

工程数值分析题解

王立秋 魏焕彩 周学圣 编著



山东大学出版社
Shandong University Press

工程数值分析题解

王立秋 魏焕彩 周学圣 编著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数值分析题解/王立秋,魏焕彩,周学圣编著. — 济南:
山东大学出版社, 2004. 6
ISBN 7-5607-2786-7

I. 工

II. ①王…②魏…③周…

III. 数值计算 — 高等学校 — 解题

IV. 0241 — 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 054683 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

山东新华印刷厂德州厂印刷

850×1168 毫米 1/32 18.5 印张 477 千字

2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—1800 册

定价:32.00 元

版权所有,盗印必究

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社营销部负责调换

内容简介

本题解是与教材《工程数值分析》配套使用的参考用书.全书分两部分:第一部分为习题;第二部分为解答.为便于查用,书末附有解非线性代数方程延拓法的通用计算程序、著名的积分、数值微积分公式等五个附录.本题解对原书作了充实、深化和提高.选题有浅有深,有经典有近代,有作者的最新研究成果.语言简洁、一题多解、技巧性高、选题面宽、概括性强是本书的鲜明特点.书中包括了通常数值分析的基本内容,与传统的大学基础数学融为一体,使有高等数学、线性代数、微分方程知识的读者即可顺利阅读.

作者简介

王立秋 原籍山东,1962年生.于1982年、1985年分别获山东工业大学(现山东大学)学士、硕士学位,1994年获加拿大Alberta大学博士学位.现为香港大学机械工程系副教授.主要从事微尺度传递现象、多尺度传递现象、非线性传递现象数值计算、传递现象稳定性及分叉等方面的研究工作.发表论文100余篇,出版著作4部.

魏焕彩 原籍福建,1946年生.1969年毕业于厦门大学数学系.现为山东大学数学与系统科学院教授.主要从事工程数学方面的教学、研究工作.发表论文20余篇,出版著作4部.

周学圣 原籍浙江,1934年生.1958年毕业于山东大学数学系.现为山东大学数学与系统科学院教授,香港大学助理研究员.主要从事偏微分方程和数值分析方面的教学、研究工作.发表论文20余篇,出版著作15部.

前 言

本题解是与作者编著的教材《工程数值分析》配套使用的参考书,章节的安排与教材一致.为便于查用,在书末还有解非线性代数方程组延拓法的通用计算程序、著名的积分、数值微积分公式、微分方程数值解公式等5个附录.

本题解对教材作了充实、深化和提高.例如,补充了第二类 Чебышев 多项式,开型 Newton-Cotes 求积公式,非线性方程的 Steffensen 迭代法,Бернштейн 多项式,等参元,复值函数的正交性,三角插值和反插值等内容.

在编题和解题中,充分注意了应用背景,理论与实际应用相结合.语言简洁、一题多解、技巧性高、选题面宽、概括性强是本书的特点.选材有浅有深,有经典有近代,还有作者的研究成果.全书与传统的大学基础数学融为一体,使有高等数学、线性代数、微分方程方面知识的读者即可顺利阅读.

作者的研究工作得到了香港特区科研基金会(RGC)的资助,得到了山东大学出版社的领导和职工的大力支持.在本书的出版过程中,姜明编辑付出了大量的辛勤劳动.在此,向上述各单位的领导和有关同志表示衷心的感谢.

由于作者的知识疏浅,难免有不足之处,希望广大读者批评指正.

作 者

于香港大学/山东大学

2004年7月

目 录

前 言	(1)
第一章 算法与误差	(3,109)
第一节 数值分析的研究对象与特点	(3,109)
第二节 误差估计与有效数字	(3,110)
第三节 算法的稳定性	(5,113)
第二章 线性代数方程组的解法	(7,118)
第一节 Gauss 消去法	(7,118)
第二节 向量和方阵的范数	(9,129)
第三节 病态方程组 条件数	(11,135)
第四节 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法	(13,139)
第五节 超松弛迭代法	(17,153)
第六节 最速下降法与共轭斜量法	(19,159)
第三章 方程求根和非线性方程组的解法	(21,165)
第一节 求根的基本问题及分析方法	(21,165)
第二节 迭代法	(22,169)
第三节 Newton 迭代法	(23,177)
第四节 非线性方程组的解法	(25,183)
第四章 插值法	(28,194)
第一节 Lagrange 插值多项式	(28,194)
第二节 Newton 插值多项式	(30,200)
第三节 Hermite 插值	(32,211)

