

普通高等教育规划教材

# 材料力学

(中学时)

天津大学国家工科力学基础课程教学基地 组编

赵志岗 叶金铎 王燕群 编

 机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育规划教材

# 材 料 力 学

(中学时)

天津大学国家工科力学基础课程教学基地 组编  
赵志岗 叶金铎 王燕群 编

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据“高等学校工科本科材料力学课程教学基本要求（中学时）”编写的，同时也是教育部立项的“面向21世纪力学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”课题的研究成果之一。

本书重组课程体系，妥善处理课程经典内容与现代科技成果的关系，注重启发式教学，力求在传授知识的同时使学生的科学素质与创新能力得到培养与提高。

本书内容共13章，内容涵盖：绪论与预备知识、杆件的内力分析、工程材料的基本力学行为、截面设计的几何学基础、应力与强度设计、变形与刚度设计、应力状态理论和强度理论、组合变形、超静定问题的直接解法、疲劳强度、压杆及杆系结构的平衡稳定性、能量原理及其应用、塑性极限设计与现代设计准则简介。

本书可作为高等工科院校机械类专业中学时材料力学课程的教材。

### 图书在版编目（CIP）数据

材料力学（中学时）/赵志岗等编. —北京：机械工业出版社，2003.8

普通高等教育规划教材

ISBN 7-111-12139-2

I. 材… II. 赵… III. 材料力学—高等学校—教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 036068 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：季顺利

责任编辑：季顺利 版式设计：张世琴 责任校对：韩晶

封面设计：姚毅 责任印制：闫焱

北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 7 月第 1 版 第 1 次印刷

1000mm×1400mmB5·11.75 印张·454 千字

定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换  
本社购书热线电话（010）68993821、88379646  
封面无防伪标均为盗版

## 前 言

本书是为高等工科院校机械类各专业编写的《材料力学》中学时课程教材。考虑到采用现代化教学技术、教学效率的提高,以及单位课时可容纳较多信息量的实际情况,本书内容较传统的中学时课程教材内容有所增加,如第十二章、第十三章,供教学中选修。

材料力学是研究工程材料力学行为及构件强度、刚度和稳定性计算理论的科学,是高等工科院校本科教育中重要的技术基础课程。本课程的知识既可直接应用于工程计算,又可为学习后继课程奠定必要的理论基础,在对学生进行工程意识与能力、科学素质与创新能力的培养中具有极其重要的作用。因而本课程的改革受到教育部及各院校领导的高度重视,“面向 21 世纪力学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践”成为教育部首批立项的课题之一,本书是该课题的研究成果之一。

本书对原课程体系按基本变形编排课程内容的方式进行了改革,突出本课程的任务,形成了新的课程体系。新课程体系与原课程体系相比,更具系统性,具有易于学习、易于掌握的特点。

为提高学生的解题能力与学习数值方法的需求,本书扩展了能量原理及其应用的内容,并应用虚功恒等式概念揭示了能量原理的数学实质。

本书注重启发式教学,在重要的知识点,都设计了[启发式教学要点]。同时增加了例题的比重与数量,适当提高例题的难度,以便于教师组织启发式教学。

本书第五、六、十章由叶金铎编写,第四、七、八章由王燕群编写,其余各章由赵志岗编写。书中的例题、习题广泛地选自各种版本的书籍与教材,恕不一一列出。谨向被选例题与习题原书的作者及参考文献的作者致以衷心的感谢。

限于作者水平,书中难免有错误、不妥之处,希望广大同仁及读者不吝赐教。

编 者  
于天津大学

# 目 录

## 前言

<b>第一章 绪论与预备知识</b> .....	1
第一节 材料力学的任务 .....	1
第二节 工程材料模型公设 .....	2
第三节 构件分类及本课程研究对象 .....	3
第四节 内力和应力 .....	4
第五节 位移、变形和应变 .....	7
第六节 胡克定律 .....	8
习 题 .....	10
<b>第二章 杆件的内力分析</b> .....	12
第一节 概 述 .....	12
第二节 梁弯曲时的内力 .....	12
第三节 分布载荷集度、剪力和弯矩之间的关系 .....	17
第四节 剪力、弯矩图的直接画法 .....	21
第五节 杆件拉伸或压缩的内力 .....	27
第六节 杆件扭转的内力 .....	28
第七节 平面刚架的内力 .....	28
第八节 平面曲杆的内力 .....	30
习 题 .....	31
<b>第三章 工程材料的基本力学行为</b> .....	36
第一节 概 述 .....	36
第二节 低碳钢的拉伸力学行为 .....	36
第三节 铸铁及其他材料拉伸力学行为 .....	40
第四节 低碳钢和铸铁的压缩力学行为 .....	41
第五节 极限应力和许可应力 .....	42
第六节 金属材料高温力学行为简介 .....	43
第七节 加载速率对材料力学行为的影响 .....	45
习 题 .....	46
<b>第四章 截面设计的几何学基础</b> .....	47
第一节 形心和截面一次轴矩 .....	47
第二节 截面二次矩和惯性半径 .....	50
第三节 组合截面的二次轴矩 .....	54

