

GCT-ME

工程硕士

入学资格考试辅导

数 学

主编 边馥萍 谢伟松

 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

GCT-ME 工程硕士入学资格考试辅导

数 学

主 编 边 馥 萍 谢 伟 松

 天津大学出版社
Tianjin University Press

内容简介

本书是根据 2003 年在职攻读硕士专业学位研究生入学考试大纲编写的数学辅导教材,全书共分为 5 篇,18 章.内容包括算术、初等代数、几何与三角、一元微积分以及线性代数,汇总了新大纲所涉及的重要知识点.本书在给出考试重点与要点之后,结合例题进行讲解和分析,有助于考生突破难点,掌握重点.《GCT-ME 工程硕士入学资格考试辅导 数学习题集》可与本书配套使用.

图书在版编目(CIP)数据

GCT-ME 工程硕士入学资格考试辅导 数学 / 边馥萍
等主编. —天津:天津大学出版社, 2004.6

ISBN 7-5618-1946-3

I. G… II. 边… III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 IV. G643.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 048771 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm × 260mm
印 张 14.25
字 数 356 千
版 次 2004 年 6 月第 1 版
印 次 2004 年 6 月第 1 次
印 数 1 - 6 000
定 价 24.00 元

前 言

经国家教育部和国务院学位委员会批准,1997 年在全国开始进行工程硕士专业学位的试点招生,2002 年制定全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲,并自 2001 年开始全国工程硕士数学统考.几年来工程硕士的招生规模不断扩大,深受工矿企业的欢迎.广大考生迫切需要一本复习参考书,特别是 2003 年在职攻读工程硕士专业学位研究生入学考试的新大纲,在考试内容、题型、结构等方面较前几年有很大改变,要求考生具有数学方面的基础知识和基本思想,具有逻辑思维能力、数学运算能力、空间想像能力以及运用所掌握的数学知识和方法分析问题和解决问题的能力.

为了帮助广大考生做好考前复习,掌握数学方面的基础知识,进一步培养数学运算及应用能力,我们编写了《GCT-ME 工程硕士入考资格考试辅导 数学》一书.内容包括算术、初等代数、几何与三角、一元微积分以及线性代数的基础知识.全书共分为 5 篇,18 章.在每一章首先给出考试所涉及的内容、重点,然后给出例题,加强对重要的知识点进行讲解和分析,细化所汇总的基本概念、基本理论和基本方法,帮助考生突破难点,掌握重点.

本书是由天津大学数学系边馥萍、谢伟松、张颖、胡飞、曹学广、崔石花六位老师共同编写的.第 1、8、9、10 章由张颖编写,第 2、3、4、5、6、7 章由胡飞编写,第 11、12、13 章由边馥萍、曹学广编写,第 14、15、16、17、18 章由谢伟松、崔石花编写,全书由边馥萍统稿.由于编写水平所限,对于书中的疏漏和不足之处,欢迎广大读者批评指正.

编者
2004 年 4 月

目 录

第1篇 算术

第1章 算术	(1)
一、考试内容、重点	(1)
(一)考试内容	(1)
(二)考试重点	(1)
二、例题、解答、分析	(1)

第2篇 初等代数

第2章 数和代数式	(9)
一、考试内容、重点	(9)
(一)考试内容	(9)
(二)考试重点	(9)
二、例题、解答、分析	(9)
第3章 集合、映射与函数	(19)
一、考试内容、重点	(19)
(一)考试内容	(19)
(二)考试重点	(19)
二、例题、解答、分析	(19)
第4章 方程	(29)
一、考试内容、重点	(29)
(一)考试内容	(29)
(二)考试重点	(29)
二、例题、解答、分析	(29)
第5章 不等式	(39)
一、考试内容、重点	(39)
(一)考试内容	(39)
(二)考试重点	(39)
二、例题、解答、分析	(39)
第6章 数列、数学归纳法	(51)
一、考试内容、重点	(51)
(一)考试内容	(51)
(二)考试重点	(51)
二、例题、解答、分析	(51)
第7章 排列、组合、二项式定理和概率	(63)

