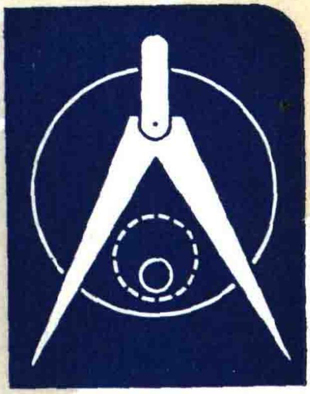
ZHONGXUE JIHE ZUOTU



中学几何作图

贵州人民出版社

中学几何作图

易康畏

贵州人民出版社

中 学 几 何 作 图

易 康 锻

贵州人民出版社出版
（贵阳市延安中路6号）
贵州新华印刷厂印刷　贵州省新华书店发行

787×1092毫米　32开本　6.125印张　127千字
1982年5月第1版　1982年5月第1次印刷
印数1—10,300

书号7115·623　定价0.44元

前　言

提起几何作图，大家都知道这是中学几何教学中存在的薄弱环节。平时，我们常看到一些基础较差的学生，他们对基本作图法不甚了了，甚至连作图公法及其约定也不知道；同时，我们也常看到一些学有余力的学生，他们为了解决“三等分角”、“立方倍积”、“化圆为方”等作图难题而暗自绞尽脑汁，殊不知这些难题乃是在十八世纪数学家们就已证明了的尺规作图不能问题。

本书主要就是为着上述两种读者以及希望看到有关几何基本作图法系统资料的青年教师而写的。为此，本书本着循序渐进、由浅入深的原则，分为三章，通俗易懂地介绍和阐述了几何作图的基本知识，常用的几何作图法，可作线段定理及尺规作图可能性准则，以期对那些基础较差的学生有所裨益，同时也使那些学有余力的学生不致“歧路亡羊”，而把他们宝贵的时光，用到苦练基本功、钻研新问题上面去。

不少老师和同学对本书一些章节的编写，曾提出过宝贵意见，在此表示感谢！

限于笔者水平，书中不当之处在所难免，恳望读者指正。

易康畏

一九八一年七月

写于铜仁师专

目　录

第一章　基本知识

§1.1　作图题和条件

什么是几何作图题呢?

初中二年级同学，学习全日制十年制学校初中数学课本几何第一册时，开始接触到几何学．在最初的一二个课时内，会遇到这样一个例题:“已知线段a，用直尺和圆规作一条线段使它等于$3a$”.这就是一个几何作图题．本书是专门谈这类问题及其解决方法的．

分析一下上面这个题目，其中“已知线段a”是题目给出的条件，作“一条线段”是要求作出的图形，“使它等于$3a$”是对要求作出的图形指定符合的条件．今后，在没有必要分别两种不同含义的条件的情况下，就把它们统称为条件。“用直尺和圆规”这句话有它传统的特定内容，不是三言两语讲得清楚的，放到本章第3节中去专门阐述．总起来说，我们讲的**几何作图题，就是给出某些条件，用直尺和圆规，作出所需要的图形。**

如果你想拟几个作图题来练练基本功，那么，首先必须使条件符合下述**两点要求**：

（1）**条件之间不能矛盾**．否则，作起图来，满足了这一条，抵触另一条，始终无法作出一个满足所有条件的图形来．例如：以定长为边，求作一个四边不相等的正方形．我

们知道，"四边相等"就是正方形的一个条件．现在，要求作出来的四边形既是正方形又要四边不相等，到哪里去找呢？今后，把这类条件矛盾的问题叫做**"几何作图不合理问题"**．

（2）**条件要不多不少**．不要认为条件越多越好，你看(1)中所说的条件矛盾的例子，不就是因为多了一个"四边不相等"的条件所造成的吗？此外，还有一种情况，表现在表面上看起来是不同的两个条件，但实际上是可以互相推导出来的，这种情况我们叫它为"条件互不独立"．例如：求作一个对角线互相平分的平行四边形．我们知道，"对边平行"的四边形是平行四边形，所以不能忘记，"对边平行"在这里是对所求作的四边形的一个指定符合的条件．而这个条件与"对角线互相平分"是可以互相推得的，取消其中任何一个都不影响整个问题，就是说，有一个条件多余了．

条件少了也会出现两种情况：一是条件太少了，少得使所讨论的问题无什么价值．例如，已知一边，求作三角形．可以这样下手解决：除去过这边的直线外，在平面上任意找一点，与这个已知边的两个端点连接起来，构成三角形，问题就这样被解决了．可是，这个过程到底给了我们多少启发呢？

