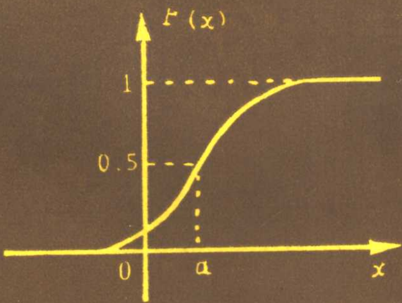
中学数学教师进修丛书

概率论题解

吕连根 编



黑龙江科学技术出版社

责任编辑：张宪臣
封面设计：刘连生

概率论题解

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
依安印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

787×1092毫米32开本8,875印张　180千字
1987年10月第1版·1987年10月第1次印刷
印数：1—6,000册
书号：13217·184　定价：1.85元

ISBN 7—5388—0043—3/N·6

前　　言

“概率论”这个学科，随着现代科学技术的发展，在自然科学、社会科学和工农业生产中的应用越来越广泛。目前，在普及教育与高等教育的各类学校中，已成为许多专业的必修课程。

“概率论”是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。由于处理问题的方法有其独特之处，初学者往往感到概念难懂，方法不易掌握，解题困难，即使解出后，也常常不能判别解的对错。为了帮助初学“概率论”的读者，特别是坚持系统自学的中学教师，增强分析问题和解决问题的能力，特编写了这本《概率论题解》。本书为已出版的《概率论》一书的配套书籍，但也可独立使用。

《概率论题解》一书，每一章都包括三部分内容，即：（一）有关的内容提要；（二）典型例题分析；（三）练习题及其解答。

在本书的编写过程中，黑龙江省教育学院王丙寅同志为第三部分提供了部分练习题和习题的解答。哈尔滨师范大学吕绍南同志仔细审阅了全书，并提出了许多宝贵意见，在此一并深致谢意。

由于水平有限，时间仓促，书中错误及欠妥之处在所难免，请读者批评指正。

吕连根

一九八五年六月

目　录

第一章 事件与概率

一、内容提要

（一）随机事件

1．随机事件

1）在一定的条件下，必然会发生的事情叫做必然事件。记为Ⅰ。

2）在一定的条件下，必然不发生的事情叫做不可能事件。记为Φ。

3）在一定的条件下，可能发生也可能不发生的事情叫做随机事件。随机事件一般简称事件。用大写字母A、B、C等表示。

必然事件和不可能事件都是确定性现象的表现，随机事件是随机现象的表现或结果。为了研究问题方便起见 我们通常把必然事件与不可能事件看作是随机事件的特例。

2．基本事件与复合事件

1）随机现象中最基本、最简单的结果称为基本事件。

2）由基本事件组合而成的事件称为复合事件。

3．随机试验与基本事件空间。

1）对自然现象进行观察或进行一次科学试验统称为一个试验。

2）如果试验在相同的条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，就称为一个随机试验。

3）用E表示一个随机试验（以下简称试验），若以e表示试验的一个可能结果，则e为E的一个基本事件。由基本事件的全体组成的集合，称为基本事件空间，并用I表示。I中元素就是试验E中的基本事件，我们看到试验E的事件是基本事件空间I中的子集。事件发生，当且仅当子集中的一个基本事件发生。

基本事件空间作为一个事件是必然事件。随机事件可以是一个基本事件，也可以是由若干个基本事件组合而成的复合事件。

（二）随机事件的关系及其运算

1．随机事件的关系

1）事件的包含关系　如果事件A发生了必然导致事件B发生，则称事件B包含了事件A（或者说事件A包含在事件B中），记作$A\subset B$（或$B\supset A$）

2）事件的等价关系（或相等关系）　若事件A发生，则事件B一定发生，反之，若B发生，则A也一定发生，即$A\subset B$且$B\subset A$同时成立，则称事件A与事件B等价（或相等），记作$A=B$。

3）事件的和（或并）　事件A与B至少发生其一所构成事件称为事件A与B的和(或并)，记作$A\cup B$(或$A+B$)。

事件A_1，A_2，…，A_n中至少发生其一所构成的事件称为这n个事件的和，记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad (或 \sum_{i=1}^{n} A_i)$$