一、考试内容、重点	(63)
(一)考试内容	(63)
(二)考试重点	(63)
二、例题、解答、分析	(63)

第3篇 几何与三角

第8章 常见几何图形	(73)
一、考试内容、重点	(73)
(一)考试内容	(73)
(二)考试重点	(73)
二、例题、解答、分析	(74)
第9章 三角学的基本知识	(83)
一、考试内容、重点	(83)
(一)考试内容	(83)
(二)考试重点	(83)
二、例题、解答、分析	(84)
第10章 平面解析几何	(92)
一、考试内容、重点	(92)
(一)考试内容	(92)
(二)考试重点	(92)
二、例题、解答、分析	(92)

第4篇 高等数学

第11章 函数、极限、连续	(105)
一、考试内容、重点	(105)
(一)考试内容	(105)
(二)考试重点	(105)
二、例题、解答、分析	(105)
第12章 一元函数微分学	(122)
一、考试内容、重点	(122)
(一)考试内容	(122)
(二)考试重点	(122)
二、例题、解答、分析	(122)
第13章 一元函数积分学	(138)
一、考试内容、重点	(138)
(一)考试内容	(138)
(二)考试重点	(138)
二、例题、解答、分析	(138)

第5篇 线性代数

第14章 行列式	(153)
一、考试内容、重点	(153)
(一) 考试内容	(153)
(二) 考试重点	(153)
二、例题、解答、分析	(153)
第15章 矩阵	(167)
一、考试内容、重点	(167)
(一) 考试内容	(167)
(二) 考试重点	(167)
二、例题、解答、分析	(167)
第16章 向量	(183)
一、考试内容、重点	(183)
(一) 考试内容	(183)
(二) 考试重点	(183)
二、例题、解答、分析	(183)
第17章 线性方程组	(194)
一、考试内容、重点	(194)
(一) 考试内容	(194)
(二) 考试重点	(194)
二、例题、解答、分析	(194)
第18章 特征值问题	(208)
一、考试内容、重点	(208)
(一) 考试内容	(208)
(二) 考试重点	(208)
二、例题、解答、分析	(208)

第1篇 算 术

第1章 算 术

一、考试内容、重点

(一) 考试内容

1. 数的概念和性质;
2. 数的四则运算与运用.

(二) 考试重点

1. 数的概念、性质及运算.

(1) 数的概念.

自然数 整数 分数 分数单位 真分数 假分数 带分数 小数 有限小数 无限小数 循环小数 数位 百分数

(2) 数的四则运算.

加法(和) 加法运算的交换律和结合律 减法(差) 乘法(积) 乘法运算的交换律、结合律和分配律 除法(商) 除法与乘法的逆运算关系

(3) 数的整除.

倍数 约数 整除的概念 奇数 偶数 质数 合数 质因数 公倍数 最小公倍数 公约数 最大公约数 互质数

(4) 比和比例.

比和比例的概念 比例内、外项 比例尺 两种相关联量的正比例关系、反比例关系

2. 算术应用题.

整数和小数四则运算应用题 分数与百分数应用题 简单方程应用题 比和比例应用题

二、例题、解答、分析

1. 若数字1被放在某两位数之后,此两位数的十位数字是 t ,个位数字是 u ,则新数是().

(A) $10t + u + 1$

(B) $100t + 10u + 1$

(C) $1000t + 10u + 1$

(D) $t + u + 1$

答 (B).

分析 十进制的两位数用 $t \cdot 10 + u \cdot 1$ 表示,把1放在该两位数后面,则相当于 u 是十位, t 是百位,故新数是 $t \cdot 100 + u \cdot 10 + 1$.

2. 在表达式 $G = \frac{en}{R+nr}$ 中, 当正实数 e, R 与 r 不变时, 若 n 增加, 则 G ().

- (A) 减少 (B) 增加
(C) 保持不变 (D) 先减少然后增加

答 (B).

