



高等学校教材

基础课程系列

高等数学

(下册)

曹吉利 王树勋 主编

*Fundamental
Courses*

北京工业大学出版社



高等学校教改教材

高等数学

(下册)

主 编 曹吉利 王树勋

副主编 刘 锋 李 哲 周宏安

主 审 张文鹏

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书为工科高等数学课程的教改教材,全书分为上、下两册,共十一章。上册内容包括:一元函数的极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程与数学建模初步;下册内容包括:向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、最优化方法初步、变分法简介等。

本书为工科各专业的本科生教材,也可供工程技术人员与报考工科类硕士研究生
的考生选用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/曹吉利,王树勋主编. —西安:西北工业大学出版社,2004.8

ISBN7-5612-1817-6

I. 高… II. 曹…,王… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 074780 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:029-88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:西安东江印务有限公司

开 本:850 mm×1168 mm 1/32

印 张:23.5

字 数:630 千字

版 次:2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

定 价:36.00 元(上、下册,本册:18.00 元)

《高等数学》编委会

主 编 曹吉利 王树勋

副主编 刘 锋 李 哲 周宏安

编 者 曹吉利 王树勋 刘 锋 杨合俊
李 哲 周宏安 王会战 李小斌

主 审 张文鹏

目 录

第五章 向量代数与空间解析几何	(1)
第一节 空间直角坐标系	(1)
一、空间直角坐标系(1) 二、空间两点间的距离(2) 习题 5-1(4)	
第二节 向量及其线性运算	(5)
一、向量的概念(5) 二、向量的线性运算(5) 三、向量的坐标表示(7) 四、向量的模与方向余弦的坐标表示(10) 习题5-2(11)	
第三节 数量积 向量积 混合积*	(12)
一、向量的数量积(12) 二、两向量的向量积(16) 三、向量的混合积*(19) 习题5-3(21)	
第四节 平面及其方程	(23)
一、平面的点法式方程(23) 二、平面的一般式方程(24) 三、两平面的夹角(26) 四、点到平面的距离(27) 习题5-4(29)	
第五节 空间直线及其方程	(30)
一、空间直线的对称式方程与参数方程(30) 二、空间直线的一般式方程(31) 三、两直线的夹角(33) 四、直线和平面的夹角(33) 习题5-5(36)	
第六节 二次曲面及其方程	(39)
一、曲面方程的概念(39) 二、旋转曲面(41) 三、柱面(42) 习题5-6(44)	
第七节 常见的二次曲面及其方程	(45)
一、椭球面(45) 二、抛物面(47) 三、双曲面(48) 习题5-7(49)	
第八节 空间曲线及其方程	(50)
一、空间曲线的一般方程(50) 二、空间曲线的参数方程(51) 三、空间曲线在坐标面上的投影(52) 习题5-8(54)	

第六章 多元函数微分学	(57)
第一节 多元函数的基本概念	(57)
一、预备知识(57) 二、多元函数(59) 三、多元函数的极限(61)	
四、多元函数的连续性(64) 习题 6-1(67)	
第二节 偏导数	(68)
一、偏导数(68) 二、二元函数偏导数的几何意义(71) 三、高阶偏导数(71) 习题 6-2(73)	
第三节 全微分及其应用	(74)
一、全微分的概念(74) 二、全微分与偏导数的关系(75) 三、全微分在近似计算及误差估计中的应用(79) 习题 6-3(81)	
第四节 多元复合函数的微分法	(81)
一、复合函数的一阶偏导数、全导数(82) 二、多元复合函数的高阶偏导数(86) 三、全微分的运算性质及全微分的形式不变性(88) 习题 6-4(89)	
第五节 方向导数与梯度	(90)
一、方向导数(90) 二、梯度(92) 习题 6-5(95)	
第六节 隐函数及其微分法	(96)
一、一个方程的情形(96) 二、方程组的情形(99) 习题 6-6(102)	
第七节 微分法在几何上的应用	(104)
一、空间曲线的切线及法平面(103) 二、曲面的切平面及法线(105) 习题 6-7(108)	
第八节 多元函数的极值及其求法	(109)
一、多元函数极值的概念(109) 二、极值的必要条件及充分条件(110) 三、条件极值(115) 习题 6-8(119)	
第七章 重积分	(121)
第一节 重积分的概念及性质	(121)
一、实例(121) 二、重积分的概念(123) 三、重积分的性质(126) 习题 7-1(130)	
第二节 二重积分的计算	(131)
一、在直角坐标系下的计算方法(131) 二、二重积分的换元法与极坐标系下二重积分的计算(138) 三、用二重积分计算曲面面积	