第四节	分段插值和抛物插值	(34,219)
第五节	样条插值	(36,225)
第六节	多元函数的插值方法	(38,238)
第五章	函数逼近	(42,250)
第一节	逼近的概念	(42,250)
第二节	数据拟合的最小二乘法	(44,258)
第三节	几种常用的正交多项式	(46,264)
第四节	正交多项式的一般理论	(48,271)
第五节	正交多项式的应用	(49,281)
第六章	数值微积分	(52,300)
第一节	基本公式与一般概念	(52,300)
第二节	Newton-Cotes 公式	(54,309)
第三节	Romberg 算法	(56,318)
第四节	Gauss 求积公式	(57,326)
第五节	重积分的求积公式简介	(59,341)
第六节	数值微分	(60,347)
第七章	常微分方程数值解	(63,353)
第一节	Euler 方法	(63,353)
第二节	Runge-Kutta 方法	(65,361)
第三节	单步法的收敛性与稳定性	(66,369)
第四节	线性多步法	(67,373)
第五节	Milne-Hamming 方法	(69,386)
第六节	方程组和高阶方程的数值解	(70,391)
第七节	边值问题的数值解	(71,397)
第八节	线性差分方程解的结构 刚性方程	(72,402)
第八章	偏微分方程的差分解法	(75,409)
第一节	热传导方程的差分解法	(75,409)
第二节	椭圆型方程的差分解法	(78,420)

第三节	波动方程的差分解法	(81,433)
第九章	变分与偏微分方程的有限元解法	(84,442)
第一节	泛函与变分问题	(84,442)
第二节	Euler 方程和 остроградский 方程	(85,445)
第三节	变分原理	(86,450)
第四节	剖分与插值	(88,458)
第五节	椭圆型方程的有限元法	(90,470)
第六节	抛物型和双曲型方程的有限元解法	(92,488)
第七节	常微分方程边值问题的有限元法简介	(93,494)
第十章	矩阵特征值问题的数值解法	(95,503)
第一节	引言	(95,503)
第二节	乘幂法及其变形	(97,509)
第三节	Jacobi 算法	(98,516)
第四节	QR 算法	(99,520)
第十一章	解非线性方程组的延拓法	(102,533)
附录 I	解非线性代数方程组延拓法的通用计算程序	(538)
附录 II	著名积分	(552)
附录 III	数值微积分公式	(557)
附录 IV	微分方程数值解公式	(566)
附录 V	常见的偏微分方程差分格式	(574)
参考文献		(578)

第一部分 习题

第一章 算法与误差

第一节 数值分析的研究对象与特点

1. 试举例说明:不能直接用 **Newton-Leibniz** 公式计算的定积分. 哪些积分是不定积分中的可积型,即在初等函数范围内存在原函数?

2. 设 $A = (a_{ij})$ 为 5 阶非奇异阵,试问按 **Gramer** 法则求解线性方程组

$Ax = b$, A, b 中的元素是全不为零的有理数
并用行列式的定义求值,需要作几次乘除运算才可求出方程组的解?

3. 设 A 为 20 阶行列式,方程组 $Ax = b$ 中增广矩阵的元素是全不为零的整数或小数. 如果用 **Gramer** 法则解方程组,并用行列式的定义求值. 为求解方程组,估计一下要作几次乘除运算? 用每秒可作 1000 万次乘除运算的计算机计算,约需多少时间才能完成?

第二节 误差估计与有效数字

1. 若记正数 x 的相对误差限为 δ ,估计 $\ln x$ 的误差限.

2. 已知: x_i 的相对误差限为 $\delta_i, i=1, 2, \dots, m; y_i$ 的相对误差限为 $\eta_i, i=1, 2, \dots, n$. 记 $u = (x_1 x_2 \cdots x_m) / (y_1 y_2 \cdots y_n)$, 证明: u 的相对误差限

$$|e_r(u)| \leq \sum_{i=1}^m \delta_i + \sum_{i=1}^n \eta_i$$

3. 在用仪表测量物理量中会碰到这样的实际问题: 已知三个量 r, T, t 之间的关系为

$$r = (T - t) / t$$

试问 T, t 的相对误差怎么影响 r 的相对误差?

4. 下列各数是经过四舍五入得到的近似数

$$x_1^* = 1.1021 \quad x_2^* = 0.031 \quad x_3^* = 385.6$$

$$x_4^* = 56.430 \quad x_5^* = 7 \times 10^5$$

(1) 指出它们有几位有效数字.

(2) 估计下列近似数的误差限:

$$1) x_1^* + x_2^* + x_4^* \quad 2) x_1^* x_2^* x_3^* \quad 3) x_2^* / x_4^*$$

5. 测得矩形场地长 $l^* = 110\text{m}$, 宽 $b^* = 80\text{m}$, 已知误差限

$$|l - l^*| \leq \epsilon_l^* = 0.2\text{m} \quad |b - b^*| \leq \epsilon_b^* = 0.1\text{m}$$

求面积 $S^* = l^* b^*$ 的误差限 ϵ_S^* 和相对误差限 $\epsilon_{S^*}^*$.