分析 $G = \frac{e}{\frac{R}{n} + r}$, 当 n 增加时, $\frac{R}{n}$ 减少, 所以分母 $\frac{R}{n} + r$ 减少, 从而 G 增加.

3. 甲、乙两队同时开凿一条 880 m 长的水渠. 甲队从一端起, 每天开凿 12 m; 乙队从另一端起, 每天比甲队少开凿 2 m. 问两队在距水渠中点 () 远处会合.

- (A) 60 m (B) 30 m (C) 40 m (D) 45 m

答 (C).

分析 此题实质是求进展较慢的乙队在两队会合时距水渠中点多远. 由题意, 两队合作开凿完水渠所需天数为 $880 \div [12 + (12 - 2)] = 40$ (天). 则乙队 40 天开凿的长度为 $10 \times 40 = 400$ m. 故两队会合时乙队距水渠中点的距离为 $(880 \div 2) - 400 = 40$ m.

4. 甲、乙两工人要生产同样规格且数量相同的零件, 甲每小时可做 10 个, 乙每小时可做 8 个. 两人同时开始生产, 甲比乙提早 2 h 完成任务. 问当甲完成任务时, 乙已经做了 () 个零件.

- (A) 74 (B) 84 (C) 64 (D) 54

答 (C).

分析 当甲完成任务时, 甲比乙多做的零件个数为 $8 \times 2 = 16$ (个). 由此可知甲完成任务所用的时间为 $16 \div (10 - 8) = 8$ (小时). 故当甲完成任务时, 乙所做的零件个数为 $8 \times 8 = 64$ (个).

5. 最小的质数与最大的两位合数相乘的积不能被 () 整除.

- (A) 11 (B) 2 (C) 3 (D) 8

答 (D).

分析 最小的质数是 2, 最大的两位合数是 99, 所以它们的乘积为 198. 而 198 的质因数为 3, 3, 2, 11. 故选 (D).

6. 设 $a > 0, b > c > 0$, 则 ().

- (A) $\frac{a+b}{3a+b} > \frac{a+c}{3a+c}$ (B) $\frac{a+b}{3a+b} < \frac{a+c}{3a+c}$
(C) $\frac{a+b}{3a+b} = \frac{a+c}{3a+c}$ (D) $\frac{a+b}{3a+b}$ 与 $\frac{a+c}{3a+c}$ 的大小无法判定

答 (A).

分析 当 $m > n > 0$, 且 $p > 0$ 时, 必有 $\frac{n}{m} < \frac{n+p}{m+p}$, 这是分数的基本性质, 可通过作差验证之. 根据此性质易判断本题正确答案是 (A). 事实上, $\frac{a+c}{3a+c} < \frac{a+c+(b-c)}{3a+c+(b-c)} = \frac{a+b}{3a+b}$.

7. 有 50 个数的集合, 其算术平均数为 38, 若去掉此集合中的两数 45 与 55, 则

剩余的数所组成的集合,其算术平均数是().

- (A)38.5 (B)37.5 (C)37 (D)36

答 (B).

分析 由题意,50个数的和为 $50 \times 38 = 1900$. 去掉45与55两数后,所余48个数的和为1800,所以它们的算术平均数是 $\frac{1800}{48} = 37.5$.

8. 连减10%与20%的折扣相当于减去()的折扣.

- (A)30% (B)15%
(C)28% (D)以上答案都不正确

答 (C).

分析 $(1 - 10\%)(1 - 20\%) = 0.72 = 72\%$, $1 - 72\% = 28\%$, 共减去了28%的折扣.

9. 甲拥有一栋价值10万元的房子,他将此房以某一价格卖给乙,获利为房子原始价值的10%,乙一段时间后又将此房重新返卖给甲,乙较购房价失利10%,那么().

- (A)甲在买卖中获利1.1万元 (B)甲在买卖中亏本0.2万元
(C)甲刚好利亏平衡 (D)甲在买卖中获利0.9万元

答 (A).

