題解中心

幾何學辭典

日本長澤龜之助 原著
薛德炯 吳載耀 編譯

上海新亞書店印行

題解中心

幾何學辭典

日本長澤龜之助原著
薛德炯 吳載耀編譯

上海新亞書店印行

本書經呈請內政部註冊執有警字 6041 號執照

中華民國卅八年 六月 五版

題解中心

幾何學辭典

精裝本基本定價二十八元六角

普及本基本價定十七元九角

（外埠酌加運費匯費）

原著者 長澤龜之助

編譯者 薛德炯 吳載耀

發行人 陳邦楨
上海河南路一五九號

印刷者 新亞書店

發行所 新亞書店
（Bo075） 上海河南路一五九號

編譯者言

余等自拋棄教書生涯,廁身於出版界,環顧同業現況,小說出品,車載斗量,科學書籍,寥若晨星,深感無以應國人之所需要,頗思有所貢獻.祇以自身對於科學,亦止淺嘗,何敢高鶩;力短心長,不僅余等已也!

二十一年夏,新亞書店以編譯日本長澤氏所著算學辭典相囑,當以茲事體大,未敢輕於嘗試,擱置者半年.翌年春,新亞又重申前議,竊思事在人爲,雖不無荊棘當前,祇在吾人能鼓勇猛晉,自有成功希望;因即由載耀編譯初稿,德炯加以修訂,閱時一載,積稿盈尺.於是即開始製版,除由呂君憲章,韓君寅生襄助繪圖,史君炳坤襄助校對外,余等復始終自任覆校,明知魯魚亥豕,在所不免,祇期能減少萬一,以稍輕余等之罪過已耳.

茲值發行將始,例須於卷首有言,爰就編校上之所感,縷述於下,以誌完成是書之經過.

1. 是書原以問題解法某某辭典分名各册,而其內容於辭典之通行體裁,頗有出入之處,本擬更名曰辭典式算學題庫,卒以特種關係採用今名,非始願也.

2. 原書疊經修訂,新增之題別列於補遺之部,茲則爲之分門別類,納入本文;幾費經營,旨在一貫.中間或倘有未盡善處,祇以時間,精力,兩不我許,未及充分編配,引以爲憾.

3. 原書名詞之部依照假名順序編排,茲則改用筆畫順序.我國算學名詞,至不統一,最近國立編譯館正在釐訂而尚未公布,友人中頗有以出書未及其時,將來須經改訂手續爲余等惜者,際會如此,又何能已!

4. 排校算學書籍,難於普通書籍者奚啻倍蓰,稍一不愼,錯誤隨之.本書於算式之地位,尤加注意,絕不任其無理割裂.排校之時往往因算式之短長,牽涉行間之中斷,不得不設法添削字句,以資銜接;故爲解決此項問題,無形之中費却不少時間,不少精力,於字裏行間.即此可知一書之編著與排校,莫妙於出自一手.坊間發行之算學書,對於算式之地位,支離割裂,目滿瘡痍者,所在都有;此種過誤,編著者自應負相當責任,不能盡諉之於排校者也.

5. 排校算學書籍,成本之重,遠超於普通書籍,商人於利薄事業而願斥重資者,什不獲一,此關於算學之刊物,數量上所以稀少之主因也.余等之於是書,實有賴於資方之促成,否則以全書五百萬言之巨,而竭我倆之棉薄欲印以行世,縱不望而却走,亦必有所戒懼也.

6. 是書校印將半,知友見之者,獎借備至,殊滋惶愧! 余等自知此書之性質,僅屬一種便於翻檢之類書,與所謂'題庫'者正相若,非比涵義宏大,理論精嚴之皇然巨著.故於編譯之時,僅懸'信''達'二字爲的,而忽於文字之工拙.原書之誤點,亦僅就所發覺者加以訂正,未遑一一檢算也.特恐來日多方責難,用敢附明於此,尚希邦人君子有以諒之!

中華民國二十四年四月　　　　薛德炯　吳載耀

普 通 公 理

(a) 全量大於其部分.

(b) 全量等於其各部分之和.

(c) 同量之各等量相等.

(d) 等量加等量,其和相等.

(e) 等量減等量,其差相等

(f) 等量加不等量,其和不等,所加之量大.其和亦大.

(g) 等量減不等量,其差不等,被減之量大,其差亦大.

(h) 等量之若干倍或若干等分相等.

幾 何 公 理

1. 圖形得不變其形狀及大小而變其位置.
2. 可完全相合之量相等.

由普通公理 (d) 及 (e) 擴張之,則如次.

有甲乙二組之量,若甲組之量,分別等於乙組之量,則甲組各量之和與乙組各量之和,雖不全合,亦相等.

3. 過二點得引一直線,且限於一;又直線得向其任何方延長之.由是又可得以下二條.

α. 二任意直線,得將其一直線上之任意所設點,置於他直線上之任意所設點,而使二直線相合.

β. 二直線會於一點,而不全合,則此二直線不復相會.

4. 過一點得引所設直線之一平行線,且限於一.

定 理 之 關 係

1. 定理者,得由已知命題以證其爲眞理之命題也.但已知命題,或爲公理,或爲定理.

定理之敍述分二部,曰假設,曰終結是.假設者,假定之事,終結者,由假設所得之結果.玆示其範形如下.