6. 已知递推公式

$$x_n = x_{n-1} - \sqrt{783}/100, \quad x_0 = 28, n = 1, 2, \dots$$

若按 5 位有效数字取近似值 $\sqrt{783} = 27.983$, 求 x_{100}^* 的误差限.

7. 已知自由落体路程 s 与时间的关系为 $s = gt^2/2$, 常数 g 为重力加速度. 若测量时间 t 时允许误差为 ± 0.1 秒, 试估计路程的误差与相对误差.

8. 为使计算球体体积 $V = 4\pi R^3/3$ 时的相对误差限不超过 1%, 问测量其半径时允许的相对误差限是多少?

第三节 算法的稳定性

1. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式

$$x_n = 10x_{n-1} - 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

证明任意给出一个初值 x_0 的近似值 x_0^* , 用递推公式求数列的后继项是数值不稳定的.

2. 构造计算积分

$$I_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 8$$

稳定的递推公式, 并计算各积分的近似值使其具有 3 位有效数字.

3. 设函数 $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, 通过误差分析, 确定计算 $f(30)$ 的方法 (已知开方用六位函数表).

4. 设 $f(x) = 10^7(1 - \cos x)$, 计算或分析下列问题:

(1) 分别按公式 $f(x) = 10^7(1 - \cos x)$ 和 $f(x) = 2 \times 10^7 \sin^2(x/2)$ 计算 $f(2^\circ)$, 取 $\cos 2^\circ = 0.9994$, $\sin 1^\circ = 0.0175$.

(2) 通过误差分析, 判定哪个算法好.

(3) 说明用不好的计算公式想达到好的计算效果应采取什么方法.

5. 计算积分

$$I = \int_{100}^{101} \frac{1}{1+x^2} dx$$

6. 解方程

$$x^2 + 62.10x + 1.000 = 0$$

7. 已知 $(\sqrt{2} - 1)^6 = 0.0050\dots$, 取 $\sqrt{2} = 1.4$, 用下列几种算法进

行计算,并与精确值比较,看一下哪个算法最好,哪个算法最差.

(1) $(3 - 2\sqrt{2})^3$ (2) $1/(\sqrt{2} + 1)^6$

(3) $1/(3 + 2\sqrt{2})^3$ (4) $99 - 70\sqrt{2}$

8. 计算 $(1.94)^2 e^{0.05} (3.06)^3$, 并估计近似值的误差限.

第二章 线性代数方程组的解法

第一节 Gauss 消去法

1. 分别利用 Gauss 消去法、LU 分解法、Jordan 消去法求解四元线性方程组 $Ax = b$, 式中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶非奇异阵, 导出用 LU 分解法求解 n 元线性方程组 $Ax = b$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ 的计算公式, 并讨论用其解方程组需要作几次乘除运算和加减运算.

3. 证明: (1) 两下三角阵之乘积仍为下三角阵; (2) 下三角阵之逆阵仍为下三角阵.

4. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为对称正定阵, 证明或回答下列问题:

(1) 对任意的 $i \neq j$ 满足 $|a_{ij}| < \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$.

(2) A 之绝对值最大的元素必落在主对角线上.

(3) 仿照矩阵的 LU 分解, 将 A 的第一列元素除 a_{11} 外全化为零, 记这样的方阵为 $A^{(2)}$. 在 $A^{(2)}$ 中划去第一行第一列剩下的 $n-1$ 阶方阵 A_2 仍然是对称正定的方阵.

(4) 上述结论用于解线性方程组 $Ax = b$ 有何意义?

5. 已知线性方程组

$$\begin{cases} 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_4 = -7 \\ 6x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 6 \end{cases}$$

(1) 用 Gauss 列主元消去法求解, 运算过程取 5 位有效数字.

(2) 记方程组为 $Ax = b$, 用矩阵 A 的三角分解描述求解过程, 并指出行列式 $\det A$ 之值.

6. 设 n 阶阵 $A = (a_{ij})$ 按 Gauss 消去法化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}, a_1^T = (a_{12} \cdots a_{1n}), A_2 = (a_{ij}^{(2)}), \quad i, j = 2, 3, \cdots, n$$

试证: (1) 若 A 为对称阵, 则 A_2 也是对称阵.

(2) 若 A 按行严格对角占优, 即

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则 A_2 也按行严格对角占优.

(3) 按行严格对角占优阵必为非奇异阵.

(4) 分析上述各结论在解线性方程组 $Ax = b$ 中的意义.

7. 设 $U = (u_{ij})$ 为 n 阶三角阵, 推导或计算下列问题:

(1) 当 U 为上三角与下三角阵时, 导出 n 元线性方程组 $Ux = b$ 的求解公式, 式中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$.

(2) 计算一下用(1)得出的公式求解一个三角方程组用多少次乘除法.

(3) 导出三角阵 U 求逆 U^{-1} 的公式.

8. 用平方根分解法求下列方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$