北京朗曼教学与研究中心

Peculiar

北京朗曼教学与研究中心

宋伯涛 总主编

非常讲解

张为中 主编

Explanations

初二代数
教材全解全析

天津人民出版社

责任编辑：王敏 张春龙

《非常讲解》，所谓非常，就是独特新颖，与众不同，别具一格，不落窠臼。本套丛书对各科教材作了全面的解释，讲解细致，分析透彻，层次分明，条理清晰，内容丰富，对掌握教材重点、难点、疑点以及各知识点，对培养并提高理解、分析、判断、领悟、思维及解决问题的能力具有极强的实用性和指导性，是朗曼中心继《中学1+1》后又一成功力作，堪称姊妹篇。

2004修订版

ISBN 7-201-04112-6

9 787201 041124 >

ISBN 7-201-04112-6

定价：13.00元

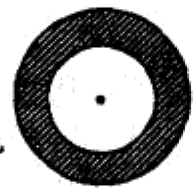
第八章　因式分解

本章知识导学

问题 1　如图，大小不等的两圆的圆心相同，这两个圆叫做同心圆，它们围成的图形（图中阴影部分）叫做圆环．已知两个同心圆的半径分别是 $R=6.25\text{cm}$，$r=3.75\text{cm}$，求它们围成的圆环的面积（π 取 3.14）．

问题 2　口算：(1)498^2-4；

(2)$\dfrac{123454321}{12345\times12345-12346\times12344}$．



通过本章的学习，你将可以利用因式分解的办法，轻松快捷地解决上面两个问题．

本章的因式分解内容是多项式因式分解中一部分最基本的知识和最基本的方法，它包括因式分解的有关概念，整式乘法与因式分解的区别和联系，因式分解的三种基本方法，即提公因式法、运用公式法、分组分解法．

多项式因式分解是代数式中的重要内容，它与前一章整式和后一章分式联系极为密切，因式分解是在整式四则运算的基础上进行的，因式分解方法的理论依据就是多项式乘法变形．因式分解也叫做分解因式，是代数中一种重要的恒等变形，它不仅在下一章分式的通分和约分中有着直接的应用，而且对于将来解方程以及研究函数性质等，都将起着重要的作用．因式分解的思想和方法始终贯穿在代数变换中，随着数域的扩充，对因式分解的最后结果的要求也不同，这要在今后的学习中不断完善，并且随着知识的增加，还要逐步学习因式分解的其他方法．另外，因式分解灵活多变的题型对于提高同学们的兴趣、开发智力、培养创新意识也有促进作用．

本章重点是因式分解的三种基本方法，难点是因式分解三种基本方法的灵活运用和解题技巧的掌握．因式分解是整式乘法的逆变形，学习时要紧紧扣住这一关键，采用对比的方法，从多项式乘法出发，根据相等关系得出因式分解公式和方法．

8.1　提公因式法

因式分解的概念是把一个多项式化成几个整式的积的形式．在学习因式分解的三种基本方法时，应结合具体例题的分解过程和分解结果，逐步了解掌握这一概念．

提公因式法是因式分解的最基本的也是最常用的方法．它的理论依据就是乘

法的分配律.首先要对欲分解的多项式进行考察,提出各项系数的最大公约数以及公有字母或公共因式中的最低公因式.运用提公因式法把多项式进行因式分解,这里的多项式中的字母指数仅限于正整数的情况,不考虑多项式中字母的指数是字母的情况,例如把多项式 $a^n-a^{n+1}+a^{n+2}$($n\in \mathbf{N}$)分解因式之类的题目一律不要求.

大纲考纲要求

1. 了解因式分解的概念,以及因式分解与整式乘法的关系.
2. 了解公因式的概念和提公因式的方法.
3. 会用提公因式法分解因式.

教材解析

1. 因式分解的概念

课本中指出:“把一个多项式化成几个整式的积的形式,这种式子变形叫做把这个多项式因式分解,也叫做把这个多项式分解因式.”理解这段文字,应注意以下几点:

(1)因式:如果多项式 A 能被多项式 B 整除($B\neq 0$),也就是说存在一个多项式 C,使等式 $A=B\cdot C$ 成立,那么多项式 B、C 就叫做多项式 A 的因式.换言之,几个整式相乘,每个整式叫做它们的积的因式.如 $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ 中,$x-1$ 和 $x-2$ 均为 x^2-3x+2 的因式.

(2)因式分解与整式乘法的关系

如要把多项式 a^2-b^2 因式分解,应写作:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.就是把多项式 a^2-b^2 化成整式 $a+b$ 和 $a-b$ 的乘积的形式.计算 $(a+b)(a-b)$,应写成:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$,就是把 $a+b$ 与 $a-b$ 的乘积求出来.

