。

答案:原点;相等

14. 若 $a > 0$, 则 $-a$ _____ 0, 若 $-a > 0$, 则 a _____ 0。

答案: $<$; $<$

15. 一个正数的绝对值是_____; 一个负数的绝对值是_____; 0 的绝对值是_____。

答案: 它本身; 它的相反数 0

16. 绝对值等于 3 的数是_____。

答案: ± 3

17. -0.7 的绝对值是_____。

答案: 0.7

18. 绝对值最小的数是_____。

答案: 0

19. 数轴上有一点到原点的距离为 5, 那么这个点所表示的数是_____。

答案: ± 5

20. 绝对值小于 2 的整数有_____。

答案: $-1, 0, 1$

21. $|- \frac{2}{3}|$ 的倒数的相反数是_____。

答案: $-\frac{3}{2}$

22. 若 $|a| = a$, 则 a _____; 若 $|a| = -a$, 则 a _____。

答案: ≥ 0 ; ≤ 0

四、拓展题

(一) 填空题

1. 如果一个数和它的相反数相等, 那么这个数是_____。

答案: 0

2. 一个数的相反数是最小的正整数, 这个数是_____。

答案: -1

解析: $\because$ 最小的正整数为 1, $\therefore$ 它的相反数是 -1 , $\therefore$ 这个数为 -1 。

3. 若 $-x = 10$, 则 x 的相反数在原点的_____侧。

答案: 右

解析: $\because -x = 10$, $\therefore x = -10$, x 的相反数为 10, $\therefore 10$ 在原点的右侧。

4. 当 $x \neq 0$ 时, $\frac{|x|}{x}$ 的值是_____。

答案: ± 1

解析: 当 $x > 0$ 时, $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$, 当 $x < 0$ 时, $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$, $\therefore$ 当 $x \neq 0$ 时,

$\frac{|x|}{x}$ 的值为 ± 1

5. 若 $|x| + |y| = 0$, 则 $x =$ _____, $y =$ _____。

答案: 0; 0

解析: $\because |x| \geq 0, |y| \geq 0$, 又 $\because |x| + |y| = 0$, $\therefore |x| = 0, \therefore x = 0, |y| = 0$, $\therefore y = 0$

6. 绝对值小于 $4\frac{1}{2}$ 的整数有_____。

答案: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

解析: $\because |x| < 4\frac{1}{2}$, $\therefore$ 符合这个条件的 x 的值为 $-4, -3, -2, -1, 0, 1,$

2, 3, 4

7. 如果 $|x - 4| = 1$, 则 $x =$ _____。

答案: 5 或 3

解析: $\because |x-4|=1, \therefore x-4=1$ 或 $x-4=-1, \therefore x=5$ 或 $x=3$

8. 绝对值不大于 2 的整数有_____。

答案: -2, -1, 0, 1, 2

解析: $\because |x| \leq 2, \therefore$ 符合这个条件的 x 的值为 -2, -1, 0, 1, 2

9. 一个数的绝对值的相反数一定是_____。

答案: 非正数

解析: 设这个数为 $x, \therefore |x| \geq 0, \therefore -|x| \leq 0, \therefore$ 一个数的绝对值的相反数一定是非正数

10. 若 $-\frac{1}{a}$ 的绝对值是 4, 则 $-a$ 的值为_____。

答案: $\pm \frac{1}{4}$

解析: $\because |-\frac{1}{a}| = 4, \therefore \frac{1}{a} = \pm 4, \therefore -a = \mp \frac{1}{4},$

即 $-a$ 为 $\pm \frac{1}{4}$

(二) 选择题

1. 在 $(-\sqrt{2})^0, \sin 45^\circ, 0, \sqrt{9}, 0.010010001\cdots, \frac{22}{27}, \frac{1}{2}\pi$ 这七个数中, 无理数共有 ()

A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

答案: B

2. 如果 $2(x+3)$ 的值与 $3(1-x)$ 的值互为相反数, 那么 x 等于 ()

A. -8 B. 8 C. -9 D. 9

答案: D

3. 2.12×10^{-3} 表示的原数为 ()

A. 2120 B. 212000 C. 0.00212 D. 0.000212

答案: C

4. 据测算, 我国每天因土地沙漠化造成的经济损失为 1.5 亿元。若一年按 365 天计算, 用科学记数法表示我国一年因土地沙漠化造成的经济损失为 ()

A. 5.475×10^{17} (元) B. 5.475×10^{10} (元)
C. 0.5475×10^{11} (元) D. 5475×10^8 (元)

答案: B

5. 已知 $|x|=2$, 则下列四个式子中一定正确的是 ()