(145) 习题 7-2(147)

第三节 三重积分的计算…………… (150)

一、直角坐标系下三重积分的计算(150) 二、三重积分的换元法
及柱面、球面坐标系下的计算方法(155) 习题 7-3(161)

第四节 重积分的应用…………… (163)

一、非均匀几何形体的静力矩及质心(163) 二、转动惯量(166)
三、引力与液体压力(168) 习题 7-4(170)

第八章 曲线积分与曲面积分…………… (172)

第一节 对弧长的曲线积分…………… (172)

一、对弧长的曲线积分的概念与性质(172) 二、对弧长的曲线积
分的计算(175) 三、对弧长的曲线积分的应用举例(179) 习题
8-1(181)

第二节 对坐标的曲线积分…………… (182)

一、对坐标的曲线积分的概念与性质(182) 二、对坐标的曲线积
分的计算(185) 三、两类曲线积分之间的联系(190) 习题 8-2
(191)

第三节 格林(Green)公式及其应用…………… (193)

一、格林公式(193) 二、平面上曲线积分与路径无关的条件(199)
三、二元函数的全微分求积(204) 四、全微分方程(209) 习题
8-3(212)

第四节 对面积的曲面积分…………… (214)

一、对面积的曲面积分的概念与性质(214) 二、对面积的曲面积
分的计算(215) 习题 8-4(221)

第五节 对坐标的曲面积分…………… (222)

一、对坐标的曲面积分的概念与性质(222) 二、对坐标的曲面积
分的计算(225) 三、两类曲面积分之间的联系(230) 习题 8-5
(232)

第六节 高斯公式 通量与散度…………… (233)

一、高斯公式(233) 二、通量与散度(239) 习题 8-6(241)

第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度…………… (242)

一、斯托克斯公式(243) 二、空间曲线积分与路径无关的条件*
(248) 三、环流量与旋度(249) 四、高斯公式与斯托克斯公式的

向量形式* (251) 习题8-7(252)

第九章 无穷级数..... (253)

第一节 常数项级数的概念及性质..... (253)

一、基本概念(253) 二、收敛级数的基本性质(257) 习题9-1
(262)

第二节 常数项级数的审敛法..... (263)

一、正项级数的审敛法(263) 二、交错级数及其审敛法(274)
三、任意项级数(276) 习题9-2(280)

第三节 幂级数..... (283)

一、函数项级数的基本概念(283) 二、幂级数及其收敛域(285)
三、幂级数的四则运算及分析运算性质(289) 习题9-3(293)

第四节 函数展开成幂级数..... (294)

一、泰勒级数(295) 二、函数展开成幂级数(297) 习题9-4
(303)

第五节 幂级数的应用..... (303)

一、求极限(303) 二、函数的多项式逼近(304) 三、计算定积分
的近似值(306) 四、关于欧拉公式(307) 五、微分方程的幂级数
解法(308) 习题9-5(310)

第六节 周期函数的傅里叶级数..... (310)

一、三角级数、三角函数系的正交性(311) 二、以 2π 为周期的函
数展开成傅里叶级数(312) 三、以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里
叶级数(318) 习题9-6(320)

第七节 非周期函数的傅里叶级数展开问题..... (321)

一、定义在区间 $[-l, l]$ 上的函数展开成傅里叶级数的方法(322)
二、定义在区间 $[0, l]$ 上的函数展开成正弦级数或余弦级数(324)
三、定义在区间 $[a, b]$ 上的函数展开成傅里叶级数的方法(326)
习题9-7(327)

第十章 最优化方法初步..... (329)

第一节 学科简介..... (329)

第二节 二维最优化问题的图解法..... (332)

一、线性最优化问题(332) 二、非线性最优化问题(333)

第三节 对偶方法..... (335)

一、对偶问题的提出(335)	二、对偶性原则(337)	
第四节	松弛变量法	(339)
第五节	惩罚函数法	(340)
一、外部惩罚函数法(341)	二、内部惩罚函数法(345)	
第十一章	变分法简介	(347)
第一节	变分法的基本概念	(347)
一、引例(347)	二、变分法的基本概念(350)	
第二节	泛函 $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ 的变分问题	(352)
一、泛函 $J[y(x)]$ 取得极值的必要条件(352)	二、几种简单泛函极值的求解(356)	
三、可动边界的变分问题(358)		
第三节	多个函数的变分问题	(361)
第四节	多元函数的变分问题	(363)
第五节	条件极值	(365)
附录 I	二、三阶行列式	(371)
附录 II	习题答案或提示	(373)
参考文献		(391)

第五章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中,通过平面直角坐标系把平面上的点与一对有序数组相对应,将平面上的图形和方程对应,从而用代数方法研究几何问题.空间解析几何也是如此.