設 A 爲 B, 則 C 爲 D. (1)

其中設 A 爲 B 爲假設,則 C 爲 D 爲終結.

若此定理果眞,則下定理亦必眞.

設 C 非 D, 則 A 非 B. (2)

如 (1) 與 (2) 者,曰互爲對定理.例如馬爲四足動物一命題,依前所示範形改述之,則如下.

設動物爲馬,則此動物有四足.

其對定理爲

設動物無四足,則此動物非馬.

而此定理之爲眞,可無疑義.

2. 有二定理,若其任一定理之假設,爲他定理之終結,則此二定理之一,曰他定理之逆定理.例如定理

設 C 爲 D, 則 A 爲 B. (3)

爲 (1) 之逆定理.又 3 之對定理爲

設 A 非 B, 則 C 非 D. (4)

(4) 曰 (1) 之倒定理.

一定理雖眞,但不能斷其逆定理及倒定理亦爲眞;欲斷後者之眞僞,須別加探討.

例如就前舉之定理,

設動物爲馬,則此動物有四足.

其逆定理爲

設動物有四足,則此動物爲馬.

又其倒定理爲

設動物非馬，則此動物無四足.

由此二者，即可知逆定理與倒定理不能普徧爲眞.

3. 上述定理之四種形式，茲列舉之如次.

原定理. 設 A 爲 B，則 C 爲 D. (1)

其對定理. 設 C 非 D，則 A 非 B. (2)

其逆定理. 設 C 爲 D，則 A 爲 B. (3)

其倒定理. 設 A 非 B，則 C 非 D. (4)

若 (1) 爲眞，則 (2) 必爲眞. 又因 (4) 爲 (3) 之對定理，故 (3) 與 (4) 同時爲眞. 然 (1) 雖爲眞，不能據以斷言 (3) 或 (4) 亦爲眞. 故此四種形式之定理中，若已就幾何學證明其非互爲對定理之二者，即 (1) 與 (3)，(1) 與 (4)，(2) 與 (3)，或 (2) 與 (4)，則其他定理，可不俟證明而知其爲眞矣.

4. 若定理之假設甚複雜，則交換假設之一與終結，即得原定理之逆定理. 例如定理

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ B=E \\ C=F \end{array}\right\}，則 M=N,$$

其逆定理爲

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ B=E \\ M=N \end{array}\right\}，則 C=F,$$

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ M=N \\ C=F \end{array}\right\}，則 B=E.$$

…………….

5. 轉換法. 亦稱窮舉證法. 設有業已證明之一羣定理，凡可發生之事，已盡於假設，而終結不能兩立，即其中之二，不能同時成立，則此一羣定理之逆定理，亦必爲眞. 如此之一羣定理，其最簡單之例，爲業已證明之一定理與其倒定理；此二定理中，其一之逆定理，即他一之對定理，由此一事，即可知轉換法之眞. 又幾何學中數見不鮮之一例如下.

設 A 大於 B，則 C 大於 D.

設 A 等於 B，則 C 等於 D.

設 A 小於 B，則 C 小於 D.

若此三定理，業已證明爲眞，則其逆定理亦必爲眞，即

設 C 大於 D，則 A 大於 B.

設 C 等於 D，則 A 等於 B.

設 C 小於 D，則 A 小於 B.

6. 同一法. 設有唯一之 A 及唯一之 B，且已知 A 爲 B. 則可斷定 B 爲 A.

例如，設有一定直線 AB，及此線外之定點 P，則因由 P 至 AB 所引之最短線唯一，由 P 至 AB 所引之垂線亦唯一，且最短線爲垂線，故由同一法，可徑知垂線爲最短線.

平面軌跡

決定點之位置時，有時所設條件雖不足完全確定其位置，但可充分限制其點之位置，令在一線，或線之一部，或若干線上. 此時謂點有軌跡. 若一線，或線之一部，或若干線上之點，皆適合一定條件，且除此以外，更無適合此條件之點，則此線，或線之一部，或若干線曰適合條件之點之軌跡. 據此，欲決定一線，或線之一部，或若干線 X 爲適合條件 A 之點之軌跡，其充要手續爲證明以下一組定理之成立.

1. 適合條件 A 之點在 X 上.

2. X 上之點適合條件 A.

又以下定理代 (1) 亦可,

3. 不在 X 上之點,不適合條件 A.

又以下定理代 (2) 亦可.

4. 不適合條件 A 之點,不在 X 上.

注意 有時軌跡爲平面之一部. 觀第一門 1526 題及 1529 題.

作　圖　題

作圖題之目的,在完成幾何學的作圖. 解作圖題時,得使用准許使用之工具;若限制使用之工具,而令其範圍愈狹隘,則用此工具以解之作圖題之範圍亦愈狹隘,從而其解法亦愈困難. 初等幾何學中,准許使用之工具,不外規及矩二物. 所謂規者,卽兩脚規,用以作圓及移距離之具也;所謂矩者,卽直尺,用以引直線及延長直線之具也.

作　圖　公　法

1. 由一任意點,至他一任意點,得引一直線.
2. 有限直線得任意延長之.
3. 以任意點爲中心,任意有限直線爲半徑,得作一圓.