事件A_1，A_2，…，A_n，…至少发生其一所构成的事件称为可列个事件的和，记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i (或 \sum_{i=1}^{\infty} A_i)$$

4）事件的差　事件A发生而事件B不发生所构成的事件称为事件A与B的差，记为$A-B$。

5）事件的积（或交）　事件A与事件B同时发生所构成的事件称为事件A与事件B的积（或交），记为$A\cap B$（或AB）。

事件A_1，A_2，…，A_n同时发生所构成的事件，称为这n个事件的积，记为

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i (或 \prod_{i=1}^{n} A_i)$$

事件A_1，A_2，…，A_n，…同时发生所构成的事件，称为这可列个事件的积，记为

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i (或 \prod_{i=1}^{\infty} A_i)$$

6）如果事件A与事件B不能同时发生，即若$A\cap B=\phi$，则称事件A与B互斥（或称互不相容）。

7）互逆事件（或称对立事件）　若事件A与事件B不能同时发生，但必发生其一，则称事件A与B是互逆的（或对立的）事件。

两事件为互逆事件的实质，是一个发生而另一个不发

生，或一个不发生，而另一个必然发生。

2．一般事件的运算满足下列关系：

1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

3）分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

分配律推广到有限或可列个的情形为

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),$$

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i);$$

或者

$$A\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i),$$

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i).$$

4）对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

对n个或可列个的情形为

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i},$$

或者

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

（三）事件的概率

1．概率的统计定义

在大量重复进行同一试验时，事件A发生的频率$\frac{m}{n}$总是接近于某一常数，并在它附近摆动，这个常数叫做事件A的概率，记为P(A)

2．概率的古典定义

具有以下特性的随机试验称为**古典概型的随机试验**（简称**古典概型**）。

1）有限性　基本事件的总数是有限的。若设基本事件为e_i（$i=1, 2, \cdots, n$），则基本事件空间$I=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$。

2）等可能性　基本事件空间I中的每一个基本事件生的可能性大小是均等的。

在古典概型中，若基本事件的总数为n，事件A包含其中m个基本事件（或说有m个基本事件对A有利），则规定

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

3．几何概率

设I是某一区域（可以是一维的，也可以是二维、三维的，甚至是n维的），向I中随机投一点M，如果点M落在I中任何一点这件事是等可能的（或说是均匀分布的），则说这个试验是几何型的。

对于几何型试验，事件A＝“点M落在区域$g\subset I$中”的

概率定义为

$$P(A)=\frac{g\text{的度量}}{I\text{的度量}}$$

4．概率的公理化定义

我们所研究的事件是属于基本事件空间 I 的子集所构成的一个类F。它满足下面三条：

1）$I\in F$；

2）若$A\in F$，则$\overline{A}\in F$；

3）若$A_i\in F$（$i=1,2,\cdots$），则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in F$.我们把F称为事件域。

若F是由基本空间I的一些子集所构成的事件域，则F中的元素叫做事件，I为必然事件，Φ为不可能事件。

设I是一个基本事件空间，F是由I的某些子集作元素而构成的事件域，对于F中的每一个元素A，定义一个实数P(A)与之对应，一般把这种从集合到实数的映照称为集合函数。

定义在事件域F上的一个集合函数P，如果它满足如下三个条件：

1）非负性：$P(A)\geqslant 0$，对于一切$A\in F$；

2）正则性：$P(I)=1$；

3）完全可加性：若$A_n\in F$，且$A_i\cap A_j=\phi$（$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots$）$P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$

则称P(A)为事件A的概率（即概率的公理化定义）。

上述三条性质称为概率P的三条公理，（I，F，P）称为概率空间或概率场。

（四）概率的性质

利用上述三条公理（非负性、正则性、完全可加性）可推出如下性质：

性质1　不可能事件的概率为0，即

$$P(\Phi)=0$$

性质2　有限可加性　若$A_iA_j=\Phi$（$i\neq j,i,\ j=1,2,\cdots,n$），则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质3　对立事件的概率　对任意事件A有