分析 甲将房子卖给乙得利10%,故须以 $10 \times (1 + 10\%) = 11$ 万为卖价. 今乙又在失利10%下返卖给甲,即以 $11 \times (1 - 10\%) = 9.9$ 万为卖价,于是甲先后获利 $11 - 9.9 = 1.1$ 万元.

10. 若 n 是正整数,则 $\frac{1}{8}[1 - (-1)^n] \cdot (n^2 - 1)$ 的值().

- (A)一定是零 (B)一定是奇数
(C)不一定是整数 (D)一定是偶数

答 (D).

分析 当 n 是偶数时,表达式的值为0,是偶数;

当 n 是奇数时, $\frac{1}{8}[1 - (-1)^n] \cdot (n^2 - 1) = \frac{n^2 - 1}{4} = \frac{(n+1)(n-1)}{4}$, 由于 $n-1$ 与 $n+1$ 是相邻偶数,故表达式 $\frac{(n+1)(n-1)}{4}$ 的值是偶数. 综上,所求表达式值为偶数.

11. 甲、乙两队学生绿化校园. 如果两队合作,6天可以完成;如果单独工作,甲队比乙队少用5天. 问甲队单独工作,需()天完成.

- (A)10 (B)15 (C)12 (D)14

答 (A).

分析 设总工作量为1,甲单独工作需 x 天完成,则乙单独工作需 $x+5$ 天完成,由题意 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6}$, 解得 $x = 10$.

12. 一个最简分数,分子与分母的和为50,如果分子、分母都减去5,得到的分数是 $\frac{2}{3}$,这个分数原来是().

- (A) $\frac{15}{23}$ (B) $\frac{21}{29}$ (C) $\frac{17}{25}$ (D) $\frac{19}{27}$

答 (B).

分析 由题意, $\frac{2}{3}$ 化简前分子与分母之和为 $50 - 5 \times 2 = 40$. 设化简前分子为 x , 则分母为 $40 - x$, 从而有 $\frac{x}{40-x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 16$, 因此所求分数为 $\frac{16+5}{40-16+5} = \frac{21}{29}$.

13. 自一群男女中, 女走了 15 名, 则剩余人中的男女比例为 2:1. 在此之后, 男走了 45 名, 则男女的比例为 1:5, 问最初男女比例为().

- (A) 5:4 (B) 4:3 (C) 4:5 (D) 3:4

答 (A).

分析 设最初女人数是 x , 则男人数为 $2(x - 15)$. 再由题意知 $5[2(x - 15) - 45] = x - 15$, 解得 $x = 40$, 故最初男女比例为 $2(40 - 15):40 = 5:4$.

14. 当一气球大圆周长由 20 寸增至 25 寸时, 则半径应增加() 寸.

- (A) 5 (B) $2\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{\pi}$ (D) $\frac{5}{2\pi}$

答 (D).

分析 由题意 $C = 2\pi r$ (C 表大圆周长), $2\pi r_1 = C_1$, $2\pi r_2 = C_2$, $C_2 - C_1 = 2\pi(r_2 - r_1) \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{C_2 - C_1}{2\pi} = \frac{5}{2\pi}$.

15. 需内直径为 1 寸的圆管子() 支才能装与内直径为 6 寸的圆管子同量的水(假设管长相等).

- (A) 6π (B) 6 (C) 12 (D) 36

答 (D).

分析 关键是找出两圆管横截面面积的关系, 设大管的横截面积是 πR^2 , 小管的横截面积为 πr^2 , 则 $\frac{S_{\text{大管}}}{S_{\text{小管}}} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{6^2}{1^2} = 36$.

16. 读一本书, 已读页数是未读页数的 $\frac{1}{4}$, 如果再读 120 页, 则读完的页数是未读的 4 倍. 这本书有() 页.

- (A) 200 (B) 300 (C) 240 (D) 320

答 (A).

分析 由题意, 第一次读完的页数是全书的 $\frac{1}{5}$, 再读 120 页后, 读完的页数是全书的 $\frac{4}{5}$, 所以 120 页占全书的 $\frac{3}{5}$, 从而本书页数为 $120 \div \frac{3}{5} = 200$ (页).