A. $x=2$ B. $x=-2$ C. $x^2=4$ D. $x^3=8$

答案: C

6. 如果 a 与 -3 互为相反数, 那么 a 等于 ()

A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

答案: A

7. $2-\sqrt{3}$ 的一个有理化因式是 ()

A. $\sqrt{3}$ B. $2+\sqrt{3}$ C. $2+\sqrt{3}$ D. $-2+\sqrt{3}$

答案: C

8. 下列说法正确的是 ()

A. 负数和零没有平方根 B. $\frac{1}{2008}$ 的倒数是 2008
C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 是分数 D. 0 和 1 的相反数是它本身

答案: B

9. 下列各数 $(-2)^0, -(-2), (-2)^2, (-2)^3$ 中, 负数的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案: A

10. 下列命题中正确的是 ()

A. $(-2)^2$ 的平方根是 -2 B. -1 的立方根是 -1
C. 0.2060 精确到千分位 D. 无理数是指无限循环小数

答案: B

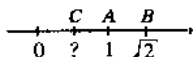
11. 和数轴上的点一一对应的数是 ()

A. 整数 B. 有理数 C. 无理数 D. 实数

答案: D

12. 如图, 数轴上表示 1 、 $\sqrt{2}$ 的对应点分别为 A 、 B , 点 B 关于点 A 的对称点为 C , 则点 C 所表示的数是 ()

A. $\sqrt{2} - 1$ B. $1 - \sqrt{2}$ C. $2 - \sqrt{2}$ D. $\sqrt{2} - 2$



答案: C

13. 下列结论中正确的是 ()

A. 若 a 、 b 为实数, 则 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ B. 若 a 为实数, 则 $a \leq 0$
C. 若 $|a| = |b|$, 则 $a = b$ D. 若 a 为实数, 则 $a^2 > 0$

答案: A

14. 若 $\frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} = 0$, 则下列结论正确的是 ()

A. x 、 y 为一切实数 B. $xy > 0$
C. $xy = 0$ D. $xy < 0$

答案: D

15. 若数轴上表示数 a 的点在原点的左边, 则化简 $|2a + \sqrt{a^2}|$ 的结果是 ()

A. $-a$ B. $-3a$ C. a D. $3a$

答案: A

16. 如果 a 是有理数, 那么下面说法正确的是 ()

A. $|a|$ 一定是正数 B. $-a$ 一定是负数
C. $|a|$ 一定不是负数 D. $-|a|$ 一定是负数

答案: C

解析: $\because a$ 为有理数, $\therefore |a| \geq 0$, $\therefore |a|$ 一定不是负数, 故 C 正确.

17. 如果一个非零数的绝对值等于它的相反数, 那么这个数是 ()

A. 必为正数 B. 必为负数
C. 必为非负数 D. 正负不能确定

答案: B

解析: 设 $a \neq 0$, 且 $|a| = -a$, 又 $\because |a| \geq 0$
 $\therefore -a \geq 0 \therefore a \leq 0 \therefore a \neq 0 \therefore a < 0$, 即 a 必为负数.

18. 绝对值小于 5 的所有整数和是 ()

A. 5 B. -5 C. 10 D. 0

答案: D

解析: $\because$ 绝对值小于 5 的所有整数为 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, 其和为 0 , 故 D 正确.

19. 若 $a > 0$, $b < 0$, 则 $|a - b + 1| - |b - a - 1|$ 的值为 ()

A. 0 B. 2 C. $2a$ D. $2b$

答案: A

解析: $\because a > 0, b < 0$, 则 $-b > 0$, $\therefore a - b + 1 > 0, b - a - 1 < 0$
 $\therefore |a - b + 1| - |b - a - 1| = (a - b + 1) + (b - a - 1) = 0$.

20. 下列各组数中, 相等的是 ()

A. $(-1)^3$ 和 1 B. $(-1)^2$ 和 -1
C. $\sqrt{(-1)^2}$ 和 -1 D. $-(-1)$ 和 $|-1|$

答案: D

解析: 任意负数的奇次幂都是负数, 而负数的偶次幂是正数所以 $(-1)^1 = -1$
 $(-1)^2 = 1$ $-(-1) = 1$ 任一个负数的绝对值是它的相反数所以 $-(-1) = 1$

第2节 实数的运算和实数大小的比较

一、知识点排序

1. 有理数的运算法则

(1) 加法法则

1. 同号两数相加, 取相同的符号, 并把绝对值相加。
2. 绝对值不相等的异号两数相加, 取绝对值较大的加数的符号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值, 互为相反数的两个数相加得 0。
3. 一个数同零相加, 仍得这个数。

(2) 减法法则:

减去一个数, 等于加上这个数的相反数。

(3) 乘法法则:

两数相乘, 同号得正, 异号得负, 并把绝对值相乘, 任何数同 0 相乘都得 0。

(4) 除法法则:

除以一个数等于乘上这个数的倒数

(5) 乘方的符号法则:

正数的任何次幂都是正数; 负数的奇次幂是负数; 负数的偶次幂是正数。

(6) 用计算器进行实数的运算

(7) 有理数的运算法则: 运算律在实数范围内同样适用。

(8) 在实数运算中, 当遇到无理数, 并且要求出结果的近似值时, 可以按照所要求的精确度用相应的近似有限小数, 代替无理数。再进行计算。

(9) 二次根式的加、减、乘、除运算也是实数的运算, 放于二次根式单独讨论, 本节有较少的联系。

(10) 三角函数值放于解直角三角形中单独讨论。本节中, 在实数的混合运算中也有较少的联系, 这就需要记忆特殊角的三角函数值。

(11) 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° 角的三角函数值表

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot A$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

要结合图形及此表, 熟记这些特殊角度的各三角函数值。

注意: ①为了好记, 此表也可改为如下表。

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$
$\cos A$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$

(续表)

$\lg A$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$ (不存在)
$\operatorname{ctg} A$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$ (不存在)	$\sqrt{\frac{3}{1}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$

②另外 30° , 45° , 60° 的正弦、余弦、正切值也可用下面口诀记忆: 1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 9, 27, 弦比 2, 切比 3, 分子根号别忘添。其中余切值, 可利用正切与余切值互为倒数求得。

2. 实数的大小比较:

(1) 利用数轴比较实数的大小: 在数轴上的点对应的数, 右边的总比左边的大。

(2) 利用绝对值比较实数的大小: 两个负数比较大小, 绝对值大的反而小。

(3) 利用运算比较有理数的大小: 如比较 a 与 b 的大小, 常用下面方法:

若 $a - b > 0$, 则 $a > b$; 若 $\frac{a}{b} > 1$, 且 a, b 均为正时 $a > b$

若 $a > 0, b > 0, a^2 > b^2$ 则 $a > b$;

(4) 逆用幂的性质。例如: 比较 3^{35} , 4^{44} , 5^{33} 的大小

解: $\because 3^{35} = (3^5)^{11}, 4^{44} = (4^4)^{11}, 5^{33} = (5^3)^{11}$ 而 $3^5 = 243, 4^4 = 256, 5^3 = 125$
 $5^3 < 3^5 < 4^4 \therefore 5^{33} < 3^{35} < 4^{44}$

二、各类题型的例题

例 1 计算

$$1. \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \tan 60^\circ - (-2001)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$2. \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - (2001 + \sqrt{2})^0 + (-2)^2 \times \sqrt{\frac{1}{16}} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$3. (-2)^3 - 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \times (1 - \sqrt{3})^0$$

解: (1) 根据分母有理化的法则, 得 $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$; $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$; 根据零指数的意义 ($a \neq 0$ 时, $a^0 = 1$) 可得 $(-2001)^0 = 1$; 由负整数指数的意义可得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ 。

(2) 类似可得 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$, $(2001 + \sqrt{2})^0 = 1$, $(-2)^2 = 4$, $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ 。

(3) 根据乘方的意义可得 $(-2)^3 = -8$; 根据绝对值的意义得 $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$; 根据负整数指数幂的意义 (若 m, n 为整数, p 为正整数, 则 $\left(\frac{n}{m}\right)^{-p} = \frac{1}{\left(\frac{n}{m}\right)^p} = \left(\frac{m}{n}\right)^p$)

可得 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$ 。

解: (1) 原式 $= 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 + 2 = 3$

$$(2) \text{原式} = 3 - 1 + 4 \times \frac{1}{4} + \sqrt{2} + 1 = 4 + \sqrt{2}$$

$$(3) \text{原式} = -8 - \frac{1}{2} + 9 \times 1 = \frac{1}{2}$$

例 2 1. 当 $0 < x < 1$ 时, x^2 、 x 、 $\frac{1}{x}$ 的大小顺序是

()

A. $\frac{1}{x} < x < x^2$

B. $\frac{1}{x} < x^2 < x$

C. $x^2 < x < \frac{1}{x}$

D. $x < x^2 < \frac{1}{x}$

2. 将 $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$, $(-2)^0$, $(-3)^2$ 这三个数按从小到大的顺序排列, 正确的结果是 ()