但是，另外一种情况却很值得我们重视．先看一个例子：已知线段$AB=l$，高h，试求一点C，使$\triangle ABC$的面积等于$\frac{1}{2}lh$．因为平行线间的距离处处相等，我们作两条直线m、m'，它们都与AB平行，而且与AB的距离都等于h．这时，在m（或m'）上任意找一点P与A、B相连，所构成的三角形都符合条件（图1）。题目仅仅要求作出一点，找到的

却是无穷多个点，它们分别位于m、m'两条直线上．因此，问题的解是确定不下来的．可是另一方面，这里却求出了**符合条件的点的轨迹**．设想再**增加一个条件**："使得所求的点在AB的垂直平分线上"，这时，**问题的解就进一步被确定**在直线与直线的交点上．图1中的C、C'都符合条件．正是这种点的轨迹的特殊意义，今后用到作图中去，作用不小．

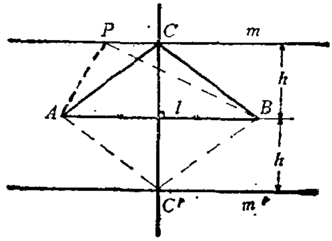


图1

由于条件不足，造成适合条件的解多得无穷，这种问题叫"几何作图不定问题"。

是不是条件符合了上述两点要求，图形就一定作得出来呢？这个结论下不得，请看下面的两个例子：

1）已知三边，求作三角形．这个问题的条件，不能说它违背了上述两点要求，但是，若给出的三边的长度不恰当，如有一边大于或等于其它两边之和，你能作成这种三角形吗？读完本章后就会明白，这种情况只好移到图形变化范围的讨论中去了．

2）已知线段a，求作线段x，使得满足关系式：

$$x^3 = 2a^3 (\text{或} x = \sqrt[3]{2}\,a).$$

这个问题，也找不出半点毛病，作得出吗？当你看完本书第三章后就知道这是个什么样的问题了．

因此，必须慎重指出：上述两点要求是对条件提出的必要性要求，不是图形可以作出来的充分条件．

§1.2 作图公法

有时，我们可以听到这样一句赞美话："他呀，真聪明，什么问题都能说出个道理来!"其实，如果真的有人对什么问题都能说出个道理来的话，那干吗还要搞科学研究呢？让我们分析一下讲道理到底是怎么回事！归根结底，不过是拿一个概念去解释另一个概念，拿一个道理去说明另一个道理。设想我们来一个盘根问底，反过去追那个"作为根据的道理"的道理，到头来会产生什么结果呢？不管是谁，他都只有用"那是为实践所证实了的当然的事实"来摆脱困境。谁若不信，就请他讲一下"在所有连结两点的线中，线段最短"这个道理吧。其实，连猫儿都知道有这么回事。这只要观察一下猫儿捕老鼠就知道了！你看，猫儿忽喇喇地直追过去。谁又见过猫儿摇摇摆摆地走到老鼠跟前呢？

这到底是怎么回事？如果我们仔细地回忆一下教科书中关于定义、公理、定理这一节中所讲过的内容，就会恍然大悟了！书中有这样一段话："……**为人类长久以来的实践所证实，不用推理的方法加以证明，而作为证明其他命题时推理的根据，这样的命题叫做公理**"。* 这里明明白白地说公理是作为证明其他命题时推理的根据，也就是说，公理是作为推理的起点．如果我们反追到了某条公理身上，还能用什么道理去解释它呢？于是只好说"那是为实践所证实了的当然的事实"了．

几何作图法一开始也面临着一个确定作图起点的问题，即不用推理的方法加以证明就认定为正确的方法，用它来作为一切作图的根据，不过这里不称为"公理"，而是叫做"**作图公法**"．

（1）**定直线公法**

通过两个已知点可以作一条直线（或者说：两点间可连一条线段；一条线段可以任意延长）．

（2）**作圆公法**

已知圆心和半径可作一圆。

（3）**作点公法**

两已知直线，一已知直线和一已知圆，或两已知圆，如果相交，可以作出它们的交点。

一条约定：在已知直线上或直线外都可任意取点．

---

* 全日制十年制学校初中数学课本几何第一册第45页。

§1.3　尺规及其功能

当表扬人时，我们常会听到一个评语："守规矩"，而批评人时，又可听到评语："不守规矩"，这"规矩"两字到底是指什么？

原来，规就是圆规，矩是木工师傅使用的曲尺（又称角尺），是用两条直尺依垂直方向粘结而成的工具．规是用来画圆、画弧的。矩是用来画矩形、量线段的。

几何作图法来源于生产实践，当然有它自己的"规"、"矩"．

这里的"规"还是**圆规**，它的两条腿是开闭自如的．不过，这里的"矩"却是**没有刻度的直尺**。人们把**这两个工具简称为"尺规"**．它们的作用是：直尺用来画直线或线段；圆规用来画圆、画弧，卡已知线段的长（不是量几分之几）．结合着作图公法来讲，就是用直尺来完成第一公法，用圆规来完成第二公法，用尺规交替使用来完成第三公法．