17. 若一整数为两位数, 且等于其数字和的 k 倍, 今交换两个数的位置得一新数, 则此新数是其数字和的() 倍.

- (A) $9 - k$ (B) $10 - k$ (C) $11 - k$ (D) $k - 1$

答 (C).

分析 设原两位数十位是 u , 个位是 v , 则 $10u + v = k(u + v)$; 设互易数字后所得新数为其数字和的 x 倍, 则 $10v + u = x(v + u)$. 两式相加得

$$11(v + u) = (k + x)(v + u) \Rightarrow 11 = k + x \Rightarrow x = 11 - k.$$

18. 要从含盐 16% 的 40 kg 盐水中蒸去水分, 制出含盐 20% 的盐水, 应当蒸去 () 水分?

- (A) 10 kg (B) 9 kg (C) 8 kg (D) 7 kg

答 (C).

分析 设蒸去水分 x kg, 由题意得

$$40 \times 16\% = (40 - x) \times 20\%,$$

解得 $x = 8$. 此题关键应抓住前后浓度虽不同, 但溶质的质量没有变.

19. 在一宴会结束时, 总共作了 28 个握手, 假设每一位参加宴会的人对其他的与会人士均有一样的礼节, 那么与会人士共有 () 人.

- (A) 14 (B) 28 (C) 8 (D) 56

答 (C).

分析 设与会的人士共有 n 人, 对其中一人来说可以跟本人外的 $(n - 1)$ 人握手. 现有 n 个人, 故共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个握手次数, 即 $\frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n = 8$.

20. 一数被 10 所除, 余 9; 被 9 所除, 余 8; 被 8 所除, 余 7 等等; 直至被 2 所除, 余 1, 此数为 ().

- (A) 59 (B) 419 (C) 1 259 (D) 2 519

答 (D).

分析 设此数为 N , 则由题意知

$$N = 10a_9 + 9 = 9a_8 + 8 = \cdots = 2a_1 + 1,$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_9$ 表商. 所以 $N + 1 = 10(a_9 + 1) = 9(a_8 + 1) = \cdots = 2(a_1 + 1)$, 可见 $N + 1$ 是 10, 9, 8, $\dots$, 2 的倍数, 即取 $N + 1$ 为 10, 9, 8, $\dots$, 2 的最小公倍数 $2^3 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2\,520$ 即可. 所以 $N = 2\,520 - 1 = 2\,519$.

21. 甲和乙都买了一套相同的信笺盒(盒中既有信封又有信纸). 甲用它写 1 页纸的信, 而乙用它写 3 页纸的信. 甲用完了所有的信封但剩下 50 张信纸, 而乙用完了所有的信纸, 剩下 50 个信封. 问每一套信笺盒中有多少信纸?

- (A) 150 (B) 125 (C) 120 (D) 100

答 (A).

分析 设一套信笺盒中有 s 张信纸, t 个信封, 则由题意得

$$\begin{cases} s - t = 50, \\ t - \frac{s}{3} = 50, \end{cases}$$

解得 $\frac{2}{3}s = 100, s = 150$.

22. 如果一个商人能以 92 折的价格获得货物, 但仍保持他的销售价不变, 则他基于成本的利润率就会从现在的 $x\%$ 增至 $(x + 10)\%$. 他目前的利润率是 ().

- (A) 12% (B) 15% (C) 30% (D) 50%

答 (B).

分析 设现在的成本为 C , 则 92 折后的成本为 $0.92C$, 由于

$$\text{销售价} = \text{成本} + \text{利润} = \text{成本} + x\% \cdot \text{成本},$$

因而,将利润率为 $x\%$,成本为 C 的销售价同利润率为 $(x+10)\%$,成本为 $0.92C$ 的销售价等同起来,得

$$C(1+0.01x) = 0.92C[1+0.01(x+10)],$$

即

$$0.08(0.01x) = 0.012 \Rightarrow x = 15.$$

23. 一位承建商估计他的两位砌砖工人之一要用 9 h 去筑一面墙,而另一个则需 10 h. 然而,凭经验,他知道当他们合作时,他们的共同工作量会降至每小时少砌 10 块砖. 但由于赶时间,他让两个人一起工作,因而刚好需要 5 h 去筑好这面墙. 则墙中的砖数是().