习 题	57
<b>第五章 基本变形应力计算与强度设计</b>	<b>61</b>
第一节 概 述	61
第二节 轴向拉伸(压缩)正应力与强度设计	63
第三节 圣·维南(Saint-Venant)原理和应力集中	66
第四节 轴扭转切应力	68
第五节 轴扭转的强度设计	71
第六节 矩形截面轴的扭转切应力	73
第七节 薄壁杆件的扭转切应力	75
第八节 平面弯曲横截面的正应力	81
第九节 弯曲正应力强度设计	84
第十节 矩形截面梁弯曲切应力	87
第十一节 薄壁截面梁的弯曲切应力	89
第十二节 弯曲中心	94
第十三节 连接构件与连接处的强度设计	97
习 题	101
<b>第六章 基本变形计算与刚度设计</b>	<b>115</b>
第一节 概 述	115
第二节 轴向拉伸(或压缩)变形	116
第三节 静定桁架结点位移	118
第四节 圆轴扭转变形及刚度设计	120
第五节 梁的变形及挠曲线近似微分方程	122
第六节 积分法计算梁的位移	123
第七节 叠加法计算梁的位移	129
第八节 梁的刚度设计	131
习 题	133
<b>第七章 应力状态理论及强度理论</b>	<b>139</b>
第一节 概 述	139
第二节 两向应力状态分析的数学解析法	140
第三节 两向应力状态分析的图形解析法	146
第四节 三向应力状态简介	152
第五节 经典强度理论	156
第六节 莫尔强度理论	158
第七节 强度理论的应用	161
习 题	166
<b>第八章 组合变形的强度问题</b>	<b>172</b>
第一节 概 述	172
第二节 斜弯曲	173

第三节	拉伸(或压缩)与弯曲的组合 .....	177
第四节	弯扭组合变形 .....	181
习 题	.....	187
<b>第九章</b>	<b>超静定问题的直接解法</b> .....	<b>194</b>
第一节	概 述 .....	194
第二节	力 法 .....	194
第三节	关于变形协调条件 .....	198
第四节	变形比较法 .....	201
第五节	位移法 .....	204
第六节	装配应力和温度应力 .....	208
第七节	联合超静定问题 .....	211
习 题	.....	213
<b>第十章</b>	<b>疲劳强度设计</b> .....	<b>219</b>
第一节	概 述 .....	219
第二节	交变应力要素 .....	221
第三节	材料的疲劳极限 .....	222
第四节	构件的疲劳极限 .....	224
第五节	对称循环疲劳强度设计 .....	229
第六节	疲劳极限图 .....	230
第七节	非对称循环疲劳强度设计 .....	232
第八节	非稳定交变应力累积损伤理论简介 .....	235
习 题	.....	237
<b>第十一章</b>	<b>压杆及杆系结构的平衡稳定性</b> .....	<b>240</b>
第一节	概 述 .....	240
第二节	细长压杆的临界力 .....	242
第三节	临界应力及临界应力总图 .....	245
第四节	压杆及杆系结构的稳定计算 .....	249
第五节	关于压杆平衡稳定性的再认识 .....	257
第六节	压杆稳定性的合理设计 .....	259
习 题	.....	260
<b>第十二章</b>	<b>能量原理及其应用</b> .....	<b>265</b>
第一节	概 述 .....	265
第二节	杆件的应变能 .....	265
第三节	克拉贝隆定理 .....	269
第四节	应变比能 .....	272
第五节	虚功恒等式 .....	273
第六节	单位载荷法 .....	277
第七节	图形互乘法 .....	281