空间解析几何是建立在空间直角坐标系的基础上,用代数方法讨论空间的几何图形.本章首先建立空间直角坐标系,其次引进向量并介绍向量的运算,然后以向量为工具讨论空间的平面和直线,最后介绍空间曲面、二次曲面和空间曲线.

第一节 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一定点 O 作三条两两垂直的数轴,它们都以定点 O 为原点,且一般取相同的长度单位,这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴).它们的正向符合右手系(当右手的

四个手指由 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向

y 轴的正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向).通常将 x 轴、 y 轴放置在水平面上, z 轴为铅垂线,符合右手系,这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系(图 5-1),点 O 称为坐标原点.每两条坐标轴确定的平面称为坐标面,分别是 xOy 面、 yOz 面、 zOx

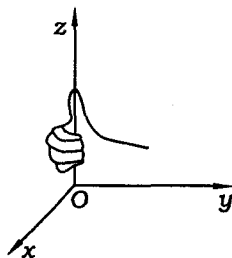


图 5-1

面.三个坐标面把空间分成八个部分,称为八个卦限.并逐个编号

为 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, 分别称为第一卦限、第二卦限、……、第八卦限(图 5-2.)

我们常采用的坐标系表示法有斜二侧(图 5-1)及正等侧(图 5-3).

设 M 为空间的一点(图 5-4), 过点 M 分别作三个与坐标轴垂直的平面, 它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P, Q, R , 其坐标依次为 x, y, z , 从而得到一个有序数组 x, y, z ; 反之, 给定一有序数组 x, y, z , 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别作 $OP = x, OQ = y, OR = z$, 然后过 P, Q, R 分别作与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的平面, 这三个平面确定了惟一的交点 M . 这样, 空间点 M 就与有序数组 x, y, z 之间建立了一一对应关系. 称 x, y, z 为点 M 的直角坐标, 记为 $M(x, y, z)$, 并依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标.

问题 坐标面上和坐标轴上的点的坐标有何特征?

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 5-5). 因为

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |NM_2|^2 = \end{aligned}$$

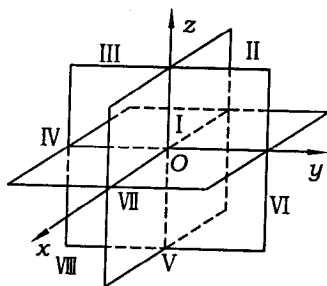


图 5-2

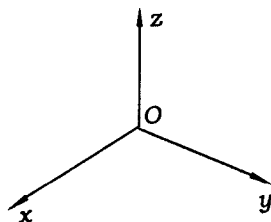


图 5-3

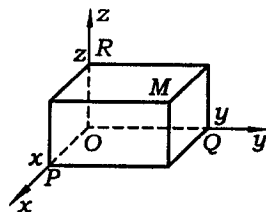


图 5-4

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

所以

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

这就是两点间的距离公式.

例 1 设 P 是空间内一点(图 5-5), 其坐标为 (x, y, z) , 即 $P(x, y, z)$, 求

(1) 点 P 引至各坐标轴的垂足之坐标为何?

(2) 点 P 引至各坐标面的垂足之坐标为何?

解 根据点与坐标的关系得:

(1) 点 $P(x, y, z)$ 引至 Ox 轴的垂足之坐标为 $(x, 0, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 Oy 轴的垂足之坐标为 $(0, y, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 Oz 轴的垂足之坐标为 $(0, 0, z)$.

(2) 点 $P(x, y, z)$ 引至 xOy 坐标面的垂足之坐标为 $(x, y, 0)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 yOz 坐标面的垂足之坐标为 $(0, y, z)$;

点 $P(x, y, z)$ 引至 xOz 坐标面的垂足之坐标为 $(x, 0, z)$.

例 2 求 $P(1, 2, 3)$ 关于各坐标轴与坐标面对称点之坐标是什么?