- (A) 500 (B) 550 (C) 900 (D) 960

答 (C).

分析 设 x 为墙中的砖数,如果每个砌砖工人单独工作,则每人每小时砌 $\frac{x}{9}$ 和 $\frac{x}{10}$ 块砖. 合作时,他们少砌 10 块砖,即每小时砌 $(\frac{x}{9} + \frac{x}{10} - 10)$ 块砖. 现在已知他们在 5 h 内可砌 x 块砖,于是有 $5(\frac{x}{9} + \frac{x}{10} - 10) = x \Rightarrow x = 900$.

24. 现有一个三位数,其每个位置上的数字均互不相同且非零,则此三位数被其各位数字之和除时,商的最小值是().

- (A) 9.7 (B) 10.1 (C) 10.5 (D) 10.9

答 (C).

分析 设 a, b, c 分别代表此三位数的个位,十位,百位数,依题意,除至最小的商数的值是

$$\frac{a+10b+100c}{a+b+c} = \frac{a+b+c+9b+99c}{a+b+c} = 1 + \frac{9(b+11c)}{a+b+c}.$$

若 $a < b$,将 b 和 a 互换可以将商数化小. 因此,对于最小值有 $a > b$; 同理, $a > c$, 由此可知 b 或 c 都不等于 9. 因此无论 b 和 c 的值是多少,当 $a = 9$ 时,商数即为最小值. 为了将商数化小,先化小分式

$$\frac{9(b+11c)}{9+b+c},$$

或相当于化小其九分之一:

$$\frac{b+11c}{b+c+9} = 1 + \frac{10c-9}{b+c+9}.$$

当 b 为最大时值,上式为最小值,又由于 $b \neq 9$,取 $b = 8$. 现在当 c 最小值时,即 $c = 1$ 时, $\frac{(10c-9)}{c+17}$ 是最小值,即已知的三位数是 189,而所求的最小商数为 $\frac{189}{1+8+9} = 10.5$.

25. 甲、乙、丙三人,已知甲年龄的 3 倍加上乙的年龄等于丙年龄的 2 倍. 丙年龄立方的 2 倍等于甲年龄立方的 3 倍加上乙年龄的立方. 他们各自的年龄互为素数. 他们年龄的平方和是().

- (A) 42 (B) 122 (C) 46 (D) 290

答 (A).

分析 设甲、乙和丙三人的年龄分别为 d, t, h . 由题设知

$$3d + t = 2h, 2h^3 = 3d^3 + t^3,$$

这等价于

$$2(h - d) = d + t, \quad 2(h^3 - d^3) = d^3 + t^3, \quad (1)$$

将式(1)方程两边分解因式得

$$2(h - d)(h^2 + dh + d^2) = (d + t)(d^2 - dt + t^2),$$

等式两边除以等数 $2(h - d) = d + t$, 得

$$h^2 + dh + d^2 = d^2 - dt + t^2,$$

这等价于

$$t^2 - h^2 = d(h + t),$$

即

$$(t + h)(t - h) = d(h + t).$$

于是 $d = t - h$, 即 $t = d + h$. 又 $t = 2h - 3d$, 故 $h = 4d$. 因为 h, d 互为素数, 所以 $d = 1, h = 4, t = d + h = 5$, 同时

$$t^2 + d^2 + h^2 = 5^2 + 1^2 + 4^2 = 42.$$

26. 一条河的水流以每小时 3 里的速度稳定地流动. 一艘在静水中以等速行驶的汽艇, 驶向下游, 然后驶回起点. 全程 4 里. 除了艇在掉头所需的时间, 这个航程需要 1 h. 则驶向下游的速率与驶向上游的速率之比为().

