CENTURY 21

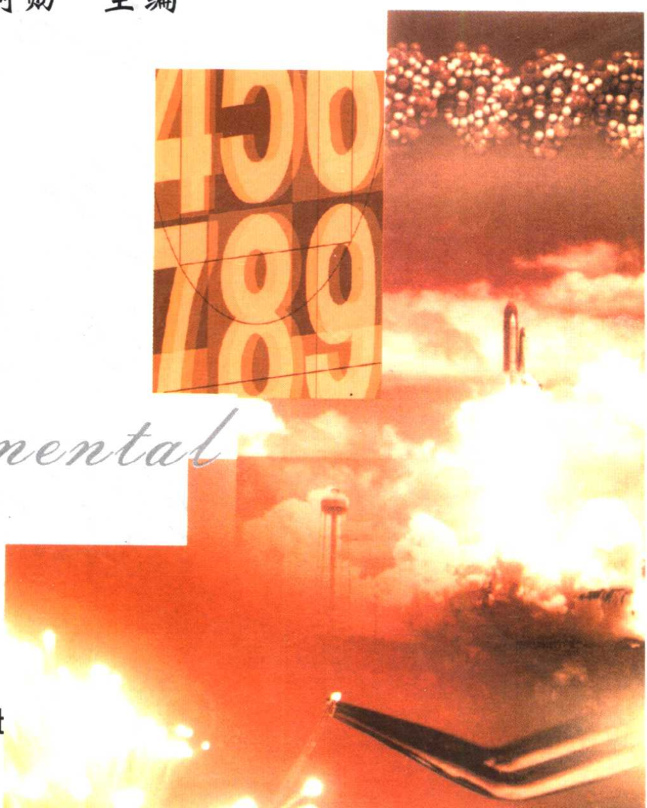
高等学校教材

基础课程系列

高等数学

（下册）

曹吉利 王树勋 主编



Fundamental Courses

西北工业大学出版社

高 等 学 校 教 改 教 材

高 等 数 学

(下 册)

主 编 曹吉利 王树勋
副主编 刘 锋 李 哲 周宏安
主 审 张文鹏

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书为工科高等数学课程的教改教材，全书分为上、下两册，共十一章。上册内容包括：一元函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程与数学建模初步；下册内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、最优化方法初步、变分法简介等。

本书为工科各专业的本科生教材，也可供工程技术人员与报考工科类硕士研究生的考生选用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/曹吉利，王树勋主编．—西安：西北工业大学出版社，2004.8

ISBN7－5612－1817－6

Ⅰ.高…　Ⅱ.曹…，王…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 074780 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072

电　　话：029－88493844　88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：西安东江印务有限公司

开　　本：850 mm×1168 mm　1/32

印　　张：23.5

字　　数：630 千字

版　　次：2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：36.00 元(上、下册，本册：18.00 元)

《高等数学》编委会

目　录

第五章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过平面直角坐标系把平面上的点与一对有序数组相对应，将平面上的图形和方程对应，从而用代数方法研究几何问题. 空间解析几何也是如此.

空间解析几何是建立在空间直角坐标系的基础上，用代数方法讨论空间的几何图形. 本章首先建立空间直角坐标系，其次引进向量并介绍向量的运算，然后以向量为工具讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条两两垂直的数轴，它们都以定点 O 为原点，且一般取相同的长度单位，这三条数轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）. 它们的正向符合右手系（当右手的四个手指由 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴的正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向）. 通常将 x 轴、y 轴放置在水平面上，z 轴为铅垂线，符合右手系，这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系（图 5－1），点 O 称为坐标原点. 每两条坐标轴确定的平面称为坐标面，分别是 xOy 面、yOz 面、zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，称为八个卦限. 并逐个编号

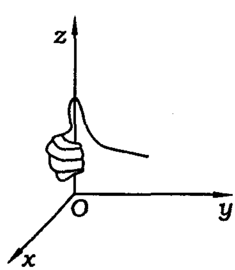


图 5－1

为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，分别称为第一卦限、第二卦限、……、第八卦限(图 5－2.)

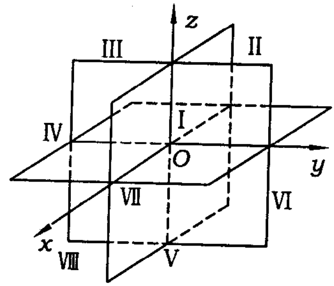


图 5－2

我们常采用的坐标系表示法有斜二侧(图 5－1)及正等侧(图 5－3).