第八节 互等定理 .....	285
第九节 卡氏(第二)定理 .....	287
第十节 力法的能量原理描述 .....	291
第十一节 超静定结构的最小功原理 .....	296
第十二节 能量守恒原理求解冲击问题 .....	299
习 题 .....	305
<b>第十三章 构件塑性分析及现代设计准则简介 .....</b>	<b>312</b>
第一节 概 述 .....	312
第二节 圆轴的弹塑性扭转 .....	313
第三节 梁的弹塑性弯曲 .....	318
第四节 塑性铰和极限载荷 .....	322
第五节 可靠性设计准则简介 .....	329
第六节 优化设计准则简介 .....	333
习 题 .....	337
<b>附 录 .....</b>	<b>340</b>
附录 A 材料力学发展大事记 .....	340
附录 B 型钢规格表 .....	343
附录 C 习题答案 .....	356
<b>参考文献 .....</b>	<b>366</b>



# 第一章 绪论与预备知识

## 第一节 材料力学的任务

材料力学是研究工程材料力学行为及构件安全工作设计理论的学说。工程材料的力学行为即材料受载时表现出来的有关破坏、变形的行为。

机械、土木以及其他工程结构都是由零、部件通过一定的联接方式组装而成的，这些零、部件统称为构件。结构工作时，任一构件通常都会受到载荷的作用。如机床加工零件时，主轴受到齿轮啮合力和切削力的作用，建筑物的梁和柱要承担建筑物及使用者的重力作用等。为使这些结构能正常工作，必须保证每个构件均能正常工作。因此，设计应使其具有必要的承载能力，才能满足使用要求，这种承载能力通常表现为如下三个方面。

### 一、具有必要的强度

为了保证构件的正常工作，首先必须保证在工况载荷作用下不发生破坏。此处所说的破坏，通常是指断裂或产生过大的永久变形而失效，如机床主轴在工作时不应断裂，高压容器在内部压力的作用下不能破裂，螺栓也不能产生过大的永久变形失去联接作用等。构件抵抗破坏的能力称为强度，构件具有必要的强度才能保证它能正常工作。不满足强度要求发生的失效，通常称为强度失效。

### 二、具有必要的刚度

构件受载时通常会产生变形。当载荷完全除去后，可完全消失的变形称为可恢复变形或弹性变形，反之称为永久变形或塑性变形。刚度是构件抵抗弹性变形的能力。构件受载后，产生过大的弹性变形必然会影响结构的正常工作，如机床的主轴变形过大会影响齿轮的正常啮合或引起轴承的非正常磨损，同时还会降低加工精度等。建筑物的构件变形过大时，会引起建筑物的振动及其他各种不良的影响等。这些情况在工程中都是不允许的，因而在设计构件时，应使其具有必要的抵抗弹性变形的能力，亦即刚度。不满足刚度要求发生的失效，称为刚度失效。

### 三、具有必要的稳定性

除上述的强度和刚度要求外，对于承受压缩载荷作用的柔韧构件，当该载荷超过某个数值之后，若受到微小扰动，构件会突然偏离原有的平衡构形。因而还要求构件有保持原有平衡构形的能力，工程中将这种能力，称为稳定性。杆件受

轴向压缩突然侧弯偏离原有的平衡构形称为丧失稳定，或稳定失效，其他形状的柔韧构件也有类似的失效行为。历史上曾发生多起因构件失稳引起的灾难性事故，因而这是一种非常危险的失效行为，在设计此类构件时，必须使其具有必要的稳定性。

强度、刚度和稳定性是构件设计时必须考虑的三个问题，但对于不同的构件及不同的工况，又会有所侧重和区别。

同时还应注意到安全性要求和经济性要求是一对矛盾，在满足“必要的强度、刚度和稳定性要求”的前提下，应尽可能降低构件的经济造价，这是构件设计必须遵从的原则之一。

构件都是由某种工程材料制成的，为使构件具有“必要的强度、刚度和稳定性”，除研究有关的计算理论之外，还要研究工程材料的力学行为，以指导设计时正确地选用材料。

综上所述，材料力学课程的任务是学习和研究工程材料的力学行为及构件强度、刚度和稳定性的计算理论，从而为构件选用适宜的材料，设计科学、合理的截面形状和尺寸，达到使设计既安全又经济的设计要求。