倍量之性質

I 關於可通約量者

1. 若 $A=B$, 則 $mA=mB$.
2. 若 $mA=mB$, 則 $A=B$.
3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.
4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.
5. $mA+nA=(m+n)A$.
6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.
7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

II. 關於不可通約量者

1. 若 $A>=<B$, 則 $mA>=<mB$.
2. 若 $mA>=<mB$, 則 $A>=<B$.
3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.
4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.
5. $mA+nA+\cdots\cdots=(m+n+\cdots\cdots)A$.
6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.
7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

比例之定理

1. 等於同比之比皆相等.

例如,設 $A:B=P:Q$, $X:Y=P:Q$,

則 $A:B=X:Y$.

2. 設二比相等,若第一比之前項較其後項大,或等,或小,則第二比之前項,從而較其後項大,或等,或小.

例如,設 $A:B=P:Q$,

若 $A>=<B$,

則從而 $P>=<Q$

3. 若二比相等,則其反比亦等.

例如,設 $A:B=P:Q$,

則 $B:A=Q:P$.

4. 取二量之一與第三量之比時,若第一量較第二量大,或等,或小,則第一比從而較第二比大,或等,或小. 又取一量與他二量之比時,若二量之第一量較第二量小,或等,或大,則第一比較第二比大,或等,或

小.例如,設 A, B, C 爲同種之三量,若

$$A > = < B,$$

則從而 $A:C > = < B:C.$

又若 $A < = > B,$

則從而 $C:A > = < C:B.$

5. 二量之等倍量之比,等於此二量之比.其逆定理亦眞.

例如, $mA:mB=A:B$

$A:B=mA:mB.$

6. 若二量 A, B 與二整數 m, n 有同比,則 $nA=mB$. 反之,若 $nA=mB$, 則 A 與 B 之比,等於 m 與 n 之比.

7. 若 $A:B=P:Q,\quad nA=mB,$

則 $nP=mQ.$

8. 設同種之四量成比例,若其第二量較第四量大,或等,或小,則第一量從而較第三量大,或等,或小.

例如,設 $A:B=C:D,$

若 $B > = < D,$

則從而 $A > = < C.$

9. 若同種之四量成比例,則第一量與第三量之比,等於第二量與第四量之比[更比定理].

例如,設 $A:B=C:D,$

則 $A:C=B:D.$

10. 若同種之若干量成比例,則其一前項與一後項之比,等於其諸前項之和與諸後項之和之比[加比定理].

例如,設 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$

則 $A:B=A+C+E+\cdots:B+D+F+\cdots.$

11. 設二比相等,則第一比中前項後項之和[差]對後項之比,等於第二比中前項後項之和[差]對後項之比.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $A+B:B=P+Q:Q$ [合比定理],

及 $A\sim B:B=P\sim Q:Q$ [分比定理].

12. 設兩比相等,若取兩前項之等倍量及兩後項之等倍量.則第一比中前項倍量與後項倍量之比.等於第二比中前項倍量與後項倍量之比.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $mA:nB=mP:nQ.$

13 有甲乙二組之量,甲組中第一量與第二量之比,等於乙組中第一量與第二量之比,又甲組中第二量與第三量之比,等於乙組中第二量與第三量之比,以下類此,則甲組中第一量與最後量之比,等於乙組中第一量與最後量之比[等比定理].

例如,設甲組之若干量爲 A, B, C,……, H, K, 乙組之若干量爲 P, Q, R,……, X, Y, 而

$$A:B=P:Q,$$
$$B:C=Q:R,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$H:K=X:Y,$$

則 $A:K=P:Y.$

14. 若 $A:C=P:R,\quad B:C=Q:R,$

則 $A+B:C=P+Q:R.$

15. 若二比相等,則其二乘比亦等;反之,若二比之二乘比相等,則其比亦等.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $A^2:B^2=P^2:Q^2.$

反之,設 $A^2:B^2=P^2:Q^2,$

則 $A:B=P:Q,$

16. 若二比相等,則其三乘比亦等.反之,設

二比之三乘比相等,則其比亦等.

例如,設 $A:B=P:Q$,

則 $A^3:B^3=P^3:Q^3$,

反之,設 $A^3:B^3=P^3:Q^3$,

則 $A:B=P:Q$,

極　限　論

1. 某量有一定之値,則此量曰常數;若從某條件而消長增減,則此量曰變數.

2. 設一變數之値漸漸趨近一常數,其差得小於任意小之數,但此變數不能等於常數,則此常數曰變數之極限,而謂變數無限趨近其極限.變數漸漸增大而趨近其極限時,其極限曰增極;漸漸減小而趨近其極限時,其極限曰減極.

3. 設一點由 A 向 B 運動,第一秒間由 A 移至 AB 之中點 M,第二

秒間由 M 移至 MB 之中點 M′,第三秒間,由 M′ 移至 M′B 之中點 M″,以下類推.此時運動之點,雖可任意趨近 B,但決不能達於 B;因設某時動點在 A, B 間之某處,則下一秒此點在由此至 B 之中央,故此點雖可漸漸趨近 B,而欲達到 B,則恆尚須行距離之半分也,故決不能達 B.因此,由 A 至動點之距離,乃一變數,以常數 AB 爲極限而無限趨近之;由動點至 B 之距離,亦爲一變數,以常數零爲極限而無限趨近之.