一条约定：在一个作图过程中，只允许有限次使用尺规．

这些就是§1.1中说过的"用直尺和圆规"那句话的特定内容。

如果一个作图是按约定用尺规完成的，又符合作图公法，我们就说这个作图是使用了"合理的几何方法"．

为了使读者正确理解尺规的功能范围，选取两个较有趣味的问题，作个具体说明：1）所谓"单规找圆心"问题；2）将任一给定的角三等分问题．先把所谓解法罗列出来，

再分析其中存在的问题。

1）任意给定一圆，试仅用圆规找出圆心。

作法 如图2：

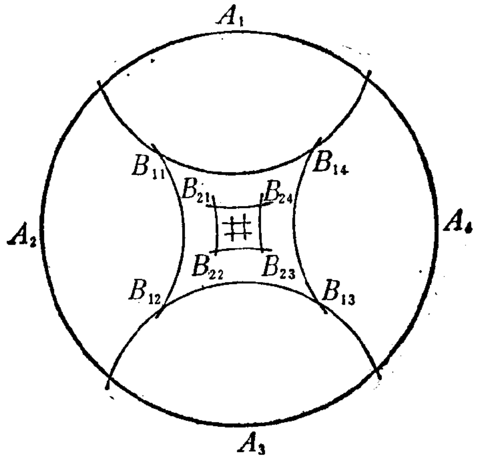


图2

①在圆周上找四个大体上、下、左、右对称的点A_1、A_2，A_3，A_4，分别以它们为圆心，以同一个适当的长r_1为半径画弧，使它们两两相交，构成一个凹的曲边四边形$B_{11}B_{12}B_{13}B_{14}$。

②依然以A_1、A_2、A_3、A_4为圆心，调整圆规，取$r_2>r_1$为半径画弧，第二次构成凹的曲边四边形$B_{21}B_{22}B_{23}B_{24}$。

……

就这样不停地作下去，得到一系列凹的曲边四边形。这列曲边四边形逐渐趋于一点，这点就是所求的圆心。

2）已知$\angle AOB$，求作它的一条三等分角线。

作法 如图3：

①延长BO至D.

②过O作$EO\perp BD$.

③作直线AD交OA于A，交BD于D，交OE于E，且使得

$$OA=\frac{1}{2}ED.$$

④过O作$OM\parallel DA$.

OM就是$\angle AOB$的一条三等分角线.

证明 取DE的中点F，连FO. 在直角$\triangle EOD$及$\triangle AOF$中.

$$\because\quad FD=\frac{1}{2}DE=OA\ (\text{作图}),$$

$$FO=FD$$

(在直角三角形中，斜边中点到三个顶点的距离相等)，

$$\therefore\quad FD=FO=OA.$$

$$\therefore\quad \angle FAO=\angle AFO,\text{即}\angle DAO=\angle AFO,$$

$$\angle FDO=\angle FOD,\text{即}\angle ADO=\angle FOD.$$

又 $\angle AFO=\angle ADO+\angle FOD=2\angle ADB$

（三角形外角定理，等量代换），

$$\therefore\quad \angle AOB=\angle ADB+\angle DAO=\angle ADB+2\angle ADB$$
$$=3\angle ADB$$

（三角形外角定理，等量代换），

$$\therefore\quad \angle ADB=\frac{1}{3}\angle AOB.$$

而 $OM\parallel DA$（作图），

$\therefore\quad \angle MOB=\angle ADB=\frac{1}{3}\angle AOB.$

$\therefore\quad OM$是$\angle AOB$的一条三等分角线.

现在分析存在的问题. 1)题解法中，类似“在圆周上找四个大体上、下、左、右对称的点A_1、A_2、A_3、A_4”这样的说法是极其模糊不清的. 几何学是一门逻辑推演的学问，是忌讳这种说法的.

“调整圆规……不停地作下去”这不正是在无限次地使用圆规吗？明显地违背了对工具的使用约定.

解题过程中缺少证明，仅仅是凭直观、凭想象认为圆心总是会找得到的. 其实，只要写出证明，如果你学过极限，就会立即发现必然地会引入极限概念，但这又超越初等几何的范围. 而且，正好是这个取极限过程，对应着无限次地使用圆规的过程.

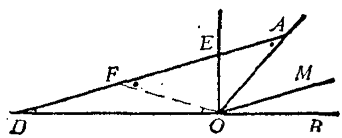


图 3

关于 2）题. 注意作法中第③步“且使得

$$OA=\frac{1}{2}ED"$$

这句话，如何来完成这个任务？须知 OA、AD 都是未知线段，要达到

$$OA=\frac{1}{2}ED$$

这个目的，用尺规是不可能的.

