GAODENG XUEXIAO JIAOCAI

高等学校教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

◆主编 陆宜清

郑州大学出版社

GAODENG SHUXUE

高等数学

GAODENG XUEXIAO JIAOCAI

高等学校教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

◆主编 陆宜清

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/陆宜清主编．—郑州:郑州大学出版社,
2004.8

ISBN 7-81048-931-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.陆…　Ⅲ.高等数学-高等教育-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第071955号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路40号　　邮政编码:450052
全国新华书店经销　　发行部电话:0371-6966070
河南第二新华印刷厂印制
开本:787 mm×1 092 mm　　1/16
印张:18.5
字数:425千字
版次:2004年8月第1版　　印次:2004年8月第1次印刷

书号:ISBN 7-81048-931-3/O·19　　定价:27.80元

作者名单

主　编：陆宜清

副主编：黄宝贞　林大志

编　委：陆宜清　黄宝贞　林大志

张亚飞　张　慧　徐香勤

胡玉萍　杜林涛

内容提要

本教材是根据高等农林专科《高等数学课程教学基本要求》,由郑州牧业工程高等专科学校组织编写的。全书共分七章,主要内容有函数极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程等,书末还附有积分表、习题答案与提示。

本书尽力把教学改革精神体现在教材中,注重课程对学生的素质与能力的培养。书中加强对数学概念与理论从实际问题的引入和从几何与数值方面的分析,并增加了应用实例和习题;加强计算机对教学的辅助作用,结合教学内容充分运用了数学软件,每章后均有“演示与实验”;注意“简易性”,尽量做到通俗易懂,由浅入深,富于启发,便于自学。

本书可以作为高等农林专科、高等职业教育、成人教育以及其他学时较少的工科类、经济类专业的高等数学课程教材,也可作为教师及技术人员用书或参考书。

前　言

微积分是近代数学最伟大的成就。由于它在各个领域的广泛应用，以微积分为主要内容的高等数学成为大学中最重要的基础课程之一。它不仅为后续课程和科技工作提供了必备的数学工具，而且对学生科学素质的形成和分析解决问题能力的培养产生了重要而深远的影响。但是多年来在高等数学教学中，存在着偏重向学生传授微积分的概念、理论、运算规则和技巧，忽略微积分的数学思想、方法及其与实际紧密联系的现象，不够注重该课程在学生的素质与能力的培养方面的积极作用。

进入21世纪，教学内容和课程体系的改革在全国更加深入地开展。一些思路比较新且包含有“数学实验”的新教材陆续出现，对教学改革起到了积极的推动作用。在郑州牧业工程高等专科学校数学教师多年教学改革实践的基础上，我们查阅了国内外一批教材和资料，参照全国高等农林专科《高等数学课程教学基本要求》，经过反复研讨，编写了这本教材。我们尽力把改革设想和思路体现在教材中。本教材有以下特点：

1. 从实际问题出发，引入数学概念和理论，让学生体会到微积分来源于实际，又能指导实际。在教材中我们尽量从不同方面给出实际例子并加入简单的数学模型，让学生初步体会到微积分与现实世界中的客观现象有密切联系；在习题中也适当加大应用问题的比例，以便学生能尝试利用所学微积分知识来分析和解决一些简单的实际问题。

2. 合理调整和安排教材中的概念与理论、方法与技巧和应用与实践这三部分内容，加强从几何和数值方面对数学概念的分析，从多方面培养学生的理性思维；增加用表格和图形表示的函数及其运算的介绍，注意克服偏重分析运算和运算技巧的倾向；加强实践环节，重视应用能力的培养。

3. 随着计算机技术的发展，数学教学从传统的自然科学传授走进了与计算机技术相结合的教学过程。本教材引入 Mathematica 教学软件，以发挥辅助教学的作用。在每一章后附有“演示与实验”，一方面通过数学软件的直观演示加深学生对一些重要概念和定理的理解，另一方面让学生学习使用数学软件进行各种运算、绘制图形，培养学生的动手能力，使学生有机会尝试利用数学知识和计算机解决实际问题。