茲設 AB 之長爲 2 寸,由 A 至動點之變數爲 x,此變數與其極限之差爲 v,則

第一秒後　$x=1$,　　$v=1$,

第二秒後　$x=1+\frac{1}{2}$,　　$v=\frac{1}{2}$,

第三秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$,　　$v=\frac{1}{4}$,

第四秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$,　$v=\frac{1}{8}$,

餘準此.

級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 之和,顯然小於 2;但項數愈多,則與 2 之差愈小,故此差得爲任意小.因此 2 爲此級數在項數爲無窮多時之極限,零爲此級數與 2 之差之極限.

4. (1)　變數與其極限之差,爲一變數,其極限爲零.

(2)　兩個以上之變數 $v, v', v'', \cdots\cdots$ 等,其極限皆爲零,則其和 $v+v'+v''+\cdots\cdots$ 之極限亦爲零.

(3)　設變數 v 之極限爲零,則 $a\pm v$ 之極限爲常數 a,又 $a\times v$ 之極限爲零.

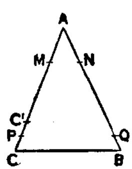
(4)　常數及變數之積,亦爲變數;常數與變數之積之極限,爲此變數之極限與常數之積.

(5)　設二變數爲俱增大之變數,或俱減小之變數,則此二變數之和或積亦爲一變數.

(6)　設二變數恆相等,則其極限亦相等.

設兩變數 AM, AN 恆相等,其極限分別爲 AC, AB,求證 AC=AB

證　設 AC>AB.取短於 AC 之 AC′,令 AC′=AB.因 AM 無限趨近 AC,故得假定 AM 達到大於 AC′ 之某値 AP,命 AQ 爲對應於 AP 之 AN 値.於是 AP=AQ, AC′=AB.此



二不等式之非眞理,至爲明顯,因 AP＞AC′, AQ＜AB 故也. 故 AC 不能大於 AB. 同理, AC 不能小於 AB, 卽 AB 不能大於 AC. 要之, AC 較 AB, 既不能大,亦不能小,故 AC 非等於 AB 不可.

(7) 設二變數有定比,則其極限亦有同比. 極限以 lim 記之,例如 $\lim(x)$ 爲 x 之極限.

圖 設 x 及 y 爲二變數, r 爲定比, 則 $x:y=r$, 卽 $x=ry$, 故 $\lim(x)=\lim(ry)=r\lim(y)$, 故 $\lim(x):\lim(y)=r$.

(8) 設比爲不可通約數,則此比爲其累次近似值之極限,故有以下之定理.

不可通約之二比 $a:b$ 及 $a':b'$, 表之至同樣精密時, 恆有同一之近似値, 則此二比相等.

(9) 兩個以上之變數, 其代數和之極限,等於其極限之代數和.

設 x, y, z 爲變數, 其極限分別爲 a, b, c, 則 $\lim(x+y+z)=a+b+c$, 試證之.

圖 設 $a-x=v$, $b-y=v'$, $c-z=v''$, 則 $x=a-v$, $y=b-v'$, $z=c-v''$. 此時 $x+y+z=a-v+b-v'+c-v''$,

故 $\lim(x+y+z)$,

$$=\lim(a-v+b-v'+c-v''), \quad (6)$$

然 $\lim a-v+b-v'+c-v'')$

$$=a+b+c, \quad (3)$$

故 $\lim(x+y+z)=a+b+c$.

(10) 兩個以上之變數, 其積之極限, 等於其極限之積.

設 x, y, z 爲變數, 其極限分別爲 a, b, c, 則 $\lim.(xyz)=abc$, 試證之.

圖 設 $x=a-v$, $y=b-v'$, $z=c-v''$, 取其各邊之積,則

$xyz=abc\pm$(以 v, v', v'' 之一,或二,或全體爲因數之諸項).

因此上式中自符號$\pm$以下諸項之極限爲零, (3)

故 $\lim(xyz)$

$$=\lim\{abc\pm(\text{極限爲零之諸項})\} \quad (6)$$

故 $\lim(xyz)=abc$.

以上之變數, 係假定爲增大者, 但對於減小之變數,證明同此.

記 號 及 略 語

∴	故.	∵	何則.
=	等於.	≠	不等於.
＞	大於.	＜	小於.
≧	大於及等於.	≦	小於及等於.
+	加.	−	減以.
±	加減.	∼	差.
∓	加及差.	∧	角.
R̂	直角.	△	三角形.
∥	平行於.	⊥	垂直於.
≡	全等於.	▱	平行四邊形.
□	正方形.	▭	矩形.
:	比.	∽	相似.

普.公. 普通公理. 幾.公. 幾何學公理.

公法. 作圖公法.

目 次

題解中心

幾何學辭典

第一門 解法之部

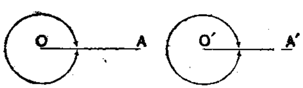
第一編

直線

第一章 角及直線

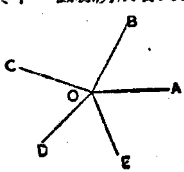
1. 凡周角皆相等.

證 周角 O 及 O′ 分別爲主線 OA 及 O′A′



以 O, O′ 爲樞, 就紙面上迴轉一周所成之角, 故取其周角之一 O, 疊於 O′ 上, 令 OA 疊於 O′A′ 上, 而得全合. 因此周角 O, 等於周角 O′.

2. 由同一之點, 引若干直線, 則各直線與其下一直線所成各角之和, 等於四直角.

