工程数值分析题解

王立秋 魏焕彩 周学圣 编著

山东大学出版社
Shandong University Press

工程数值分析题解

王立秋　魏焕彩　周学圣　编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数值分析题解/王立秋,魏焕彩,周学圣编著.—济南:
山东大学出版社,2004.6
ISBN 7-5607-2786-7

Ⅰ.工
Ⅱ.①王…②魏…③周…
Ⅲ.数值计算-高等学校-解题
Ⅳ.0241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 054683 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
山东新华印刷厂德州厂印刷
850×1168 毫米　1/32　18.5 印张　477 千字
2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月第 1 次印刷
印数:1—1800 册
定价:32.00 元

内容简介

本题解是与教材《工程数值分析》配套使用的参考用书．全书分两部分：第一部分为习题；第二部分为解答．为便于查用，书末附有解非线性代数方程延拓法的通用计算程序、著名的积分、数值微积分公式等五个附录．本题解对原书作了充实、深化和提高．选题有浅有深，有经典有近代，有作者的最新研究成果．语言简洁、一题多解、技巧性高、选题面宽、概括性强是本书的鲜明特点．书中包括了通常数值分析的基本内容，与传统的大学基础数学融为一体，使有高等数学、线性代数、微分方程知识的读者即可顺利阅读．

作者简介

王立秋　原籍山东，1962 年生. 于 1982 年、1985 年分别获山东工业大学（现山东大学）学士、硕士学位，1994 年获加拿大 Alberta大学博士学位. 现为香港大学机械工程系副教授. 主要从事微尺度传递现象、多尺度传递现象、非线性传递现象数值计算、传递现象稳定性及分叉等方面的研究工作. 发表论文 100 余篇，出版著作 4 部.

魏焕彩　原籍福建，1946 年生. 1969 年毕业于厦门大学数学系. 现为山东大学数学与系统科学院教授. 主要从事工程数学方面的教学、研究工作. 发表论文 20 余篇，出版著作 4 部.

周学圣　原籍浙江，1934 年生. 1958 年毕业于山东大学数学系. 现为山东大学数学与系统科学院教授，香港大学助理研究员. 主要从事偏微分方程和数值分析方面的教学、研究工作. 发表论文 20 余篇，出版著作 15 部.

前　言

本题解是与作者编著的教材《工程数值分析》配套使用的参考书，章节的安排与教材一致．为便于查用，在书末还有解非线性代数方程组延拓法的通用计算程序、著名的积分、数值微积分公式、微分方程数值解公式等5个附录．

本题解对教材作了充实、深化和提高．例如，补充了第二类Чебышв多项式，开型Newton-Cotes求积公式，非线性方程的Steffensen迭代法，Бернштейн多项式，等参元，复值函数的正交性，三角插值和反插值等内容．

在编题和解题中，充分注意了应用背景，理论与实际应用相结合．语言简洁、一题多解、技巧性高、选题面宽、概括性强是本书的特点．选材有浅有深，有经典有近代，还有作者的研究成果．全书与传统的大学基础数学融为一体，使有高等数学、线性代数、微分方程方面知识的读者即可顺利阅读．

作者的研究工作得到了香港特区科研基金会(RGC)的资助，得到了山东大学出版社的领导和职工的大力支持．在本书的出版过程中，姜明编辑付出了大量的辛勤劳动．在此，向上述各单位的领导和有关同志表示衷心的感谢．

由于作者的知识疏浅，难免有不足之处，希望广大读者批评指正．

作　者

于香港大学/山东大学

2004年7月

目　录

第一部分　习题

第一章　算法与误差

第一节　数值分析的研究对象与特点

1. 试举例说明:不能直接用 **Newton-Leibniz** 公式计算的定积分.哪些积分是不定积分中的可积型,即在初等函数范围内存在原函数?

2. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 5 阶非奇异阵,试问按 **Gramer** 法则求解线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A},\boldsymbol{b}\text{ 中的元素是全不为零的有理数}$$

并用行列式的定义求值,需要作几次乘除运算才可求出方程组的解?

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 20 阶行列式,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中增广矩阵的元素是全不为零的整数或小数.如果用 **Gramer** 法则解方程组,并用行列式的定义求值.为求解方程组,估计一下要作几次乘除运算?用每秒可作 1000 万次乘除运算的计算机计算,约需多少时间才能完成?

第二节　误差估计与有效数字

1. 若记正数 x 的相对误差限为δ,估计 $\ln x$ 的误差限.

2. 已知：x_i 的相对误差限为$\delta_i, i=1,2,\cdots;m$，y_i 的相对误差限为 $\eta_i, i=1,2,\cdots,n$. 记 $u=(x_1x_2\cdots x_m)/(y_1y_2\cdots y_n)$，证明：$u$ 的相对误差限

$$|e_r(u)|\leqslant\sum_{i=1}^{m}\delta_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

3. 在用仪表测量物理量中会碰到这样的实际问题：已知三个量 r,T,t 之间的关系为

$$r=(T-t)/t$$

试问 T,t 的相对误差怎么影响r 的相对误差？

4. 下列各数是经过四舍五入得到的近似数

$x_1^*=1.1021\qquad x_2^*=0.031\qquad x_3^*=385.6$

$x_4^*=56.430\qquad x_5^*=7\times10^5$

(1) 指出它们有几位有效数字.