- (A) 4:3 (B) 3:2 (C) 5:3 (D) 2:1

答 (D).

分析 设艇在静水中的速率为 v 里/h, 则由题意

$$\frac{4}{v+3} + \frac{4}{v-3} = 1,$$

其中 $v+3$ 为顺水速度, $v-3$ 为逆水速度. 化简得

$$v^2 - 8v - 9 = (v-9)(v+1) = 0, v = 9 (v = -1 \text{ 舍去}).$$

于是驶向下游与驶向上游速率之比为 $(9+3):(9-3) = 12:6 = 2:1$.

27. 在计算出 35 个分数的平均数后, 一个学生不小心地将这个平均数同 35 个分数混在了一起, 同时找出这 36 个数的平均数. 问第二个平均数与真正的平均数的比值是().

- (A) 1:1 (B) 2:1 (C) 36:35 (D) 35:36

答 (A).

分析 设 35 个分数为 $x_1, x_2, \dots, x_{35}$, 而其平均数为 $\bar{x}$. 于是 36 个数的平均数 A 为

$$A = \frac{1}{36}(35\bar{x} + \bar{x}) = \frac{1}{36}(36\bar{x}) = \bar{x},$$

即所求的比值是 $A:\bar{x} = \bar{x}:\bar{x} = 1:1$.

28. 设 S 为所有 3 个连续整数的平方和数所组成的集合, 则以下命题正确的是().

- (A) S 中没有任何一个元素能被 2 整除
(B) S 中没有任何一个元素可以被 3 整除, 但有些元素可以被 11 整除

(C) S 中没有任何一个元素可被 3 或 5 整除

(D) 以上结论都不正确

答 (B).

分析 三个连续整数通常可以表示为 $n-1, n, n+1$, 其中 n 为中间数. 于是集合 S 中的每一元都可写成

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2,$$

当 n 是偶数时, $3n^2 + 2$ 可以被 2 整除, 故 (A) 不对. 显然 $3n^2 + 2$ 不能被 3 整除. 为了排除选项 (C), 我们要证明: 若 n 被 5 除后有余数 1, 则 $3n^2 + 2$ 可被 5 整除. 事实上, 若

$$n = 5m + 1, n^2 = 5^2 m^2 + 2 \cdot 5m + 1,$$

则

$$3n^2 + 2 = 3 \cdot 5^2 m^2 + 6 \cdot 5m + 5 = 5(15m^2 + 6m + 1),$$

即 $3n^2 + 2$ 可被 5 整除. 故 (C) 不正确. 为了说明 (B) 正确, 我们应找出一个 n , 使得 $3n^2 + 2$ 可以被 11 整除. 而事实上, 只需 n 在被 11 除时有余数 5, 则

$$\begin{aligned} 3n^2 + 2 &= 3(11m + 5)^2 + 2 = 3(11^2 m^2 + 10 \cdot 11m + 5^2) + 2 \\ &= 11(33m^2 + 30m + 7), \end{aligned}$$

即此时 $3n^2 + 2$ 可被 11 整除, 故选 (B).

第2篇 初等代数

第2章 数和代数式

一、考试内容、重点

(一) 考试内容

实数、复数的基本概念及其运算 整式 整式的加法、乘法与除法 因式分解
分式 根式及其运算性质

(二) 考试重点

1. 实数的平方根、绝对值及运算规律.
2. 复数的模、辐角、辐角主值及其三角表示式和指数表示式.
3. 利用整式乘积的常用公式进行因式分解; 因式分解的十字相乘法.
4. 求最大公因式、最小公倍式.
5. 分式化既约分式; 分式的四则运算.
6. 根式的运算性质.

二、例题、解答、分析

1. 若 $a \geq 1$, 则 $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{a^2}$ 的值为().

- (A) $2a-1$ (B) 1 (C) $1-2a$ (D) $2a$

答 (A).