解 根据点与坐标及对称性的关系得:

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Ox 轴对称点的坐标为 $(1, -2, -3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Oy 轴对称点的坐标为 $(-1, 2, -3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 Oz 轴对称点的坐标为 $(-1, -2, 3)$;

点 $P(1, 2, 3)$ 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(1, 2, -3)$;

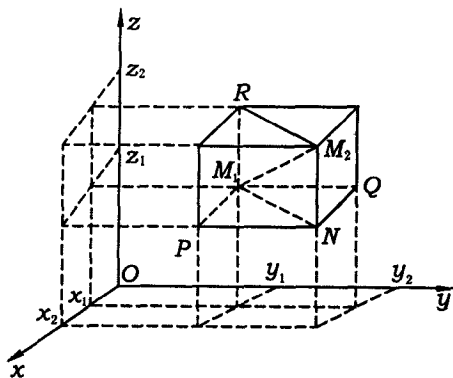


图 5-5

点 $P(1,2,3)$ 关于 yOz 面对称点的坐标为 $(-1,2,3)$;

点 $P(1,2,3)$ 关于 zOx 面对称点的坐标为 $(1,-2,3)$.

例 3 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点 M 的坐标.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上, 所以可设该点坐标为 $M(0,0,z)$, 根据题意有 $|MA| = |MB|$, 即

$$\begin{aligned}\sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} = \\ \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}\end{aligned}$$

化简得 $z = \frac{14}{9}$, 故所求的点为 $M\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$.

习题 5-1

1. 设空间直角坐标系中任意一点 P 的坐标为 (x,y,z) , 从点 P 分别向各坐标轴和各坐标平面引垂线, 试求各个垂足的坐标.

2. 试求点 $P(a,b,c)$ 关于各坐标面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.

3. 在坐标面和坐标轴上的点的坐标各有什么特点? 指出下列各点的位置.

$A(3,4,0); B(0,1,2); C(3,0,0); D(0,-1,0)$.

4. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 面的平面, 问在它们上面的点的坐标各有什么特点?

5. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上, 其底面的中心在坐标原点, 底面的顶点在 x 轴和 y 轴上, 求它各顶点的坐标.

6. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

7. 在 yOz 面上, 求与三点 $A(3,1,2), B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

8. 证明 $P_1(1,2,3), P_2(2,3,1), P_3(3,1,2)$ 三点构成一个正三角形.

第二节 向量及其线性运算

一、向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用学科时,常会遇到这样的一类量,它们既有大小又有方向,如力、力矩、位移、速度、加速度等,将这种既有大小又有方向的量,称为向量(或矢量).

在数学上,往往用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 M_1 为起点, M_2 为终点的有向线段所表示的向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (图 5-6). 有时也用一个粗体字母或书写一个上面加箭头的字母来表示向量,如 $\mathbf{a}$ 或 $\vec{a}$. 向量的大小称为向量的模

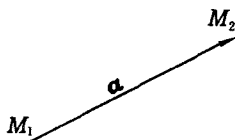


图 5-6

(也称为向量的范数,记为 $\|\cdot\|$),如向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模记为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $\mathbf{a}$ 的模为 $|\mathbf{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量,模为零的向量称为零向量,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,其方向可任意选取.

在这里我们只研究与起点无关的向量,即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方,这种向量称为自由向量.由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的模相等且方向相同,我们就说向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 是相等的,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 从几何直观来看,就是经过平移后能完全重合的向量是相等的.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行,向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行,记作 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

二、向量的线性运算(加减法、数乘向量)

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$,任取一点 A ,作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$,连接 AC (图 5-7(a)),向量 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与向

量 b 的和, 记作 $a + b$ (向量加法的三角形法则).

仿此, 也有向量加法的平行四边形法则 (图 5-7(b)).

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $a + b = b + a$

(2) 结合律

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(图 5-7(c))

设 a 为一向量, 与 a 的模相等而方向相反的向量叫做 a 的负向量, 记作 $-a$, 由此, 我们规定 $b + (-a)$ 称为向量 b 与 a 的差, 记作 $b - a = b + (-a)$ (图 5-8).

2. 向量与数的乘法

设 a 是一个非零向量, λ 是一个非零实数, 则 a 与 λ 的乘积记作 λa , 规定 λa 是一个向量, 且

(1) $|\lambda a| = |\lambda| |a|$

(2) λa 的方向为: 当 $\lambda > 0$ 时, 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, 与 a 反向.