以后，**把由于作图工具、公法的限制而引起无法作图的**

问题称为“几何作图不能问题”。

从这里也看到，如果放宽限制，引进新的数字概念，引进新工具，就往往可以化不能为可能。今天，科学技术发达，工具日新月异，当联系到生产实际作图时，谁还死硬地限制只准使用尺规，恰恰相反，需要的是解放思想，不断革新，运用各种可能的方式方法，创造性地解决问题。不过，我们的着眼点是扎扎实实练习基本功，巩固基本知识，训练逻辑思维能力，提高分析问题和解决问题的能力。只要“不钻牛角尖”，不标榜难题，尺规作图法仍有积极意义，正如有了电子计算机，还必须学习加、减、乘、除是一个道理。

§1.4 解作图题的步骤

解几何作图题，一般来说，应遵循以下六个步骤：

（1）**已知** 详细整理题目中给出的各项条件，分别用英文字母（或希腊字母）标明各已知元素——点、线、角、弧等。

（2）**求作** 说明所求作的图形以及对图形指定符合的条件。

（3）**分析** 这是确定作图方法的关键步骤。分析的好坏优劣，对解题有着直接的影响。分析的顺序一般是：①假定所求作的图形已经作成，画出设想已具备了所要求的各项条件的草图；②若有必要，在草图中添画有关的点、线、角、弧等补充内容；③详细考察图中各元素的数量、位置、相互关系。尤其是已知元素间的关系，应标以特别的记号，甚至使用不同的颜色标示出来。如果发现图形中某一部分可

以先行作出，就把它确定下来．好比起工棚，先搭好一个架子再说；④深入研究推导已知元素和未知元素、已知部分和未知部分之间的关系，全局着眼，重点突破，逐步推进，逐项明确，直到所求作的图形完全确定，并草拟出作图顺序为止．

（4）**作法** 依次叙述作图方法，画出求作的图形．每作一点、一线、一角、一弧都要分别定名．要注意不能违背公法，避免造成前述所谓单规找圆心、三等分角中的那种"超公法"错误．

（5）**证明** 证明所作图形具备了所要求的全部条件．

（6）**讨论** 就所设条件同图形间的关系，考虑各种可能情况，图形变化范围．例如前述已知三边求作三角形问题，在已知三边这个条件下，还有其中一边可能小于、等于、大于其他两边的和等情况．随着这些情况不同，图形就要起变化：或者同时可能作出几个；或者只可能作一个；或者根本就作不成图形．把各种可能情况都考虑进去，问题就全面解决了．从这里也可以看到，作图题的要求是很严格的，也正因为如此，它有利于训练逻辑思维能力，提高分析问题和解决问题的本领．

另外，关于解的数目算法问题，它是由条件来确定的．如果条件中不但对图形大小形状有要求，而且指定了位置，例如：过已知直线外一已知点作此线的垂线，这种问题叫定位问题．凡属定位问题，能作出多少个适合条件的图形就说有多少个"解"．假设条件只涉及到图形形状和大小而无位置要求，那么，如果作出来的图形仅是位置不同的全等形，则不管能作出多少个，都只能算一解．只有形状大小不等的

图形才算是不同的解．例如已知半径求作一圆．这类问题叫活位问题．

解作图题要经过以上六个步骤，具体书写时是否每道题都要硬套这个格式呢？形式为内容服务，在不同的内容下，具体情况具体处理，作一定的变通是可以的．事实上，当作过一些练习后，就会发现，这六个步骤都不是孤立无关的．例如：问题的讨论部分时常在分析中遇见了，而分析时就必须考虑解法的正确性，有时在作法部分也包含有证明和讨论的因素．尤其是在某些作图方法中，例如代数解析法、反演作图法，它们的证明部分基本上是分析过程的逆转，即是将分析的顺序颠倒转来写，就成了证明．了解了这个特点后，解决这类问题每次都烦琐地、八股式地书写一通，倒不如把精力集中到分析问题上去．总之，因为这六个步骤存在着密切的内在关系，就给写解法时作一些变通带来了根据．现在教科书中一般只写已知、求作、作法、证明这四个步骤是有道理的．但不管怎么说，要完善地解决一个作图题，用前述六个步骤来全面检查，却也是完全必要的．

§1.5 基本作图法

世界闻名的法国大数学家笛卡儿（1596—1650），在他研究问题方法的总结中写道：把问题尽可能分成细小的组成部分，再分别深入地研究其中每一个组成部分．

这份经验告诉我们，凡是决心做出一点学问的人，总是从基本功上狠下力气开始做起的．

今后，放在你面前的几何作图题，可能比较复杂，但它