因此,因式分解与整式乘积是两种互逆的恒等变形.如下图所示.

$$(a+b)(a-b)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘积}}{\rightleftarrows}}a^2-b^2$$

从上图可以看出,整式乘积和与之对应的多项式保持相等关系,但方向不同,意义就不一样.但不能说因式分解是整式乘法的逆运算,因为整式乘法的逆运算是整式的除法.

(3)因式分解的结果必须是几个整式的积的形式,而不是几个整式的积与某项的和差形式.如 $a^2-b^2=(a+b)^2\cdot\dfrac{a-b}{a+b}$,$x^2-3x+2=x(x-3)+2$,虽然每个式子左右两边相等,但不符合因式分解的要求.

还要说明的是,在把一个多项式化为几个整式的乘积时,还要观察每一个因式是否还能继续分解,如能再分解,必须分解到不能再分解为止.

如(i)$a^5-a=a(a^4-1)$;

(ii)$a^5-a=a(a^2+a)(a^2-1)$;

(iii)$a^5-a=a(a+1)(a-1)(a^2+1)$.

应用整式乘法检查(i)、(ii)、(iii)均成立,但(iii)才是因式分解的结果.

在有理数范围内,上述因式分解已经到了最后结果.但是,随着我们进一步学习,数的范围还可以扩大到实数、复数范围,如果扩大到复数范围,a^2+1 还可以再分解,这些内容目前不便论述.在进一步学习时自会明白.

(4)最终分解结果是仅相差一个数字因数的,可看作分解结果相同.如

(i)$4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$;

(ii)$4x^2-1=4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$;

(iii)$4x^2-1=16(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4})$;

……

虽然结果形式不一样,但实质相同,对 $4x^2-1$ 分解因式习惯上写成(i)的形式.

(5)因式分解与分解因式是同义词,它属于恒等变形,即"形"变而"值"不变.

2. 公因式的概念

多项式 $ma+mb+mc$,各项都含有一个公共的因式 m,这时我们把因式 m 叫做这个多项式各项的公因式.

如:m 是多项式 $ma+mb-mc$ 各项的公因式;d 是多项式 $ad+bd-cd$ 各项的公因式.

(1)正确找出多项式各项的公因式是提公因式法的关键,找多项式各项公因式的方法是:①对于系数,如果是整数系数,取各项系数的最大公约数作为公因式的系数;②对于字母,需考虑两条,一条是取各项相同的字母;另一条是相同字母的指数取该字母在各项中指数最小的那一个.

如多项式 $8a^3b^2c-12ab^2c^2+4a^2b^3c^3d$ 各项系数的最大公约数是 4,各项都含有的相同字母是 a、b、c,a 的指数最小的是 1,b 的指数最小的是 2,c 的指数最小的是 1,因此各项的公因式是 $4ab^2c$.

(2)多项式各项的公因式可以是单项式,也可以是多项式.

如多项式 $2a(b+c)-3(b+c)$各项的公因式是 $b+c$;$5(x-y)^3+10(x-y)^2$ 各项的公因式是 $5(x-y)^2$.

3. 提公因式法

一般地,如果多项式的各项有公因式,可以把这个公因式提到括号外面,将多项式写成因式乘积的形式,这种分解因式的方法叫做提公因式法.

如 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$.

分配律是提公因式法的依据，提公因式法实质是分配律的"逆用"．即

$$m(a+b+c)\underset{\text{提公因式法}}{\overset{\text{乘法分配律}}{\rightleftharpoons}}ma+mb+mc.$$

(1)提公因式分解因式的一般步骤是：第一步找出多项式各项的公因式；第二步提出多项式各项的公因式．其关键是正确找出各项的公因式，当一个多项式各项的公因式正确找出后，需要提公因式，此时可以直接观察出提公因式后剩下的另一个因式；也可以用原多项式去除以公因式，所得的商即为提出公因式后，剩下的另一个因式．

如因式分解 $8a^3b^2-12ab^3c$，提公因式 $4ab^2$ 时，用 $4ab^2$ 分别去除原多项式的每一项，得 $(8a^3b^2-12ab^3c)\div 4ab^2=2a^2-3bc$．即 $8a^3b^2-12ab^3c=4ab^2(2a^2-3bc)$．

(2)提公因式时要干净彻底，也就是说当一个多项式提出公因式后，剩下的另一个因式中应该再也不能提出公因式了，否则，就是在找多项式各项的公因式时没有找正确．

(3)注意避免因式分解的漏项问题，一般地，提公因式后，括号里的多项式项数应与原多项式的项数一致．

如因式分解 $4a^3-6a^2b+2a$，提公因式 $2a$ 后，剩下的另一个因式应是 $2a^2-3ab+1$，而不要把 1 漏掉，写成 $2a^2-3ab$．