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质4　减法公式　若$A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

推论　若$A\subset B$，则

$$P(A)\leqslant P(B)$$

性质5　加法公式　对任意两个事件A和B有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

推论1　$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

论推2　对任意三个事件A、B、C，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

一般地，对于n个事件A_1，A_2，…，A_n有关系式

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j=2}^{n} P(A_i A_j)+\sum_{i<j<k=3}^{n} P(A_i A_j A_k)-\cdots+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

二、典型例题分析

例1 一口袋中装有红、黄、兰、白、黑五个球，试写出下列随机试验的基本事件空间：

（1）从袋中一次任取两球，纪录取球结果。

（2）从袋中任取一球，取后不放回袋中，再从袋中任取一球，纪录两次取球的结果。

（3）从袋中任取一球，取后放回袋中，再作第二次取球，纪录两次取球的结果。

（4）从袋中每次任取一球，取后不放回，直到取得红球为止，纪录取球的结果。

解 分析：因试验为一次取两个球故不存在取球的先后顺序。

若用（红、黄）表示一次取到红、黄两球。如（白、蓝）等作类似理解，则基本事件空间I_1可表示为

I_1 ={（红、黄），（红、蓝），（红、白），（红、黑），（黄、蓝），（黄、白），（黄、黑），（蓝、白），（蓝、黑），（白、黑）}

共包含$C_5^2=\frac{5\times4}{2}=10$个基本事件。

分析 2　由于试验属于不放回抽取，故第一次抽取时，袋中五个球中的任何一个都可能被取到；第二次抽取时袋中剩下的四个球的任何一个都可能被取到；一般这类试验应当考虑取到的两个球的先后顺序。

用（红、黄）表示第一次取到红球，第二次取到黄球。如（白、兰）等可作类似理解，则基本事件空间I_2可表示为

I_2＝{（红、黄），（红、兰），（红、白），（红、黑），（黄、红），（黄、兰），（黄、白），（黄、黑），（兰、红），（兰、黄），（兰、白），（兰、黑），（白、红），（白、黄），（白、兰），（白、黑），（黑、红），（黑、黄），（黑、兰），（黑、白）}

共包含$P_5^2=5\times4=20$个基本事件。

分析 3　由于试验属于放回抽取，与（2）比较，区别在于每次从袋中取球时袋中都是五个球、且两次取到球的颜色可以相同，则基本事件空间I_3可表示为

I_3＝{（红、红），（红、黄），（红、兰），（红、白），（红、黑），（黄、红），（黄、黄），（黄、兰），（黄、白），（黄、黑），（兰、红），（兰、黄），（兰、兰），（兰、白），（兰、黑），（白、红），（白、黄），（白、兰），（白、白），（白、黑），（黑、红），（黑、黄），（黑、兰），（黑、白），（黑、黑）}

共包含$5^2=25$个基本事件。

分析 4　此试验的特点如下：其一，连续取到的球的颜

色不会重复，且每次袋中的每一个球都等可能被取到；其二，只要取到红球试验就结束。即每一次试验最后取到的必是红球。

若用（兰、黄、红）表示依次取到的球为兰、黄、红。其余如（红），（黑、红）等可作类似理解。则基本事件空间I_4可表示为

I_4={（红），（黄、红），（兰、红），（白、红），（黑、红），（黄、兰、红），（黄、白、红），（黄、黑、红），（兰、黄、红），（兰、白、红），…（黑、白、红），（黄、兰、白、红），（黄、兰、黑、红），（黄、白、兰、红），…}

共包括$1+P_4^1+P_4^2+P_4^3+P_4^4=1+4+4\times3+4\times3\times2+4\times3\times2\times1=65$个基本事件。

说明1 弄清试验方式，掌握试验的基本事件空间是计算事件概率的基础。

说明 2 上述（1）、（2）、（3）三个试验是古典概型问题中常见的一类问题。此时，“口袋”可以换成“盒子”、“签筒”相应地把“球”换成“产品”，比赛前抽取的“签”或考试考查的“考签”等。