如果 $\lambda = 0$ 或 $a = 0$, 则规定

$$\lambda a = 0.$$

容易验证, 向量与数的乘法满足以下运算规律:

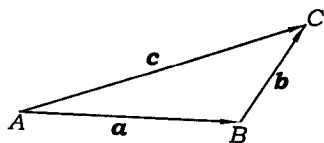
(1) 结合律 $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

(2) 分配律

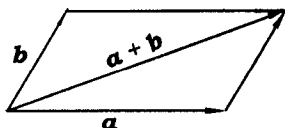
$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

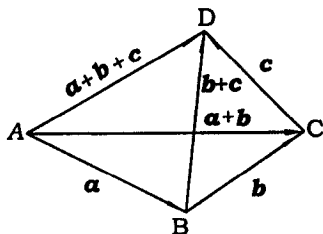
其中 λ, μ 都是常数.



(a)

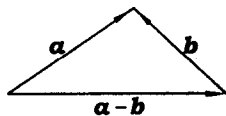


(b)

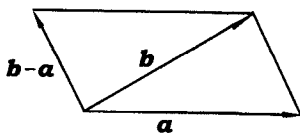


(c)

图 5-7



(a)



(b)

图 5-8

设 a 是非零向量, 由数乘向量的规定可知, 向量 $\frac{a}{|a|}$ 的模等于 1, 且与 a 同方向, 记作 a^0 , 即 $a^0 = \frac{a}{|a|}$. 显然 $a = |a| a^0$.

向量的加减法及向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

三、向量的坐标表示

为了能将向量作为研究几何图形的工具, 须将向量运算用代数表示. 因此, 在空间直角坐标系中, 若将向量的始点移到坐标原点 O , 则这个向量完全由其终点确定; 反过来, 任给空间一点 M , 总可以确定一个向量 $\overrightarrow{OM}$. 也就是说, 空间的点与始点在原点的向量有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中与 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向同向的单位向量称为基本单位向量, 分别记作 i, j, k .

设向量 a 的起点在坐标原点, 终点坐标为 $M(x, y, z)$, 过终点 M 作与坐标轴垂直的平面, 其垂足依次为 P, Q, R (图 5-9), 由向量的加法及数乘向量运算, 有

$$a = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

即

$$a = xi + yj + zk \quad (1)$$

称式(1)为向量 a 按基本单位向量的分解式. 有时为了使用的方便, 亦记

$$a = (x, y, z) \quad (2)$$

称式(2)为向量 a 的坐标表示式.

将向量 $a = \overrightarrow{M_1M_2}$ 放入空间直角坐标系中, 如果 M_1 和 M_2 的坐标分别为 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 根据向量的线性运算, 如图 5-10 所示, 得

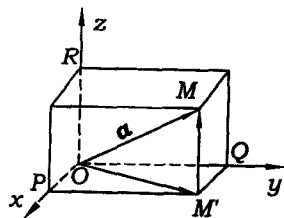


图 5-9

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \\ & (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = \\ & (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

若记 $x_2 - x_1 = a_x$, $y_2 - y_1 = a_y$, $z_2 - z_1 = a_z$, 则

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = (a_x, a_y, a_z)$$

利用向量的坐标, 可以将向量的线性运算转化为代数运算.

设 $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \pm (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = \\ & (a_x \pm b_x)\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\mathbf{j} + (a_z \pm b_z)\mathbf{k}\end{aligned}$$

即
$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = \lambda a_x\mathbf{i} + \lambda a_y\mathbf{j} + \lambda a_z\mathbf{k}$$

即
$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \quad (\lambda \text{ 为常数})$$

例 1 设有二非零向量

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

证明: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的充分必要条件是

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

证明 先证必要性. 如果 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 根据数乘向量的规定, $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ 且 $\lambda \neq 0$, 即有 $(a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z)$, 根据二向量相等有

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z$$

从而

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

再证充分性. 如果 $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$, 设其比为 λ , 于是 $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$, 即 $(a_x, a_y, a_z) = \lambda(b_x, b_y, b_z)$, 则 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, 根据数乘向量的规定, $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

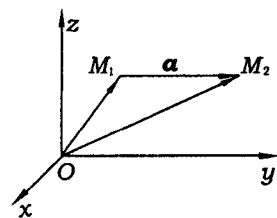


图 5-10