(4)如果多项式的首项系数是负数时，一般应先提出"－"号，使括号内的第一项的系数是正数，然后再对括号内的多项式进行提公因式．

如 $-12x^2y-16xy^2=-(12x^2y+16xy^2)=-4xy(3x+4y)$．

(5)对于类似 $4x^2y^2(a+b)-2xy^2(a+b)$ 这样的多项式，应把 $a+b$ 看作一个整体，在提公因式时整个提出，即 $4x^2y^2(a+b)-2xy^2(a+b)=2xy^2(a+b)(2x-1)$．把某个代数式看作一个整体，这种思想在今后进一步学习中还要不断地加强．

(6)把含有相同字母的式子作为公因式提出来时，要特别注意统一式子中字母的顺序．

如 $x(a-b)+y(b-a)=x(a-b)-y(a-b)=(a-b)(x-y)$．

(7)运用提公因式法分解因式，可以使一些运算简化．

如 $3.14\times 12+3.14\times 36-3.14\times 38$

$=3.14(12+36-38)=3.14\times 10=31.4$．

【例 1】 下列各式由左到右的变形，哪些是因式分解，哪些不是？

(1) $x^2-2=(x+1)(x-1)-1$；

(2) $(3x-1)(x+4)=3x^2+11x-4$；

(3) $x^2+x=x^2(1+\frac{1}{x})$；

(4) $x^2y+xy^2=xy(x+y)=x^2y+xy^2$；

(5) $-4+a^2=(a+2)(a-2)$．

思路点拨　判断一个式子是不是因式分解，关键看它是不是把多项式变形为几个整式的积的形式.

解：(1)、(2)、(3)、(4)都不是因式分解，(5)是因式分解.

误点剖析　因式分解是针对多项式而言的，是多项式的一种恒等变形，被分解的是多项式，分解的结果应该是整式的积.

如(1)、(2)、(4)中，等式的右边不是积的形式，其中(2)进行的是乘法运算，与因式分解的要求正好相反；(4)分解因式后又做乘法回去了.

(3)虽然分解成了积的形式，但其中一个因式$(1+\frac{1}{x})$不是整式，所以，这种恒等变形不是因式分解.

评注：(5)以定义去衡量，完全符合，真正理解因式分解的定义，必须重点放在理解因式分解结果的形式上，即把一个多项式化为几个整式的积的形式，原式左边应为一个多项式，右边是几个整式的积.

试解相关题

1－1　下列由左边到右边的变形，哪些是因式分解，哪些不是？

(1)$x^2-4=(x+2)(x-2)$；

(2)$x^2+3x-4=x(x+3)-4$；

(3)$x^2+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}(x+1)$；

(4)$x(a+b)=xa+xb$；

(5)$2\pi R+2\pi r=2\pi(R+r)$；

(6)$6m^2n=3m^2\cdot 2n$.

答案：(1)、(5)是因式分解；(2)、(3)、(4)、(6)不是因式分解.

【例 2】　把 $6a^2b^3+10ab^2c-4ab^3$ 分解因式.

思路点拨　首先看各项的系数 6、10 和 －4，它们的最大公约数是 2；再看各项相同的字母的指数，其中次数最低的是几. 如 a^2、a、a 中，次数最低的是 1，故它们的公因式是 a，同样在 b^3、b^2 和 b^3 中，公因式是 b^2，所以这个多项式的公因式是 $2ab^2$.

解：　$6a^2b^3+10ab^2c-4ab^3=2ab^2(3ab+5c-2b)$.

误点剖析　这类题目常见错误有两个，一是公因式找错，忘记了系数取最大公约数，或者各项中相同的字母的指数没取次数最低的，从而导致公因式找错；二是虽然公因式对了，但在提公因式后，多项式的各项余下的因式写错了.

评注：该题说的提公因式时，对数字系数和字母分别进行考虑. 如果是整数系数，就应该提最大公约数. 这里说的最大公约数就是指整数系数的情况. 以后可能还会遇到分数系数的情况等，这里暂不引伸和涉及. 字母考虑两条，一条是取各项

相同的字母，一条是各相同的字母的指数取其次数最低的.

试解相关题

2—1　把 $10x^2y+5xy^2-15xy$ 分解因式.

答案：$5xy(2x+y-3)$.

【例 3】　把 $6x^2y^2-3x^2y+3xy$ 分解因式.

思路点拨　公因式显然是 $3xy$，提公因式后，原多项式的各项分别除以 $3xy$ 所得的商式分别是 $2xy$、$-x$、1.

解：　$6x^2y^2-3x^2y+3xy=3xy(2xy-x+1)$.

误点剖析　$3xy(2xy-x+1)=6x^2y^2-3x^2y+3xy$，而 $3xy(2xy-x)=6x^2y^2-3x^2y$，所以原式分解因式为 $3xy(2xy-x+1)$，而不是 $3xy(2xy-x)$. 这就是说，1 作为项的系数通常可以省略，但如果单独成一项时，它在因式分解时不能漏掉.