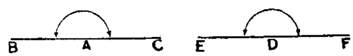


證 由同一點 O 所引之若干直線 OA, OB, OC, OD, OE 依次所成之鄰角 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}A$, 其和等於周角, 故等於 $4\hat{R}$.

3. 凡平角皆相等.

證 平角等於周角之半分, 而周角皆相等 [1題], 故平角亦皆相等.

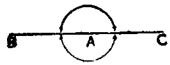
別證 設所欲證者, 爲 AB, AC 所夾之平角, 等於 DE, DF 所夾之平角. 令 AB, AC



所夾之角爲平角, 故 BA, AC 成一直線 BAC. 同理, ED, DF 亦成一直線 EDF. 於是得置直線 BAC 於直線 EDF 上, 使 A 點與 D 點相合. [幾.公.(3) α.]. 但 B 與 E 在 D 之同側, C 與 F 在 D 之他側, 或 B 與 F 在 D 之同側, C 與 E 在 D 之他側皆可. 總之, 於無論何款中, AB, AC 所夾之平角, 與 DE, DF 所夾之平角全合. 凡得全合之量相等 [幾.公.(2)], 故此二平角相等.

注意 別證乃不依據周角之相等, 而獨立證明平角之相等者也. 5題中直角之別證亦準此.

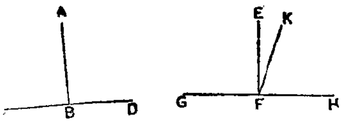
4. 同一之二邊 AB, AC 所夾之二平角相等.



證　由前題,一望而知其爲相等[本題爲前題之特例].

5.　凡直角皆相等.

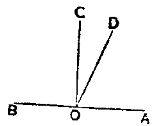
證　直角爲平角之半分,而等量之半分皆相等[普.公.(h)],故直角皆相等.



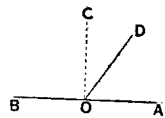
別證　設ABC爲直線AB立於直線CBD上所成之直角,EFG爲直線EF立於直線GFH上所成之直角,求證$A\hat{B}C$等於$E\hat{F}G$. 今將直線CBD置於直線GFH上,B點落於F點,BA與EF在直線GFH之同側,則直線BA當與直線FE相合. 何則,蓋若不然,則BA或落於$E\hat{F}H$之內,或落於$E\hat{F}G$之內. 茲假定BA落於$E\hat{F}H$之內,命其位置爲FK. 此時$K\hat{F}G$爲直角,故等於$K\hat{F}H$[直角定義]. 然$E\hat{F}H$大於$K\hat{F}H$[普.公.(a)],故$E\hat{F}H$又大於$K\hat{F}G$,故$E\hat{F}H$又大於$E\hat{F}G$[普.公.(a)]. 然$E\hat{F}G$爲直角,故等於$E\hat{F}H$[直角定義].故$E\hat{F}G$小於$E\hat{F}H$,又等於$E\hat{F}H$.然此爲不可能,故直線BA不落於$E\hat{F}H$之內. 仿此得證直線BA亦不落於$E\hat{F}G$之內. 故直線BA與直線EF相合.故$A\hat{B}C$與$E\hat{F}G$相合,而$A\hat{B}C=E\hat{F}G$[幾.公.(2)].

6.　於一所設直線上之一所設點,得引其線之一垂線,而以一爲限.

證　二等分平角AOB之直線CO,令鄰角COA, COB皆爲直角,故CO爲AB之垂線. 若除CO以外,於AB上之O點,尚有他垂線OD,則$D\hat{O}A=\hat{R}$. 然$C\hat{O}A=\hat{R}$,故$C\hat{O}A=D\hat{O}A$[普.公.(c)],卽全量等於其一部.此爲不可能[普.公.(a)],故在AB之O點垂直於AB之直線,除CO外,別無他線.



別證　設直線OD,以O爲樞,由OA之位置,迴轉至OB之位置,則$D\hat{O}A$由零漸漸增大,而$D\hat{O}B$由$2\hat{R}$漸漸減小,其中必有一次$D\hat{O}A=D\hat{O}B$. 設此時DO之位置爲CO,則CO爲AB之垂線;而如是之CO位置,顯然以一次爲限.



7.　等角之餘角亦等.

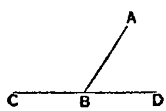
證　某角之餘角者,由直角減去其角而得之角也.而直角相等[5題],故等角之餘角亦等[普.公.(e)].

8.　等角之補角亦等.

證　某角之補角者,由二直角減去其角而得之角也.而二直角[平角]皆相等[3題],故等角之補角皆相等[普.公.(e)].

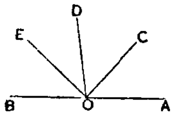
9.　一直線立於他一直線上,其所成鄰角之和,等於二直角.

證　設直線AB,立於他直線CD上,求證鄰角ABC, ABD之和,等於二直角. 今鄰角ABC, ABD之和,爲BC, BD所夾之角,而CBD爲一直線,故其角爲平角.故二角ABC, ABD之和等於平角,卽等於二直角.



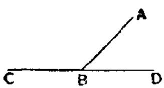
10. 由一直線上之一點,就其一側引若干直線,則其依次所成各鄰角之和,等於二直角.