4. 本教材注意“简易性”，尽量做到通俗易懂，由浅入深，富于启发，便于自学。

总之，本教材力求恰当地处理归纳与演绎、数学的发现与知识的传授，加强理论分析与实际应用能力的培养之间的关系，以提高学生的综合分析能力和创新能力。

本教材内容覆盖面比较广，教师可根据不同专业特点进行取舍。课内教学需 80 ~ 90 学时，建议可在课外再安排 20 ~ 30 学时上机实验。另外，如“ * ”部分为选学内容。

本教材由郑州牧业工程高等专科学校陆宜清任主编，黄宝贞、林大志任副主编。参加本书编写的还有郑州牧专的张亚飞、张慧、徐香勤，郑州大学数学系胡玉萍、郑州大学体育学院杜林涛等同志。这些编写者都在高校任教多年，有着丰富的教学经验，也是郑州牧业

工程高等专科学校所承担的全国高等学校教学研究中心“21世纪农林类数理化基础课程的创新与实践”课题子课题的主要成员。本书内容既汇聚了编者的教学经验，也吸收了该课题的研究成果。

在本书的编写和出版过程中，得到了有关学校的领导和有关专家的大力支持和帮助，以及郑州大学出版社有关同志的热心帮助和指导，在此一并表示诚挚的谢意!

限于编者水平，加上编写时间也比较仓促，因而教材中难免存在不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编者

2004年3月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

初等数学的研究对象主要是常量，而高等数学的研究对象主要是变量. 变量之间的相互依赖关系，常可抽象为本书所说的函数关系. 函数是将实际问题数学化的基本工具. 而极限在数学中用以描述变量的变化趋势，是微积分坚实的理论基础.

本章我们将介绍函数、极限和函数的连续性的基本概念，极限的简单计算，以及它们的一些性质，这些知识是以后各章节的基础.

第一节　函　数

一、集合、区间与邻域

(一)集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 如果事物 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$；如果事物 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$.

例1　用 N 表示正整数集，则 $1 \in \mathrm{N}$，$-1 \notin \mathrm{N}$.

含有无穷多个元素的集合称为无限集；只含有有限个元素的集合称为有限集；不含任何元素的集合称为空集，空集用 $\varnothing$ 表示.

例2　方程 $x^2 - 1 = 0$ 的实数解集为有限集；方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数解集为空集；N 为无限集.

集合有两种表示方法. 一种方法是将集合的元素一一列举在 $\{\quad\}$ 内，称为列举法. 例如

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$
$$B = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$$

都是用的列举法. 另一种方法是利用元素的特性描述集合，记作

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的特性}\},$$

称为描述法.

例3　抛物线 $y = x^2$ 上的所有点组成的集合可记作

$$A = \{(x, y) \mid y = x^2, x, y \text{ 为实数}\}.$$

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是实数. 习惯上，用 R 表示实数集，N 表示自然数集，Z 表示整数集，Q 表示有理数集.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（A 包含于 B）或 $B \supset A$（B 包含 A）. 例如，$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$，$\mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$，$\mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$.

我们规定空集为任何集合的子集.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

例4　设 $A=\{1,2\}$,$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,则 $A=B$.

(二)集合的运算

设 A,B 是两个集合,由这两个集合的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$ 或$A+B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

例5　设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid x>1\}$,则 $A\cup B=\{x\mid x\geqslant -2\}$.

由定义易知 $A\cup A=A$,$A\cup\varnothing=A$.

由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$ 或 AB,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

例6　设 $A=\{x\mid x>-1\}$,$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$,则 $A\cap B=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$.

由定义易知 $A\cap A=A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$.

由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集,记作 $A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}.$$

集合的上述几种运算满足:

1. 交换律:　$A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.
2. 结合律:　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.
3. 分配律:　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
4. 对偶律:　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$,
$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(三)区间与邻域

在高等数学中,最常用的一类实数集是区间. 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间,记作(a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,它们均不属于(a,b). 数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间,记作$[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间$[a,b]$的端点,它们均属于$[a,b]$.