评注：在提公因式后，多项式的第二项的系数是 -1，因为这个 -1 与 x 的关系是相乘，所以把 1 省略后写成 $-x$；第三项的 1 与其他项的关系是相加，不能省略. 应当注意，在提公因式后，括号内的多项式的项数应该与原多项式的项数相同.

试解相关题

3—1　把 $4a^2+6ab+2a$ 分解因式.

答案：$2a(2a+3b+1)$.

【例 4】　把 $-10a^3b^2+5a^2b^2$ 分解因式.

思路点拨　这里先把负号提出，提出负号时，括号内各项都要改变符号，防止出错.

解：$-10a^3b^2+5a^2b^2=-5a^2b^2(2a-1)$.

误点剖析　如果多项式的第一项的系数是负的，一般要提出“—”号，使括号内的第一项的系数是正的. 在提出“—”号时，多项式的各项都要变号. 这里常见错误是忘记变号，可复习去、添括号法则，以加深理解.

评注：上述解法是因为原多项式的第一项的系数是负数，所以把负号也提出去. 还可以把原多项式的两项的顺序调换一下，使第一项系数为正数，即 $-10a^3b^2+5a^2b^2=5a^2b^2-10a^3b^2=5a^2b^2(1-2a)$. 这两种解法都是正确的，就单纯的因式分解而言，两种方法均可采用，但今后如果为了某种需要而将多项式作因式分解时，就应当根据不同的需要选择较方便的一种，因此，两种方法都要熟练掌握.

试解相关题

4—1　把 $-12a^2b-16ab^2$ 分解因式.

答案：$-4ab(3a+4b)$.

【例 5】　把下列各式分解因式：

(1)$4x^2y^2(a+b)-2xy^2(a+b)$；

(2)$3a^2(x-y)+12a(y-x)$；

(3)$4(b-a)^3+2(a-b)^2$.

思路点拨 (1)首先应当考虑原多项式的两项的公因式是什么？它们的公因式应当是 $2xy^2(a+b)$. 这里我们把 $a+b$ 看作一个整体，在提公因式时整体提出.

(2)在找 $3a^2(x-y)$ 与 $12a(y-x)$ 的公因式时，关键是 $x-y$ 与 $y-x$ 是互为相反数，有没有公因式？

$\because$ $y-x=-(x-y)$，$\therefore$ 有公因式 $x-y$.

(3)这里 $(a-b)^2=[-(b-a)]^2=(b-a)^2$.

解：(1)$4x^2y^2(a+b)-2xy^2(a+b)=2xy^2(a+b)(2x-1)$.

(2)$3a^2(x-y)+12a(y-x)=3a^2(x-y)-12a(x-y)$
$=3a(x-y)(a-4)$.

(3)$4(b-a)^3+2(a-b)^2=4(b-a)^3+2(b-a)^2$
$=2(b-a)^2[2(b-a)+1]$
$=2(b-a)^2(2b-2a+1)$.

评注：前面题目中的公因式都是单项式，这里的公因式是多项式，只要把这个多项式看作一个整体，就容易理解相应的解法了.

在分解因式中，如果某个因式带有中括号，就要整理一下，尽可能把中括号去掉，如(3). 另外，如果把 $4(b-a)^3$ 变形为 $-4(a-b)^3$，当然也可以提公因式 $-2(a-b)^2$，但这样就要出现改变符号的问题，还是应当尽可能选择偶次幂来变形.

在变形中，我们应用了如下关系：

$b-a=-(a-b)$

$(b-a)^2=[-(a-b)]^2=(a-b)^2$.

显然 $(b-a)^3=[-(a-b)]^3=-(a-b)^3$

$(b-a)^4=[-(a-b)]^4=(a-b)^4$.

……

你能从中得到什么规律吗？

试解相关题

5-1 把下列各式分解因式：

(1)$m^2(p-q)+m(q-p)$；(2)$xy(x-y)-x(y-x)^2$.

答案：(1)$m(p-q)(m-1)$；(2)$x(x-y)(2y-x)$.

【例 6】 把下列各式分解因式：

(1)$3xy(x+y)-5y(x+y)-x-y$；

(2)$(m-n)(5ax+ay-1)-(n-m)(3ay-ax+1)$；

(3) $(m-n)^4+m(m-n)^3+n(n-m)^3$；

(4) $(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)+(c^2-ca-cb)$.

思路点拨　(1)中 $-x-y$ 可化为 $-(x+y)$，故该式中的公因式为 $x+y$.

(2)中 $-(n-m)=m-n$，故该式中的公因式为 $m-n$.

(3)中同样应用到 $(n-m)^3=-(m-n)^3$，因而该式中的公因式为 $(m-n)^3$.