證 由一直線 AOB 上之一點 O,就其一側引若干直線 OC, OD, OE, 其所成各鄰角 AOC, COD, DOE, EOB 之和,等於平角 AOB,即等於 $2\hat{R}$.

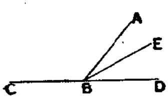


11. 一直線與他二直線所成鄰角之和,若等於二直角,則後二直線成一直線.

證 設直線 AB 與他二直線 BC, BD 所成鄰角 ABC, ABD 之和等於二直角,求證 BC, BD 成一直線. 今鄰角 ABC, ABD 之和,為 BC, BD 所夾之角,而二角 ABC, ABD 之和為二直角,故 BC, BD 所夾之角等於二直角,即平角. 故 BC, BD 成一直線.

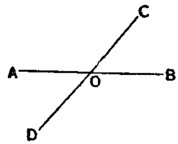


別證 設 BD 與 BC 不成一直線,而 BE 與 BC 成一直線,則 AB 立於直線 CBE 上,故 $A\hat{B}C + A\hat{B}E = 2\hat{R}$ [9 題]. 然 $A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2\hat{R}$ [假設], 故 $A\hat{B}C + A\hat{B}E = A\hat{B}C + A\hat{B}D$ [普. 公. (c)]. 故 $A\hat{B}E = A\hat{B}D$ [普. 公. (e)], 即全量等於其一部. 此為不可能 [普. 公. (a)]. 故 BD 與 BC 成一直線.



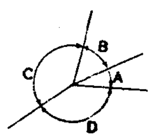
12. 二直線相交,其對頂角相等.

證 設二直線 AB, CD 交於 O, 求證 $A\hat{O}C$ 等於 $B\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ 等於 $A\hat{O}D$. 今 AO 立於 CD 上,故鄰角 AOC, AOD 之和,等於二直角 [9 題]. 又 DO 立於 AB 之上,故鄰角 AOD, DOB 之和等於二直角 [9 題]. 故二角 AOC, AOD 之和,等於二角 AOD, DOB 之和 [普. 公. (c)]. 由是可知, $A\hat{O}C$ 等於 $B\hat{O}D$, 仿此,得證 $B\hat{O}C$ 等於 $A\hat{O}D$.



13. 一點之周圍,有 A, B, C, D 四角. B 2 倍於 A, C 3 倍於 B, D 等於 C, 則各角為直角之幾分之幾? 並以度數表之.

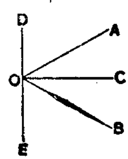
解 $B = 2A$, $C = 3B = 6A$, $D = C$, 故 $A + B + C + D = A + 2A + 6A + 6A = 15A$, 而 $A + B + C + D = 4\hat{R}$, 故 $15A = 4\hat{R}$, 因此 $A = \frac{4}{15}\hat{R}$. 故 $B = \frac{8}{15}\hat{R}$, $C = \frac{24}{15} \times \hat{R} = \frac{8}{5}\hat{R}$, 又 $D = C = \frac{8}{5}\hat{R}$.



又若以度數表之,則 $A = 90° \times \frac{4}{15} = 24°$, $B = 90° \times \frac{8}{15} = 48°$, $C = 90° \times \frac{8}{5} = 144°$, $D = 144°$.

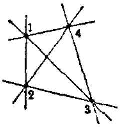
14. 過角之頂點,與此角之二等分線成直角之直線,與角之二邊成等角.

證 設過角 AOB 之頂點 O, 與角之二等分線 OC 成直角之直線為 DE. 此時 $C\hat{O}D = C\hat{O}E = \hat{R}$, $A\hat{O}C = B\hat{O}C$, 故 $A\hat{O}D = B\hat{O}E$, 即 DE 與 OA, OB 成等角.

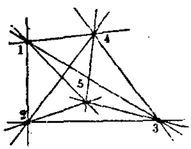


15. 四點最多得決定六直線,四直線最多得決定六點. 又五點最多得決定十直線,五直線最多得決定十點.

證 (1)四點中各點與他三點聯結,可得十二直線. 然是等直線內,兩兩為一直線,故



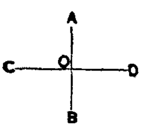
相異之直線,爲十二之半分,卽六直線.而所設四點內,若有三點或四點在一直線上,則直線之數,皆少於六,故以六直線爲最多.次,設所設四直線,皆不平行,則各直線與他直線相交而得之點皆爲三,故共可得十二點.然是等點中,兩兩合一,故相異之點,爲十二之半分,卽六.所設直線內,若有二線,或三線,或四線平行,則交點之數,皆少於六,故以六點爲最多數.



(2) 仿前推論,得證五點最多得決定 4×5 之半分,卽十直線,五直線最多得決定十點.

16. 二直線相交,其所成之四角,若有一爲直角,則他三角亦爲直角.

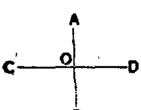
證 設 AOB, COD 爲二直線, AOC 爲直角.



此時 $A\hat{O}C$, $A\hat{O}D$ 之和等於二直角[9題],而 $A\hat{O}C$ 爲直角[假設],故 $A\hat{O}D$ 亦爲直角.根據同理, $D\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ 亦各爲直角.

17. 會於一點之四直線,設其所成之角皆爲直角,則四直線成二直線.