## 第二节 工程材料模型公设

材料是人类生产和生活等一切活动的物质基础，人类文明史证明，生产中所使用的材料直接反映了社会生产力发展水平和人类社会的文明程度。众所周知，人类历史上曾有石器时代、青铜器时代、铁器时代等。当前，工程材料品种繁多，如无机非金属材料，黑色及有色金属材料，各种复合及人工合成材料均得到非常广泛的应用。

材料力学既不研究材料的物质结构及制备方法，也不研究其物理、化学性能及工艺性能等。本课程研究材料的力学行为，亦即材料在载荷作用下所表现的有关变形和破坏的行为，构件在本课程中通常被视为可变形固体。

根据本课程的任务及与被研究问题有关的主要因素，对可变形固体的材料性质作某些公设——公认正确的假设，将其抽象为理想化的模型，是十分必要的。本课程在多数情况下，将采用各向同性模型。对此模型有如下公设：

(1) 连续性公设 此公设认为可变形固体的材料毫无空隙地充满它所占据的空间。按物质的微观结构观点，组成可变形固体的粒子之间并不连续，但它们之间的空隙与构件的尺寸相比极其微小，将其忽略不计不会影响问题的本质及研究结果。

(2) 均匀性公设 此公设认为组成可变形固体的同一种材料，在其体积内各处的力学行为是相同的。对工程中使用最多的金属材料而言，其各个晶粒的力学性能并不完全相同，但在构件或其被研究部分的体积中，晶粒数目极其巨大且排

列杂乱，材料所表现出来的实际上是无数晶粒行为的统计平均值，将材料各处的力学性能看作是均匀的，研究结果可以满足工程的需要。

(3) 各向同性公设 此公设认为材料的力学行为并不具有方向性，亦即在各个方向上具有同样的力学行为。各向同性材料多为金属材料，对金属的单一晶粒，其力学行为肯定是具有方向性的，大量杂乱无章排列晶粒所表现出来的宏观性能，应该是没有方向性的。

近年来，随着科学技术的飞速发展，各种新材料相继出现，并得到日益广泛的应用，如各种高分子材料、复合材料、功能材料等，这些材料在某些方面表现出与上述公设并不相同的力学行为，如非均匀性，各向异性等。即使各向同性材料，也发现它存在各种宏观缺陷，并不完全满足连续性公设。尽管如此，符合上述三公设的各向同性体材料的力学行为知识仍是研究这些新材料的力学行为知识的基础。

(4) 小变形公设 可变形固体在外力作用下要产生变形，对各种不同情况，变形可能很小，也可能相当大。本课程研究材料的失效条件，可能会涉及到较大变形。对于一般的计算方法和理论限于研究小变形。所谓小变形是指数值远远小于构件尺寸的变形。因变形很小，可以认为：

1) 材料的力学行为是弹性的，全部变形都是可恢复的。个别章节讲到永久变形问题时，届时将加以说明。

2) 在讨论材料微体、构件或结构平衡问题时，忽略变形对平衡方程的影响。本课程大多数情况下，凡涉及到平衡问题，仍采用刚体模型。对于需要修正此种说法的问题，届时给予说明。

本课程所研究的问题中，多数既有平衡问题，又有变形问题，两者是同一个问题的两个不同侧面。针对不同的研究内容采用了不同的材料模型——刚体和可变形固体，这是一种辩证的统一。因而不能将两种材料模型对立起来，它们是同一个物体在不同研究内容中的简化模型，当然这种简化应以不影响问题的本质、所得到研究结果能满足工程要求为原则。

3) 杆件的变形可能是很复杂的，但可分解为若干基本变形的叠加。个别不能分解为基本变形叠加的问题，也将在研究该问题时予以说明。

本课程由于采用了如上所述的四个公设，从而抓住了问题的本质，摒弃了次要的影响因素，建立了相对简单、方便的数学模型，便于研究，便于求解。

### 第三节 构件分类及本课程研究对象

为满足不同使用功能的需要，构件的形状是多种多样的。为研究方便，应抓住其主要特征将之模型化。通常为可归纳为如下三类：

(1) 杆 凡是一个方向（通常称为长度）的尺寸远大于其他两个方向尺寸，且其他两个方向尺寸相近的构件，称为杆，如图 1-1a 所示。垂直于杆件长度方向的截面叫做横截面。横截面形心的连线称为杆的轴线，轴线是直线的杆件叫作直杆，否则叫作曲杆。各横截面形状和尺寸不改变的杆件叫等截面杆，否则叫变截面杆。