(4)中每一括号分别分解为 $a(a+b-c)$、$b(a+b-c)$、

$c(c-a-b)=-c(a+b-c)$，故可提出公因式：$a+b-c$，然后继续分解.

解：(1)
$$\begin{aligned}&3xy(x+y)-5y(x+y)-x-y\\=&3xy(x+y)-5y(x+y)-(x+y)\\=&(x+y)(3xy-5y-1).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(m-n)(5ax+ay-1)-(n-m)(3ay-ax+1)\\=&(m-n)(5ax+ay-1)+(m-n)(3ay-ax+1)\\=&(m-n)[(5ax+ay-1)+(3ay-ax+1)]\\=&(m-n)(4ax+4ay)=4a(m-n)(x+y).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(m-n)^4+m(m-n)^3+n(n-m)^3\\=&(m-n)^4+m(m-n)^3-n(m-n)^3\\=&(m-n)^3[(m-n)+m-n]\\=&(m-n)^3(2m-2n)\\=&(m-n)^3\cdot 2(m-n)=2(m-n)^4.\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}&(a^2+ab-ac)+(ab+b^2-bc)+(c^2-ca-cb)\\=&a(a+b-c)+b(a+b-c)+c(c-a-b)\\=&a(a+b-c)+b(a+b-c)-c(a+b-c)\\=&(a+b-c)(a+b-c)\\=&(a+b-c)^2.\end{aligned}$$

误点剖析　将公因式提出后，括号中还有括号时，要去括号进行整理，并合并同类项，进行化简，否则不是因式分解的最后结果，这是因式分解的过程中最易忽视的地方.

评注：提出公因式后，如果括号内有同类项，应该合并同类项（如第(2)、(3)小题），如果括号内合并同类项后成为单项式，这时，应将单项式因式写在多项式因式的前面（如第(2)小题分解的结果）.

提公因式后，括号内的式子经合并同类项整理后，若仍有公因式，则应继续提取公因式，直到多项式的每一个因式都不能再分解为止（如第(2)小题）. 因式分解后，如果有相同的因式，应将相同的因式写成幂的形式（如第(3)小题）.

试解相关题

6－1　把下列各式分解因式：

(1)$x^2y(x-y)-2xy(y-x)$；

(2)$x(1-x)^3(1+x)^2-x^2(x-1)^2(1+x)^3$；

(3)$a(a-b)^2-2(a-b)^3-b(a-b)^2$；

(4)$15m^2n(m+n)-25mn(m+n)+10n(m+n)$.

答案与提示：

(1)$xy(x-y)(x+2)$；

(2)$x(1-x)^2(1+x)^2(1-2x-x^2)$；

(注：$1-2x-x^2$ 还可分解因式，此时不要求掌握)

(3)$(b-a)^3$；

(4)原式$=5n(m+n)(3m^2-5m+2)$

$=5n(m+n)(3m^2-3m-2m+2)$

$=5n(m+n)[3m(m-1)-2(m-1)]$

$=5n(m+n)(a-1)(3m-2)$.

【例 7】 计算：

(1)$7.6\times200.2+4.3\times200.2-200.2\times1.9$；

(2)$\dfrac{123454321}{12345\times12345-12346\times12344}$.

思路点拨 (1)各项中均有 200.2 这个因数，故可先进行因式分解，然后再计算.(2)中分母直接运算，太麻烦.不妨考虑利用因式分解进行变形.但此两项没有公因式，可先将 12346 变形为 12345+1，或将 12344 变形为 12345−1.

解：(1)原式$=200.2\times(7.6+4.3-1.9)=200.2\times10=2002$.

(2)原式分母$=12345\times12345-(12345+1)\times12344$

$=12345\times12345-12345\times12344-12344$

$=12345\times(12345-12344)-12344=1$，

∴ 原式$=123454321$.

评注：此两题中的数较大，不易直接计算，但仔细观察其中各数的特点，不难发现结构特点，因式分解的灵活应用是促进转化的根本因素.这样的例题不胜枚举.第(2)题为本章开始提出的问题 2.

试解相关题

7−1 计算

(1)$123\times\dfrac{987}{1368}+264\times\dfrac{987}{1368}+456\times\dfrac{987}{1368}+525\times\dfrac{987}{1368}$；

(2)$4.3\times200.3+7.6\times200.3-1.9\times200.3$.

答案：(1)987；(2)2003

【例 8】 证明 $81^7-27^9-9^{13}$能被 45 整除.

思路点拨 欲证 $81^7-27^9-9^{13}$能被 45 整除，只要证明 $81^7-27^9-9^{13}$能

分解出 45 这个因式即可.

$\because\ 81=3^4$，$\therefore\ 81^7=(3^4)^7=3^{28}$；

$\because\ 27=3^3$，$\therefore\ 27^9=(3^3)^9=3^{27}$；$9^{13}=(3^2)^{13}=3^{26}$.