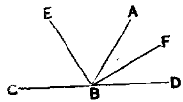
證 設會於一點 O 之四直線爲 AO, CO, BO, DO,



其所成之角 AOC, COB, BOD, DOA 皆爲直角.於是 $A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$, 爲各直角,故 $A\hat{O}C+C\hat{O}B=2\hat{R}$, 故 AO, BO 成一直線[11題].根據同理, CO, DO 亦成一直線.故四直線兩兩成一直線.

18. 一直線與他直線成二鄰角,各角之二等分線互爲垂線.

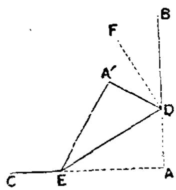
證 設 $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$ 爲直線 AB 與 CBD 所成



之鄰角, BE, BF 爲其二等分線,求證 $E\hat{B}F$ 爲直角. BE 爲 $A\hat{B}C$ 之二等分線,故 $A\hat{B}E=E\hat{B}C$; 同理, $A\hat{B}F=F\hat{B}D$, 故 $E\hat{B}F=E\hat{B}C+F\hat{B}D$ [普. 公. (d)]. 然 $E\hat{B}F+E\hat{B}C+F\hat{B}D=2\hat{R}$ [10題],故 $E\hat{B}F$ 爲直角.

19. 斜折書籍之一頁,則其緣之二部分[由一緣所折成之二部分]所成角之二等分線,與折痕成直角.

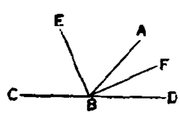
證 設一頁之書角爲 A, 斜折而至於 A′ 之



位置, DE 爲其折痕,一緣 BDA 折而爲 DB, DA′ 二部分,其所成角之二等分線爲 DF, 求證 DF 與 DE 成直角.茲 A 折至 A′ 之位置,故 $A\hat{D}E=A'\hat{D}E$, 因此 DE 爲 $A\hat{D}A'$ 之二等分線,故 $A'\hat{D}E+A'\hat{D}F=\hat{R}$ [18題].

20. 二鄰角之二等分線,若互相垂直,則其所不共之二邊,成一直線.

證 設 $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$ 爲共有頂點 B 之二



鄰角,其二等分線分別爲 BE, BF, 且 BE 垂直於 BF, 求證 CB, BD 成一直線.今

$A\hat{B}C=2A\hat{B}E$, $A\hat{B}D=2A\hat{B}F$, 故 $A\hat{B}C+A\hat{B}D=2A\hat{B}E+2A\hat{B}F=2(A\hat{B}E+A\hat{B}F)=2\hat{R}$. 故不共之二邊 CB, BD 成一直線 [11題].

21. 前題中 $E\hat{B}C$ 與 $F\hat{B}D$ 互為餘角, $A\hat{B}E$ 與 $D\hat{B}E$ 互為補角.

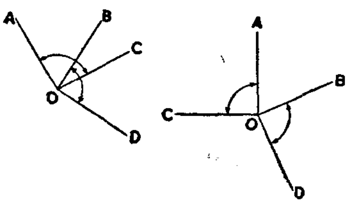
證 $E\hat{B}C=\frac{1}{2}A\hat{B}C$, $F\hat{B}D=\frac{1}{2}A\hat{B}D$. 而 $A\hat{B}C+A\hat{B}D=2\hat{R}$, 故 $E\hat{B}C+F\hat{B}D=\frac{1}{2}(A\hat{B}C+A\hat{B}D)=\hat{R}$. 又 $A\hat{B}E=E\hat{B}C$, 而 $E\hat{B}C+D\hat{B}E=2\hat{R}$, 故 $A\hat{B}E+D\hat{B}E=2\hat{R}$.

22. 六直線會於一點,成六等角,則各角為一直角之三分之二.

證 六角之和為一周角, 卽 $4\hat{R}$, 故各角為 $4\hat{R}$ 之六分之一,卽 $\hat{R}$ 之三分之二.

23. 二角 AOB, COD 公有一頂點 O, 邊 AO 與邊 BO 分別垂直於邊 CO 與邊 DO, 則 $A\hat{O}B$ 或等於 $C\hat{O}D$, 或為其補角.

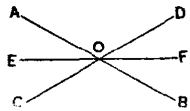
證 如(1)圖中, $A\hat{O}C=B\hat{O}D=\hat{R}$, 故雙方減



以 $B\hat{O}C$, 則其所餘之 $A\hat{O}B$ 與 $C\hat{O}D$ 相等. 如(2)圖中, $A\hat{O}B+B\hat{O}D+D\hat{O}C+A\hat{O}C=4\hat{R}$, 而 $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ 各為直角,故 $A\hat{O}B+C\hat{O}D=2\hat{R}$, 故卽二角互為補角.

24. 二對頂角之二等分線,成一直線.

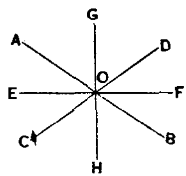
證 設二直線 AB, CD 交於 O, 二對頂角 AOC, BOD 之二等分線分別為 OE, OF. 此時 $A\hat{O}C=B\hat{O}D$, 故其各自之半分 $A\hat{O}E=B\hat{O}F$. 而



$A\hat{O}F+B\hat{O}F=2\hat{R}$, 故 $A\hat{O}F+A\hat{O}E=2\hat{R}$, 故 OE, OF 成一直線 [11題].