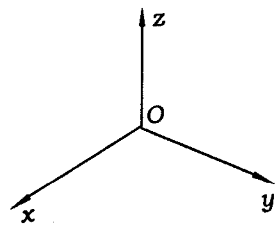


图 5－3

设 M 为空间的一点(图 5－4),过点 M 分别作三个与坐标轴垂直的平面,它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P,Q,R，其坐标依次为 x,y,z，从而得到一个有序数组 x,y,z；反之，给定一有序数组 x,y,z，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别作 $OP=x,OQ=y,OR=z$，然后过 P,Q,R 分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面，这三个平面确定了惟一的交点 M. 这样，空间点 M 就与有序数组 x,y,z 之间建立了一一对应关系. 称 x,y,z 为点 M 的直角坐标，记为 $M(x,y,z)$，并依次称 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

问题 坐标面上和坐标轴上的点的坐标有何特征？

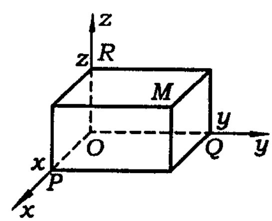


图 5－4

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，过 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 5－5). 因为

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=$$

$$|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|NM_2|^2=$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (1)$$

这就是两点间的距离公式.

例 1 设 P 是空间内一点(图 5－5),其坐标为 (x,y,z),即 $P(x,y,z)$,求

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何?

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何?

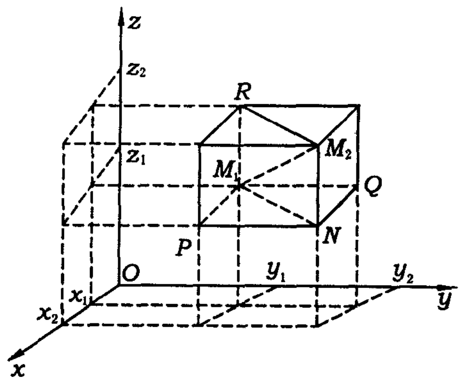


图 5－5

解 根据点与坐标的关系得:

(1) 点 $P(x,y,z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x,0,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0,y,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0,0,z)$.

(2) 点 $P(x,y,z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足之坐标为 $(x,y,0)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足之坐标为 $(0,y,z)$;

点 $P(x,y,z)$ 引至 xOz 坐标面的垂足之坐标为 $(x,0,z)$.

例 2 求 $P(1,2,3)$ 关于各坐标轴与坐标面对称点之坐标是什么?

解 根据点与坐标及对称性的关系得:

点 $P(1,2,3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1,-2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为 $(-1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为 $(-1,-2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(1,2,-3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为 $(-1,2,3)$；

点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为 $(1,-2,3)$.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，所以可设该点坐标为 $M(0,0,z)$，根据题意有 $|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=$$
$$\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

化简得 $z=\frac{14}{9}$，故所求的点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

习题 5－1

1. 设空间直角坐标系中任意一点 P 的坐标为 (x,y,z)，从点 P 分别向各坐标轴和各坐标平面引垂线，试求各个垂足的坐标.

2. 试求点 $P(a,b,c)$ 关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.

3. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点？指出下列各点的位置.

$A(3,4,0)$；$B(0,1,2)$；$C(3,0,0)$；$D(0,-1,0)$.

4. 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面，问在它们上面的点的坐标各有什么特点？

5. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

7. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

8. 证明 $P_1(1,2,3)$，$P_2(2,3,1)$，$P_3(3,1,2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节　向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用学科时，常会遇到这样的一类量，它们既有大小又有方向，如力、力矩、位移、速度、加速度等，将这种既有大小又有方向的量，称为向量(或矢量).

在数学上，往往用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点，M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$(图 5－6). 有时也用一个粗体字母或书写一个上面加箭头的字母来表示向量，如 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$. 向量的大小称为向量的模(也称为向量的范数，记为 $\|\cdot\|$)，如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$，$\boldsymbol{a}$ 的模为 $|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量，模为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$，其方向可任意选取.