(2) 板和壳 凡是一个方向尺寸远小于其他两个方向的尺寸，且其他两个方向尺寸相近的构件称为板或壳，如图 1-1b、c 所示。较小的尺寸叫作厚度，平分厚度的面称为中面，中面为平面者叫作板，中面为曲面者叫作壳。研究板、壳构件强度、刚度与稳定性计算理论的学说称为板壳理论。

(3) 块体 三个方向尺寸没有显著区别的构件称为块体，如图 1-1d 所示。研究块体构件计算理论的学说称为弹塑性理论。

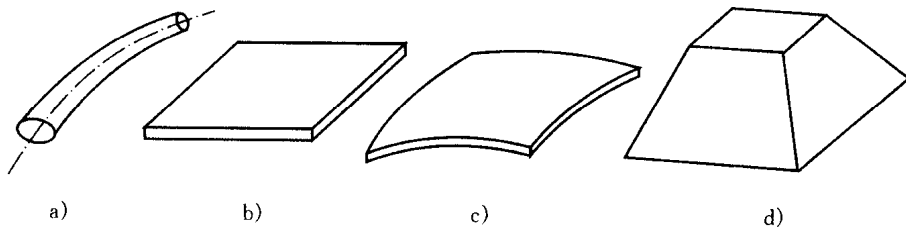


图 1-1

上述三类不同的构件及相应的计算理论既有联系也有很大的差别。板、壳及块体构件均不是本课程的研究对象，杆件是本课程的研究对象。杆件的强度、刚度和稳定性计算理论是本课程的研究内容，并以研究等直（轴线为直线的等截面）杆件的计算理论为主。

工程中杆件的变形可能是很复杂的，基于小变形公设，大多数情况下可将复杂的变形分解为若干种基本变形的叠加。构件的基本变形有：①轴向拉伸或压缩；②扭转；③弯曲；④剪切。以扭转变形为主的构件又可称为轴，以弯曲变形为主的构件则称为梁，受压的杆件通常又可称为柱。

## 第四节 内力和应力

### 一、内力、应力

固体具有保持原有构形的性能，因而在固体的各部分之间，必然存在保持原有构形必需的亲和力。当物体受到载荷作用时，一般说来，构形要发生改变，各质点的位置也要发生相应的变化，材料各部分之间的互相作用也会发生变化，这种变化的作用趋势是使各质点回到其初始位置，使物体恢复其

原有的构形。本课程所说的内力就是此种相互作用的改变量。除了加载之外，其他原因也会引起构件各部分之间互相作用的改变，如物体感受温度变化且变形受阻时等。此种由于外部原因引起的物体各部分之间互相作用力的改变量，称为内力。

物体两部分之间的内力总是成对存在的，互为作用与反作用，要揭示和计算此种内力，必须假想地在待计算内力处用截面将物体分开，成为两部分，将内力暴露出来。当取其一部分为研究对象时，一般说来，可以用静力学平衡方程将内力计算出来。此种只用静力学平衡方程即可解决的问题称为静定问题，否则称为超静定问题。

如图 1-2a 所示，物体受多个力  $\{F_n\}$  和  $\{F'_n\}$  的共同作用，处于平衡状态。若求某一截面  $m-m$  上的内力，可以假想地用  $m-m$  截面将该物体分为 A、B 两部分（如图 1-2b），此

时 A 部分的  $m-m$  截面上作用有 B 部分对它的作用力。此种作用力按某种方式分布在  $m-m$  截面上。与此同时，在 B 部分的  $m-m$  截面上也以同样的方式作用着 A 部分对它的作用力。以上两截面上的分布力互为作用力与反作用力。将这些分布着的内力向截面内某点（如形心 C）简化，并将简化结果沿图示坐标系  $Cxyz$  分解，可得到  $F_N$ （法向力，轴力）， $F_{Qy}$ 、 $F_{Qz}$ （切向力，剪力）， $M_x$ （力偶，扭矩）， $M_y$ 、 $M_z$ （力偶，弯矩），如图 1-2c 所示。考虑 A 部分平衡，可计算出  $F_N$ 、 $F_{Qy}$ 、 $F_{Qz}$ 、 $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$ 。