25. 相交二直線所成之四角,其二等分線成互相垂直之二直線.

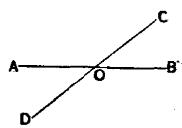
證 設二直線 AB, CD 交於 O, 其所成四角



之二等分線分別為 OE, OH, OF, OG, 於是依據前題, EO, OF 成一直線, GO, OH 亦成一直線, 且此二直線互相垂直 [18題].

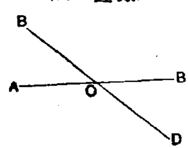
26. 四直線會於一點, 若不相隣之角相等,則此等直線,兩兩成一直線.

證 設四直線 AO, DO, BO, CO 會於一點 O, 其不相隣之角相等, 卽 $A\hat{O}D=B\hat{O}C$, $A\hat{O}C=B\hat{O}D$.



於是因 $A\hat{O}D=B\hat{O}C$, $A\hat{O}C=B\hat{O}D$, 故四角之和,等於 $2\times(A\hat{O}D+A\hat{O}C)$. 然四角之和為 $4\hat{R}$, 故 $A\hat{O}D+A\hat{O}C=2\hat{R}$, 故 CO, OD 成一直線[11題]. 同理, AO, OB 亦成一直線.

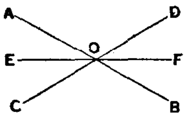
27. 二直線 OB, OD 與一直線 AC 會於同一點 O, 若在 AC 異側之二角 AOB, COD 相等, 則 BOD 成一直線.



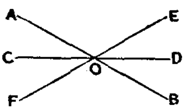
證 $A\hat{O}B+B\hat{O}C=2\hat{R}$, 然 $A\hat{O}B=C\hat{O}D$ 故 $C\hat{O}D+B\hat{O}C=2\hat{R}$, 故 OB, OD 成一直線 [11題].

28. 二等分對頂角之一之直線,亦二等分他一對頂角.

解　設二直線AOB, COD交於O,而成對頂角AOC, BOD, $A\hat{O}C$之二等分線爲EOF；求證此直線亦二等分他一角BOD. 蓋$A\hat{O}E = B\hat{O}F$, $C\hat{O}E = D\hat{O}F$, 而$A\hat{O}E = C\hat{O}E$, 故$B\hat{O}F = D\hat{O}F$.



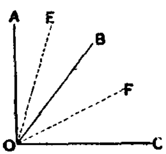
29. 二直線AO, BO,在他直線CD之兩側,而與CD交於同點O,其所成角AOC, COB之和等於二直角.引過O點之直線EOF,則$A\hat{O}F$等於$B\hat{O}E$.



解　$A\hat{O}C + C\hat{O}B = 2\hat{R}$, 故AO, OB成一直線[11題].因此$A\hat{O}F$, $B\hat{O}E$爲二直線AB, EF相交而生之對頂角,故相等[12題].

30. 相隣二角若互爲餘角,則各角二等分線間之角,等於直角之半分.

解　設$A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$互爲餘角,其二等分線分別爲OE, OF,求證$E\hat{O}F$爲直角之半分.蓋$E\hat{O}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$, $B\hat{O}F = \frac{1}{2}B\hat{O}C$, 故$E\hat{O}F = E\hat{O}B + B\hat{O}F = \frac{1}{2}(A\hat{O}B + B\hat{O}C) = \frac{1}{2}\hat{R}$.



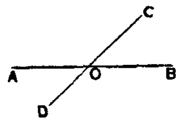
31. 設$A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$爲依次相隣之角,而其度數則$A\hat{O}B = 105°30'$, $BOC = 15°20'$, $COD = 69°10'$, 問AO, OD成一直線否?

解　$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D = 105°30' + 15°20' + 69°10' = 190°$, 故AO, OD不成一直線.

32. 定理<u>二直線相交,其對頂角相等</u>之逆定理及倒定理如何?試證之.

解　此定理若改如下述,則其逆定理與倒定理,甚易知之.

<u>四直線交於一點,若兩兩成一直線,則其二雙相對之角相等.</u>



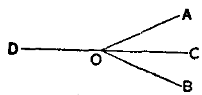
(逆定理)四直線交於一點,若二雙相對之角相等,則四直線兩兩成一直線.

解　[同26題].

(倒定理)四直線交於一點,若不兩兩成一直線,則其二雙相對之角不等.何則,蓋若各雙相對之角相等,則四直線兩兩成一直線故也[前款].

33. 角之二邊,與其二等分線之延線成等角.

解　設$A\hat{O}B$之二等分線CO之延線爲DO,則$A\hat{O}D$爲$A\hat{O}C$之補角, $B\hat{O}D$爲$B\hat{O}C$之補角.然$A\hat{O}C = B\hat{O}C$, 故$A\hat{O}D$, $B\hat{O}D$爲相等角之補角,因此相等[8題].



34. 設直線AB之中點爲M, P爲內分點,則$PM = \frac{1}{2}(AP \sim BP)$.又設Q爲外分點,則$QM = \frac{1}{2}(AQ + BQ)$.

解　設P在M與B之間,則$AP > BP$, 且$AP = AM + PM = BM + PM = 2PM + BP$, 故$2PM = AP - BP$. 故$PM = \frac{1}{2}(AP - BP)$. 若P在M與A之間,則$PM = \frac{1}{2}(BP - AP)$. 故PM