$\therefore\ 81^7-27^9-9^{13}=3^{28}-3^{27}-3^{26}$. 显然 3^{26} 是此算式中各项的公因式，提出公因式再计算即可.

证明：$\because\ 81^7-27^9-9^{13}=3^{28}-3^{27}-3^{26}=3^{26}(3^2-3-1)$

$=3^{26}\times5=3^{24}\times3^2\times5=3^{24}\times45$.

$\therefore\ 81^7-27^9-9^{13}$能被 45 整除.

评注：解题方法是在对条件和结论的分析中提炼出来的. 往往是一个小条件的变形，就能彻底地转换我们思维的角度. 这类命题的灵活性更大，对于激发智力，提高分析问题和解决问题的能力，是很有裨益的.

试解相关题

8—1　试利用因式分解，说明下述结论.

$7^{10}-7^9-7^8$ 能被 41 整除.

答案与提示：

$7^{10}-7^9-7^8=7^8(7^2-7^1-1)=7^8\times41$.

【例 9】　求方程 $xy+x+y=1998$ 的整数解的个数.

思路点拨　因为 x、y 均为整数，所以不妨从整数的积的形式去探索解法.

解：原方程可化为 $xy+x+y+1=1999$，

即 $x(y+1)+(y+1)=1999$，

$(x+1)(y+1)=1999$.

$\because\ x+1$、$y+1$ 均为整数，1999 为质数，

$\therefore \begin{cases}x+1=1\\y+1=1999\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1=1999\\y+1=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1=-1\\y+1=-1999\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1=-1999\\y+1=-1.\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x=0\\y=1998\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1998\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\\y=-2000\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2000\\y=-2.\end{cases}$

评注：综观上面解题过程，可见恒等变形的要求较高. 将方程变形为 $xy+x+y+1=1999$ 之后，结构特征，本质问题才暴露出来. 只有仔仔细细地推敲条件中的每一个字母、每一个符号、每一种表达形式，才能激发出解题灵感的火花.

试解相关题

9—1　求方程 $xy-x-y-2=0$ 的整数解.

答案与提示：

原方程可化为$(x-1)(y-1)=3$，

$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2\\y=0.\end{cases}$

方法指引

因式分解是多项式的恒等变形，但并非所有的多项式都能因式分解．本节主要学习了因式分解的第一种方法——提公因式法．因式分解的方法很多，也很灵活，有些方法不易掌握，加上我们现有知识水平的限制，教材中只介绍了三种基本的因式分解方法，其中提公因式法是最基本、最简单的方法．

提公因式法的关键是找出多项式的公因式．提公因式的依据是分配律，其实质是逆用分配律．提公因式时，易出现“漏项”的错误，检查是否漏项的方法是用单项式乘以多项式的法则进行验证．也可以看看提公因式后，括号内的项数是否与原多项式的项数一致．如果不一致，就说明漏项了．

本节的例5、例6是公因式为二项式乘方的类型．这类多项式的因式分解，常常涉及到$(a-b)^2$与$(b-a)^2$，$(a-b)^3$与$(b-a)^3$等关系．

规律是：

当n为奇数时，$(a-b)^n=-(b-a)^n$；

当n为偶数时，$(a-b)^n=(b-a)^n$．

巩固练习

1．以下各式从左到右的变形为因式分解的请指出来：

(1)$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$；

(2)$a^2+2ab+b^2=a(a+2b)+b^2$；

(3)$m(a+b+c)=ma+mb+mc$；

(4)$a+1=a(1+\frac{1}{a})$．

2．把下列各式因式分解：

(1)$8x^3-8x^2-4x$；

(2)$-27m^2n+9mn^2-18mn$；

(3)$6x^3y(x-y)^3-4xy^3(y-x)^2$；

(4)$(a-3)^2-(2a-6)$；

(5)$(a-b-c)(a+b+c)-(b-c-a)(b+c-a)$；

(6)$-12xy^2(a-b)^2-36x^2y^2(b-a)^2+18xy(a-b)$；

(7)$(x+y)^3+(x+y)^2-(x^2+xy)$；

(8)$4(x-y)(2m+2n)-8(x-y)^2(m+n)$．

(9)$a(x-y)+(ay-ax)y$；

(10) $4a^3-3am(2a+5b)-5ab(2a-3m)$.

3. 计算：

(1) $9^3-9^2-8\times 9^2$；

(2) $(-2)^{2001}+2^{2002}$；

(3) $53.6\times 1.6+18.4\times 53.6-20\times 53.6$；

(4) $5\times 998+10$；

(5) $\dfrac{2005^3-2\times 2005^2-2003}{2005^3+2005^2-2006}$.

4. 求证：对任意自然数 n，$2^{n+4}-2^n$ 是 30 的倍数.