类似地可定义半开区间:

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为有限区间,数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看,这些有限区间是长度有限的线段(图 1-1).

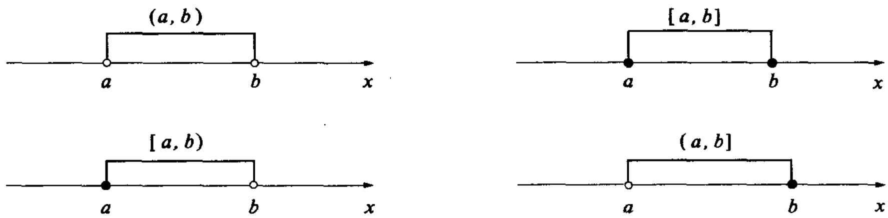

图 1－1

此外，还有无限区间. 我们引进记号 $+\infty$（读作“正无穷大”）及 $-\infty$（读作“负无穷大”）后，则可类似地表示无限区间如下（图 1－2）：

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\};$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\};$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in \mathbf{R}\}.$$

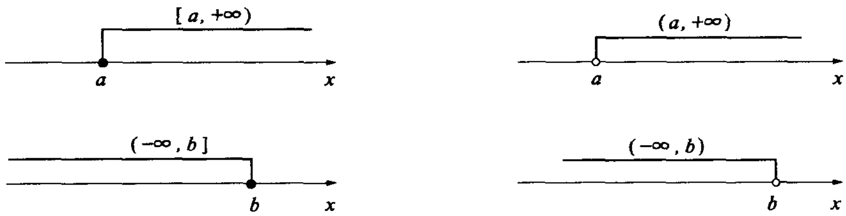

图 1－2

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a、δ 是实数，且 $\delta>0$，称集合 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$\begin{aligned}U(a,\delta)&=\{x\mid |x-a|<\delta\}\\&=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}\\&=(a-\delta,a+\delta).\end{aligned}$$

点 a 的 δ 邻域是以点 a 为中心、长度为 2δ 的开区间. 点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径（图 1－3）.

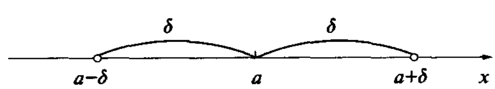

图 1－3

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$
$$=\{x\,|\,a-\delta<x<a\ 或\ a<x<a+\delta\}$$
$$=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

二、函数的概念

所谓函数关系就是变量之间的依赖关系,这种相依关系给出了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应.在某一变化过程中,两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量. 当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的值域.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时我们约定:函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总是只有一个,这种函数叫做单值函数,否则叫做多值函数.以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数.

由函数的定义可知,定义域和对应法则是函数的两个要素,当两个函数的定义域与对应法则相同时,我们就说这两个函数相同(或相等). 例如,$y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg|x|$ 是相同的,因为两者的定义域均为 $x\neq0$;或对任一 $x\neq0$,$\lg x^2=2\lg|x|$ 成立. 而 $y=\frac{x}{x}$ 与 $y=1$ 是不相同的,因为前者的定义域是 $x\neq0$,而后者的定义域是 $x\in\mathrm{R}$;尽管当 $x\neq0$ 时,$\frac{x}{x}=1$ 是成立的.

例7 求函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 的定义域.

解 函数式中,分母不能为零,偶次方根的根底数必须大于或等于0,于是有

$$\begin{cases}x+1\geqslant0,\\x-1\neq0.\end{cases}$$

即 $x\geqslant-1$ 且 $x\neq1$. 所以函数的定义域可用区间表示为

$$D=[-1,1)\cup(1,+\infty).$$

下面给出的几个函数,常被用于说明一些概念,希望大家熟悉它们.

例8 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-x, & x<0\end{cases}$$