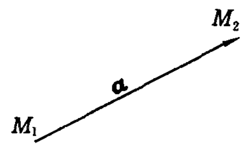


图　5－6

在这里我们只研究与起点无关的向量，即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方，这种向量称为自由向量. 由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何直观来看，就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反，就称这两个向量平行，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

二、向量的线性运算(加减法、数乘向量)

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ ，任取一点 A ，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(图 5－7(a))，向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向

量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（向量加法的三角形法则）.

仿此，也有向量加法的平行四边形法则（图 5－7(b)）.

向量的加法符合下列运算规律：

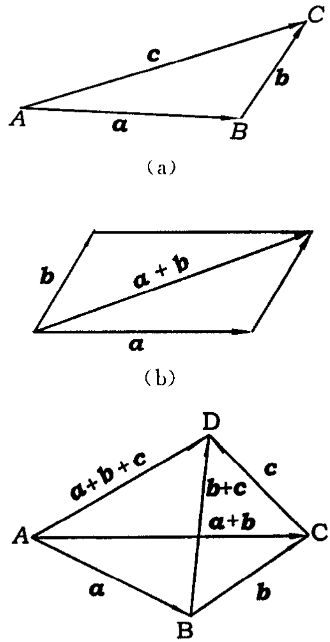
(1)交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

（图 5－7(c)）

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$，由此，我们规定 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差，记作 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$（图 5－8）.



(a)　(b)　(c)

图　5－7

2. 向量与数的乘法

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个非零实数，则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，且

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$

(2) $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向为：当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

容易验证，向量与数的乘法满足以下运算规律：

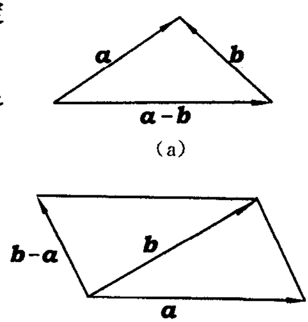
(1)结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(2)分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$

其中 λ,μ 都是常数.



(a)　(b)

图　5－8

设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，由数乘向量的规定可知，向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的模等于1，且与 $\boldsymbol{a}$ 同方向，记作 $\boldsymbol{a}^0$，即 $\boldsymbol{a}^0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 显然 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

向量的加减法及向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

三、向量的坐标表示

为了能将向量作为研究几何图形的工具，须将向量运算用代数表示. 因此，在空间直角坐标系中，若将向量的始点移到坐标原点 O，则这个向量完全由其终点确定；反过来，任给空间一点 M，总可以确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$. 也就是说，空间的点与始点在原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中与 x 轴、y 轴、z 轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量，分别记作 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点，终点坐标为 $M(x,y,z)$，过终点 M 作与坐标轴垂直的平面，其垂足依次为 P,Q,R（图 5 - 9），由向量的加法及数乘向量运算，有

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

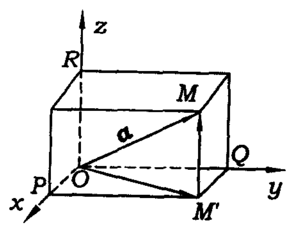


图 5 - 9

即

$$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

称式(1)为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式. 有时为了使用的方便，亦记

$$\boldsymbol{a} = (x,y,z) \qquad (2)$$

称式(2)为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

将向量 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 放入空间直角坐标系中，如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，根据向量的线性运算，如图 5 - 10 所示，得

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=$$
$$(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=$$
$$(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

若记 $x_2-x_1=a_x$，$y_2-y_1=a_y$，$z_2-z_1=a_z$，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(a_x,a_y,a_z)$$

利用向量的坐标，可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，于是

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=$$
$$(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}$$

即
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}$$

即
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)\quad(\lambda\text{ 为常数})$$

例 1 设有二非零向量

$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$

证明：$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

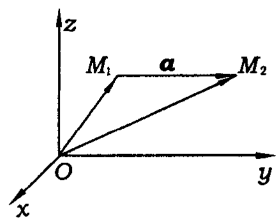


图 5-10

证明 先证必要性.如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，根据数乘向量的规定，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 且 $\lambda\neq 0$，即有 $(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$，根据二向量相等有

$$a_x=\lambda b_x,\quad a_y=\lambda b_y,\quad a_z=\lambda b_z$$

从而

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

再证充分性.如果 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$，设其比为 λ，于是 $a_x=\lambda b_x$，$a_y=\lambda b_y$，$a_z=\lambda b_z$，即 $(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，根据数乘向量的规定，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.