5. 求代数式的值：

(1) 已知：$a-b-c=16$，求 $a(a-b-c)+b(c-a+b)+c(b+c-a)$ 的值；

(2) 已知：$a=888$，$x=-6$，$y=-9$，$z=-15$，求 $3ax+3ay-3az$ 的值

巩固练习解答

1. (1)

2. (1) $4x(2x^2-2x-1)$；(2) $-9mn(3m-n+2)$；

(3) 原式 $=2xy(x-y)^2[3x^2(x-y)-2y^2]$

$=2xy(x-y)^2\cdot(3x^3-3x^2y-2y^2)$；

(4) 原式 $=(a-3)^2-2(a-3)=(a-3)(a-5)$；

(5) 原式 $=(a-b-c)(a+b+c)+(b-c-a)(a-b-c)$

$=(a-b-c)[(a+b+c)+(b-c-a)]=2b(a-b-c)$；

(6) 原式 $=-6xy(a-b)[2y(a-b)+6xy(a-b)-3]$

$=-6xy(a-b)(2ay-2by+6axy-6bxy-3)$；

(7) 原式 $=(x+y)[(x+y)^2+(x+y)-x]$

$=(x+y)(x^2+2xy+y^2+y)$；

(8) 原式 $=8(x-y)(m+n)(1-x+y)$；

(9) 原式 $=a(x-y)-a(x-y)y=a(x-y)(1-y)$；

(10) 原式 $=a[4a^2-3m(2a+5b)-5b(2a-3m)]=a(4a^2-6am-10ab)$

$=2a^2(2a-3m-5b)$.

3. (1) 原式 $=9^2\cdot(9-1-8)=0$；

(2) 原式 $=2^{2002}-2^{2001}=2^{2001}(2-1)=2^{2001}$；

(3) 原式 $=53.6\times(1.6+18.4-20)=0$；

(4) 原式 $=10\times 499+10=10(499+1)=5000$；

(5) 原式 $=\dfrac{2005^2(2005-2)-2003}{2005^2(2005+1)-2006}=\dfrac{2003(2005^2-1)}{2006(2005^2-1)}=\dfrac{2003}{2006}$.

4. 证明：$2^{n+4}-2^n=2^n(2^4-1)=2^n\times 15=30\times 2^{n-1}$.

∵ n 是自然数，∴ 2^{n-1} 是整数.

故 $2^{n+1}-2^{n}$ 是 30 的倍数.

5.(1)原式 $=a(a-b-c)-b(a-b-c)-c(a-b-c)=(a-b-c)^2$

当 $a-b-c=16$ 时，原式 $=16^2=256$；

(2)原式 $=3a(x+y-z)$

当 $a=888, x=-6, y=-9, z=-15$ 时，原式 $=3\times888\times(-6-9+15)=0$.

8.2 运用公式法

本小节首先说明什么叫做运用公式法.把乘法公式反过来，就可以得到关于因式分解的公式.教材依次介绍了 3 个公式：

平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，

完全平方公式 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

乘法公式中的字母可以表示任何数、单项式或多项式，因此，因式分解公式中的字母，也可以表示任何数、单项式或多项式.只要符合公式特点，就可以运用公式分解因式.学习时要注意掌握公式的特点，学会运用公式进行因式分解的思路与方法，通过充分地练习基本类型来记忆和运用公式.

大纲考纲要求

1.理解因式分解的平方差公式、完全平方公式的意义.

2.会将数和式子写成平方的形式，根据项数、次数、系数的特征判断能否用公式因式分解.

3.掌握每个公式的特点，并能熟练运用公式将多项式因式分解.

4.与提公因式法结合，灵活运用公式分解因式.

教材解析

1.运用公式法

我们在学习多项式乘法时，学习了三个乘法公式，列举如下：

平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.

现在我们学习因式分解，如果要分解因式的多项式能写成乘法公式的右边的形式，那么，我们就可以反过来运用乘法公式将它分解因式，这种分解因式的方法叫做运用公式法."反过来"指的是把公式左、右两边换过来，这样就可以利用这三个公式将某些多项式写成因式的积的形式，即进行因式分解.这正是运用公式法的依据.

一个多项式能否直接运用乘法公式进行因式分解，一定要认真审查这个多项式能否写成乘法公式的右边的形式，审查的过程包括以下三个步骤：

(1)如果多项式有公因式，应当先提公因式.

(2)如果多项式是两项的，可以考虑平方差公式；如果多项式是三项的，可以考虑完全平方公式(根据多项式的项数来确定它的分解因式的方法，这种考虑问题的方法在因式分解中非常重要，后面将逐步介绍这个方法).