A. $(-2)^0 < \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} < (-3)^2$

B. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} < (-2)^0 < (-3)^2$

C. $(-3)^2 < (-2)^0 < \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

D. $(-2)^0 < (-3)^2 < \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

解: 本题主要考查实数大小的比较, 实数大小比较的方法有多种, 下面给出此题的两种解法。

解法一: (比较法)

$$\because 0 < x < 1, \therefore 1-x > 0, x-1 < 0, x+1 > 0$$

$$\therefore x-x^2 = x(1-x) > 0$$

$$\therefore x > x^2$$

$$\text{又 } x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x} < 0$$

$$\therefore x < \frac{1}{x} \quad \therefore x^2 < x < \frac{1}{x}$$

解法二: (特殊值法)

$$\because 0 < x < 1, \therefore \text{取 } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{则有 } \frac{1}{x} = 2, x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{于是由 } \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 2, \text{ 可知}$$

$$x^2 < x < \frac{1}{x}$$

解: 1. C; 2. A

例3 计算: $(+6) + \left(+\frac{1}{4}\right) + (-3.3) + (+3) + (-6) + (+0.3) + (+8) + (+6) - (-16) + \left(-6\frac{1}{4}\right)$

解法一: 原式 = $\left[(-6) + \left(+\frac{1}{4}\right) + (+3) + (+0.3) + (+8) + (+6)\right] +$
 $\left[(-3.3) + (-6) + (-16) + \left(-6\frac{1}{4}\right)\right]$
 $= (+23.55) + (-31.55)$
 $= -8$

解法二: 原式 = $\left[(+6) + \left(+\frac{1}{4}\right) + \left(-6\frac{1}{4}\right)\right] + [(-3.3) + (+3) + (+0.3)] + [(+6) + (+6)] + [(-16) + (+8)]$
 $= 0 + 0 + 0 + (-8)$
 $= -8$

评析: 解法一是把正数与负数分别结合相加的方法, 当然比逐个相加简单, 但是全面观察计算式子的特点, 我们发现在加数中有的是互为相反数, 有的是几个数相加得零, 因而采用解法二更为简单, 所以做多个有理数相加的题目时, 必须先审题, 分析特点, 有无更简单的方法, 然后再动手去做。

例4 计算: $\left(-2\frac{1}{7}\right) \times (-1.2) \div \left(-1\frac{2}{5}\right)$

解: 原式 = $\left(-\frac{15}{7}\right) \times \left(-\frac{6}{5}\right) \div \left(-\frac{7}{5}\right)$
 $= -\frac{15}{7} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{7}$

$$= -1\frac{41}{49}$$

评析：先将小数转化为分数，将带分数转化为假分数，除法转化乘法。

例5 计算： $71\frac{15}{16} \times (-8)$

$$\begin{aligned}\text{解：} 71\frac{15}{16} \times (-8) &= (72 - \frac{1}{16}) \times (-8) \\ &= 72 \times (-8) - \frac{1}{16} \times (-8) \\ &= -576 + \frac{1}{2} = -575\frac{1}{2}\end{aligned}$$

例6 计算： $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

例7 计算： $0.7 \times 1\frac{4}{9} + 2\frac{3}{4} \times (-15) + 0.7 \times \frac{5}{9} + \frac{1}{4} \times (-15)$

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= \left(0.7 \times 1\frac{4}{9} + 0.7 \times \frac{5}{9}\right) + \left[2\frac{3}{4} \times (-15) + \frac{1}{4} \times (-15)\right] \\ &= 0.7 \times \left(1\frac{4}{9} + \frac{5}{9}\right) + \left(2\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \times (-15) \\ &= 0.7 \times 2 + 3 \times (-15) \\ &= -43.6\end{aligned}$$

评析：正逆应用运算律是有理数运算中的一种重要方法，要分析算式中数字结构的特点，灵活应用。

例8 计算： $33.1^2 \div 3\frac{3}{4} - \frac{(-2)^2}{15} \times 16.9^2$

$$\begin{aligned}\text{解：原式} &= 33.1^2 \div \frac{15}{4} - \frac{4}{15} \times 16.9^2 \\ &= 33.1^2 \times \frac{4}{15} - \frac{4}{15} \times 16.9^2 \\ &= (33.1^2 - 16.9^2) \times \frac{4}{15} \\ &= (33.1 + 16.9) \times (33.1 - 16.9) \times \frac{4}{15} \\ &= 50 \times 16.2 \times \frac{4}{15} \\ &= 216\end{aligned}$$

评析：逆用运算律后对 $33.1^2 - 16.9^2$ 可运用平方差公式求解。

三、基础题

(一) 选择题

1. 下列说法正确的是

- A. 两个负数相加，绝对值相减
B. 正数加正数，和为正数；负数加正数，和为负数
C. 两个正数相加，和为正数；两个负数相加，和为负数
D. 两个有理数相加，等于它们的绝对值相加

答案：C

解析：根据有理数加法法则 A, B, D 都是错误的，故 C 正确。