(2) 估计下列近似数的误差限：

1) $x_1^*+x_2^*+x_4^*$　　2) $x_1^*x_2^*x_3^*$　　3) x_2^*/x_4^*

5. 测得矩形场地长 $l^*=110\text{m}$，宽 $b^*=80\text{m}$，已知误差限

$$|l-l^*|\leqslant\varepsilon_l^*=0.2\text{m}\quad|b-b^*|\leqslant\varepsilon_b^*=0.1\text{m}$$

求面积 $S^*=l^*b^*$ 的误差限 ε_S^* 和相对误差限ε_{Sr}^*.

6. 已知递推公式

$$x_n=x_{n-1}-\sqrt{783}/100,\quad x_0=28,n=1,2,\cdots$$

若按 5 位有效数字取近似值$\sqrt{783}=27.983$，求 x_{100}^*的误差限.

7. 已知自由落体路程 s 与时间的关系为$s=gt^2/2$，常数 g 为重力加速度. 若测量时间 t 时允许误差为 ±0.1 秒，试估计路程的误差与相对误差.

8. 为使计算球体体积 $V=4\pi R^3/3$ 时的相对误差限不超过 1%，问测量其半径时允许的相对误差限是多少？

第三节　算法的稳定性

1. 已知数列$\{x_n\}$满足递推公式

$$x_n = 10x_{n-1} - 1, \quad n = 1,2,\cdots$$

证明任意给出一个初值 x_0 的近似值 x_0^*，用递推公式求数列的后继项是数值不稳定的.

2. 构造计算积分

$$I_n = e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0,1,2,\cdots,8$$

稳定的递推公式，并计算各积分的近似值使其具有 3 位有效数字.

3. 设函数 $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$，通过误差分析，确定计算 $f(30)$的方法(已知开方用六位函数表).

4. 设 $f(x) = 10^7(1 - \cos x)$，计算或分析下列问题：

(1) 分别按公式 $f(x) = 10^7(1 - \cos x)$ 和 $f(x) = 2\times 10^7\sin^2(x/2)$计算 $f(2^\circ)$，取 $\cos 2^\circ = 0.9994$，$\sin 1^\circ = 0.0175$.

(2) 通过误差分析，判定哪个算法好.

(3) 说明用不好的计算公式想达到好的计算效果应采取什么方法.

5. 计算积分

$$I = \int_{100}^{101} \frac{1}{1 + x^2} dx$$

6. 解方程

$$x^2 + 62.10x + 1.000 = 0$$

7. 已知$(\sqrt{2} - 1)^6 = 0.0050\cdots$，取$\sqrt{2} = 1.4$，用下列几种算法进

行计算,并与精确值比较,看一下哪个算法最好,哪个算法最差.

(1) $(3-2\sqrt{2})^3$　　(2) $1/(\sqrt{2}+1)^6$

(3) $1/(3+2\sqrt{2})^3$　　(4) $99-70\sqrt{2}$

8. 计算$(1.94)^2e^{0.05}(3.06)^3$,并估计近似值的误差限.

第二章　线性代数方程组的解法

第一节　Gauss 消去法

1. 分别利用 **Gauss 消去法**、***LU* 分解法**、**Jordan 消去法**求解四元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 5 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 3\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\ 7\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 n 阶非奇异阵，导出用 ***LU* 分解法**求解 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 的计算公式，并讨论用其解方程组需要作几次乘除运算和加减运算.

3. 证明：(1)两下三角阵之乘积仍为下三角阵；(2)下三角阵之逆阵仍为下三角阵.

4. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为对称正定阵，证明或回答下列问题：

(1) 对任意的 $i\neq j$ 满足$|a_{ij}|<\sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 之绝对值最大的元素必落在主对角线上.

(3) 仿照矩阵的 ***LU* 分解**，将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列元素除a_{11}外全化为零，记这样的方阵为 $\boldsymbol{A}^{(2)}$. 在 $\boldsymbol{A}^{(2)}$中划去第一行第一列剩下的 $n-1$阶方阵 A_2 仍然是对称正定的方阵.

(4) 上述结论用于解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有何意义？

5. 已知线性方程组

$$\begin{cases} 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 = -7 \\ 6x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 6 \end{cases}$$

(1) 用 **Gauss 列主元消去法**求解,运算过程取 5 位有效数字.

(2) 记方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三角分解描述求解过程,并指出行列式 $\det\boldsymbol{A}$ 之值.

6. 设 n 阶阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$按 **Gauss 消去法**化为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_1^T=(a_{12}\cdots a_{1n}), \boldsymbol{A}_2=(a_{ij}^{(2)}), \quad i,j=2,3,\cdots,n$$

试证:(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵,则 $\boldsymbol{A}_2$ 也是对称阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 按行严格对角占优,即

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i=1,2,\cdots,n$$

则 $\boldsymbol{A}_2$ 也按行严格对角占优.

(3) 按行严格对角占优阵必为非奇异阵.

(4) 分析上述各结论在解线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中的意义.

7. 设 $\boldsymbol{U}=(u_{ij})$为 n 阶三角阵,推导或计算下列问题:

(1) 当 $\boldsymbol{U}$ 为上三角与下三角阵时,导出 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ux}=\boldsymbol{b}$ 的求解公式,式中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$.

(2) 计算一下用(1)得出的公式求解一个三角方程组用多少次乘除法.

(3) 导出三角阵 $\boldsymbol{U}$ 求逆 $\boldsymbol{U}^{-1}$的公式.

8. 用平方根分解法求下列方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$