分析 因 $a \geq 1$, 所以 $\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{a^2} = |a-1| + |a| = a-1+a = 2a-1$.

2. 满足条件 $4 \leq \sqrt{x^2 - 2x + 1} < 25$ 的所有整数 x 的和为().

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

答 (B).

分析 由已知条件有 $2 \leq |x-1| < 5$, 满足该条件的整数 x 有 $-3, -2, -1, 3, 4, 5$. 故满足题设条件的所有整数 x 的和为 $-3 + (-2) + (-1) + 3 + 4 + 5 = 6$.

3. 设 $z = (x-1) + (2x-1)i$ ($x \in \mathbf{R}$), $|z| < \sqrt{10}$, 则 x 的取值范围是().

- (A) $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right)$ (B) $\left(-\frac{4}{5}, 2\right)$
(C) $(2, +\infty)$ (D) $\left(-2, \frac{4}{5}\right)$

答 (B).

分析 $|z| = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-1)^2} = \sqrt{5x^2 - 6x + 2} < \sqrt{10}$. 解得 $-\frac{4}{5} < x < 2$.

4. 设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$). 则 z^2 为纯虚数的充要条件是().

- (A) $a^2 + b^2 = 0$ (B) $a = b$
(C) $|a| = |b| \neq 0$ (D) $a + b = 0$

答 (C).

分析 $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. z^2 为纯虚数, 故 $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0, \\ 2ab \neq 0. \end{cases}$ 即 $|a| = |b| \neq 0$.

5. 已知 $f(z) = 1 - \bar{z}$, $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - i$, 则 $f(\overline{z_1 - z_2})$ 的值为().

- (A) $-3 - 4i$ (B) $3 - 4i$ (C) $4 - 4i$ (D) $4 + 4i$

答 (C).

分析 由已知条件 $z_1 - z_2 = -3 + 4i$, 故 $f(\overline{z_1 - z_2}) = 1 - (z_1 - z_2) = 1 - (-3 + 4i) = 4 - 4i$.

6. 设 α, β 是方程 $x^2 + x + k = 0$ 的两个复数根, 且 $|\alpha - \beta| = 3$, 则实数 k 等于().

- (A) -2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) -2 或 $\frac{5}{2}$ (D) 不存在

答 (C).

分析 当判别式 $\Delta = 1 - 4k \geq 0$, 即 $k \leq \frac{1}{4}$ 时: 方程 $x^2 + x + k = 0$ 有两个实根

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$. 此时 α, β 均为实数, $|\alpha - \beta| = |x_1 - x_2| = \sqrt{1-4k} = 3$, 解得

$k = -2$. 当判别式 $\Delta = 1 - 4k < 0$, 即 $k > \frac{1}{4}$ 时: 方程 $x^2 + x + k = 0$ 有两个共轭复根

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4k-1}i}{2}$. 此时 α, β 为虚数, $|\alpha - \beta| = |\sqrt{4k-1}i| = \sqrt{4k-1} = 3$, 解得

$k = \frac{5}{2}$.

综上所述 $k = -2$ 或 $\frac{5}{2}$.

7. 设 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 则 $|\cos \theta| + i|\sin \theta|$ 的辐角主值为().

- (A) θ (B) $\theta - \pi$ (C) $\theta - 2\pi$ (D) $\theta + \frac{\pi}{2}$

答 (B).

分析 因 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\cos \theta < 0, \sin \theta < 0$, 故 $|\cos \theta| + i|\sin \theta| = -\cos \theta - i\sin \theta = \cos(\theta - \pi) + i\sin(\theta - \pi)$. 又因 $\theta - \pi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 故 $|\cos \theta| + i|\sin \theta|$ 的辐角主值为 $\theta - \pi$.

8. 设 $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的三角式是 $r(\cos 2\theta + i\sin \theta)$. 则 $-a + bi$ 的三角式是().

- (A) $r(-\cos 2\theta + i\sin \theta)$ (B) $r[\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)]$
(C) $r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$ (D) $r[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)]$