(3)如果多项式能直接用乘法公式分解因式，它适合哪个公式？谁相当于公式中的a？谁相当于公式中的b？这三个问题必须清楚. 如x^2-6x+9可以写成$x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2$，它符合完全平方公式$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$的右边的形式，x相当于公式中的a，3相当于公式中的b，于是x^2-6x+9就可以写成$(x-3)^2$，从而达到分解因式的目的，这是运用乘法公式进行因式分解的关键.

2. 平方差公式

运用平方差公式的条件是多项式可以写成两个数的平方的差的形式. 如果能够写成上述形式，这个多项式就可以写成这两个数的和与这两个数的差的积，达到分解因式的目的.

因此，运用平方差公式分解因式要进行观察，判断所要分解的多项式是否符合平方差公式的特点，即应是二项式，两项都能写成平方的形式. 如果是，先把它变形为完全符合平方差公式的形式，再进行因式分解. 如把$9x^2-4$分解因式，可以看出它符合平方差公式的特点，先把它写成$(3x)^2-2^2$的形式，再得出$(3x)^2-2^2=(3x+2)(3x-2)$. 这样可以反映出运用公式分解因式的整个思考过程.

在上面的例子中，$9x^2=3^2\cdot x^2=(3x)^2$的根据是$(ab)^n=a^nb^n$的逆变形$a^nb^n=(ab)^n$，这种变形在运用公式法时经常用到.

3. 完全平方公式

运用完全平方公式的条件是多项式是三项式，其中首末两项分别是两个数(或两个式子)的平方，且这两项的符号相同，中间一项是这两个数(或两个式子)的积的2倍，符号正负均可. 如果能够写成上述形式，这个多项式就可以写成这两个数的和(或者差)的平方，达到分解因式的目的.

完全平方公式实际上包括两个公式，合起来写就是

$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

可以看出$2ab$前的符号与a、b间的符号一致，可以以此决定运用哪一个完全平方公式，分解因式的结果是写成两数和还是两数差的平方.

【例1】 把下列各式分解因式：

(1)m^2-49；(2)$9a^2x^4-4y^6$.

思路点拨 (1)中多项式是两数差的形式，第一个数已是平方的形式，关键是第二个数是否能写成平方的形式. 显然$49=7^2$，这里m相当于公式中的a，7

相当于公式中的 b.

(2)中要分解因式的多项式是一个二项式，并且符号相反，没有公因式，因此，可考虑平方差公式，因为 $9a^2x^4=(3ax^2)^2$，$4y^6=(2y^3)^2$，所以可用平方差公式直接分解因式，其中 $3ax^2$ 相当于公式中的 a，$2y^3$ 相当于公式中的 b.

解：(1) $m^2-49=m^2-7^2=(m+7)(m-7)$；

(2) $9a^2x^4-4y^6=(3ax^2)^2-(2y^3)^2$

$=(3ax^2+2y^3)(3ax^2-2y^3)$.

误点剖析 防止写成 $9a^2x^4=(9a^2x^2)^2$，$4y^6=(4y^3)^2$.

评注：第一步把原式写成平方差的形式，是为了明确谁相当于公式中的 a？谁相当于公式中的 b？这样在第二步套用公式时就不容易出错，建议刚开始学习运用公式法时，不要省略这一步骤，在熟练以后再省略.

试解相关题

1—1 把下列各式分解因式：

(1) $9-a^2$；　　(2) $25m^2-n^2$；

(3) $81x^2-16y^2$；　　(4) $\frac{4}{9}a^2b^2-0.01c^4$.

答案：(1) $(3+a)(3-a)$；

(2) $(5m+n)(5m-n)$；

(3) $(9x+4y)(9x-4y)$；

(4) $(\frac{2}{3}ab+\frac{c^2}{10})(\frac{2}{3}ab-\frac{c^2}{10})$.

【例 2】 把下列各式分解因式：

(1) $4(a+b)^2-(a+c)^2$；(2) $36(x+y)^2-49(x-y)^2$.

思路点拨 例 2 比例 1 略复杂些. 平方差公式中的字母 a、b 不仅可以表示单项式，也可以表示多项式. $4(a+b)^2-(a+c)^2$ 是 $2(a+b)$ 与 $a+c$ 的平方差；把式子 $36(x+y)^2-49(x-y)^2$ 改写成 $[6(x+y)]^2-[7(x-y)]^2$ 后，可以看出它是 $6(x+y)$ 与 $7(x-y)$ 的平方差，所以它们都可以运用平方差公式分解因式.

解：(1) $4(a+b)^2-(a+c)^2$

$=[2(a+b)]^2-(a+c)^2$

$=[2(a+b)+(a+c)][2(a+b)-(a+c)]$

$=(3a+2b+c)(a+2b-c)$；

(2) $36(x+y)^2-49(x-y)^2$

$=[6(x+y)]^2-[7(x-y)]^2$

$=[6(x+y)+7(x-y)][6(x+y)-7(x-y)]$

$=(13x-y)(13y-x)$.