例 2 （1）袋中有六个同质量同大小的球，其中有两个白球、四个黑球。从中任取三个，求其中恰有一个白球的概率。

（2）从上述袋中（两个白球、四个黑球的六个球中）每次取一个取后不放回，这样连续抽取三次。求三个球中恰有一个白球的概率。

（3）从上述袋中（两个白球、四个黑球的六个球中）每次取一个，取后看明黑白颜色并纪录下来再放回去，这样连续抽取三次。求三个球中恰有一个白球的概率。

解　分析1　首先应弄清“从六个球中任取三个球”这个试验的基本事件是什么？共多少？（即基本事件空间是什么？）

用 a_1、a_2 表示两个白球，b_1、b_2、b_3、b_4 表示四个黑球。从这六个球中任取三个若基本事件空间为 I_1，则

$I_1=\{(a_1, a_2, b_1), (a_1, a_2, b_2), \cdots, (a_1, b_1, b_2), \cdots, (b_2, b_3, b_4)\}$

故其 I_1 可表示为

$$I_1=\begin{cases}(a_1, a_2, b_i) & 1\leqslant i\leqslant 4\\ (a_i, b_j, b_k) & i=1, 2 \quad 1\leqslant j<k\leqslant 4\\ (b_i, b_j, b_k) & 1\leqslant i<j<k\leqslant 4\end{cases}$$

其中，第一部分共有 $C_2^2C_4^1=4$ 个基本事件；第二部分共有 $C_2^1C_4^2=12$ 个基本事件。第三部分共有 $C_2^0\cdot C_4^3=4$ 个基本事件。共包含 $C_2^2C_4^1+C_2^1C_4^2+C_2^0C_4^3=20$ 个基本事件，即

$$C_6^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20\text{个基本事件。}$$

由于这个试验只有有限个基本事件，而且每个基本事件发生的可能性都是 $\frac{1}{20}$。属于古典概型。

用A表示“所取的三个球中恰有一个白球”的事件。A是 I_1 中第二部分的基本事件所复合而成。因此，A中含有 $C_2^1C_4^2=12$ 个基本事件。故由概率的古典定义，有

$$P(A)=\frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

这个问题以可推广为

所规定的试验是：总共有甲、乙二种外形相同而不同种类（颜色）的“东西”混杂在一起，其中甲类有m_1件，乙类有m_2件，今从中任取n件，其中恰好含甲类东西n_1件，乙类东西n_2件（$n_1+n_2=n$）的概率都属于这个模型，其概率为

$$\frac{C_{m_1}^{n_1} C_{m_2}^{n_2}}{C_{m_1+m_2}^{n}}$$

若把甲乙二种外形相同而不同种类的“东西”进一步推广为K种不同种类的“东西”混杂在一起。其中第1类的有m_1件，第2类的有m_2件，…第K类的有m_k件。今从中任取n件，其中恰好含第1类的n_1件，第2类的n_2件，…，第K类的n_k件。（$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$）的概率为

$$\frac{C_{m_1}^{n_1} C_{m_2}^{n_2} \cdots C_{m_k}^{n_k}}{C_{m_1+m_2+\cdots+m_k}^{n}}$$

分析 2 这里试验的方法与(1)不同了。试验下的基本事件空间变化了。此时，由例1可知基本事件空间I_2可表示成

$$I_2=\begin{cases}\begin{cases}(a_i,\ a_j,\ b_k)\\ (a_i,\ b_k,\ a_j) & i,j=1,2\quad i\neq j\quad k=1,2,3,4\\ (b_k,\ a_i,\ a_j)\end{cases}\\ \begin{cases}(a_i,\ b_j,\ b_k)\\ (b_j,\ a_i,\ b_k) & i=1,2;\ j\neq k\quad j,k=1,2,3,4\\ (b_j,\ b_k,\ a_i)\end{cases}\\ (b_i,\ b_j,\ b_k) \quad i,j,k=1,2,3,4\quad i\neq j\neq k\end{cases}$$