以上研究内力的方法（假想截面暴露内力、平衡方程计算内力）称为截面法。

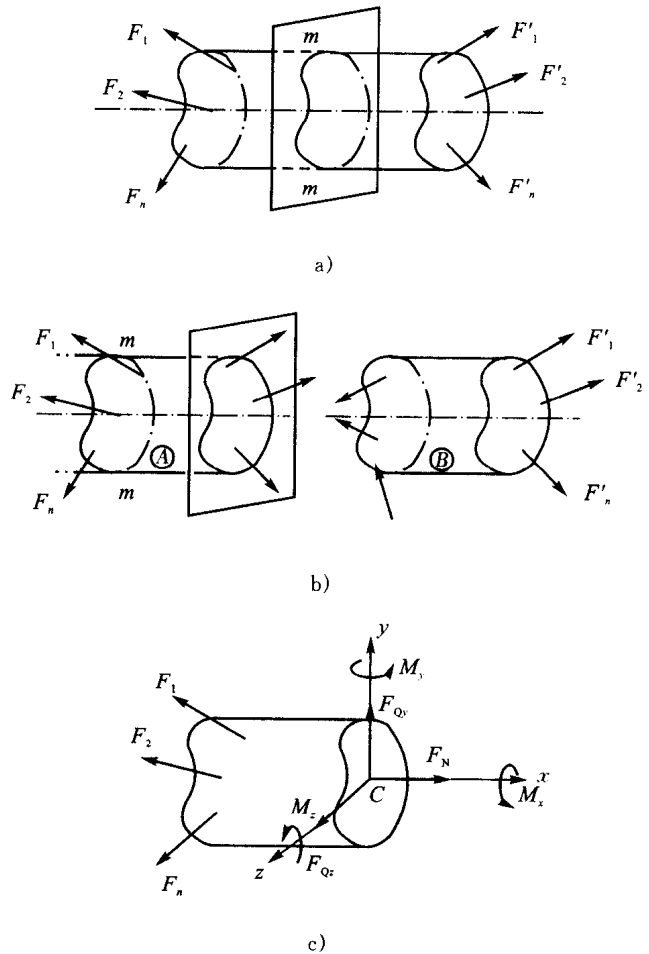


图 1-2

根据连续性公设，材料是连续的，因而内力以某种方式连续地分布在整個截面上，只使用静力学平衡方程，不可能得到内力的分布规律，因而，求解内力分布规律的问题是超静定问题，一般说来，截面内力的分布规律既是截面位置和方向的函数，也是面内位置的函数。如图 1-3a 所示，在截面内  $a$  点处周围的微面积  $\Delta A$  上，作用有内力  $\Delta F$ ，由下式定义的表示内力分布集度的物理量  $p$  称为  $a$  处的全应力

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (\text{a})$$

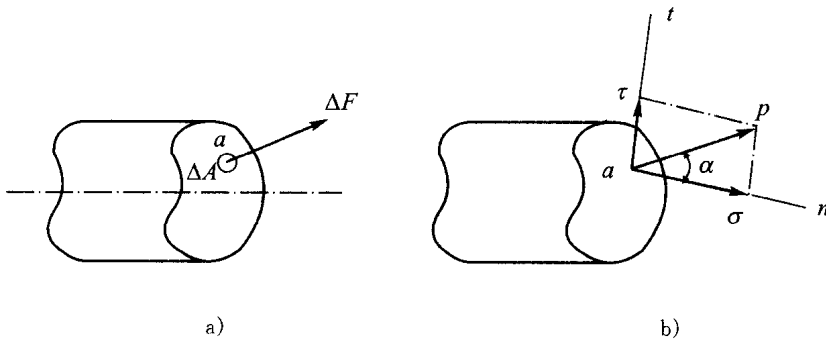


图 1-3

将全应力  $p$  沿截面在  $a$  处的法线  $n$  和切线  $t$  分解，可以得到两个应力分量，如图 1-3b 所示：

$$\sigma = p \cos \alpha \quad \tau = p \sin \alpha \quad (\text{b})$$

式中法向应力  $\sigma$  称为正应力，切向应力  $\tau$  称为切应力。应力的国际单位为帕斯卡，简称“帕”，代号为 Pa。1 帕 =  $1\text{N}/\text{m}^2$ ，材料力学中常用的单位是“兆帕” (MPa) 和“吉帕” (GPa)， $1\text{MPa} = 10^6\text{Pa} = 1\text{N}/\text{mm}^2$ ， $1\text{GPa} = 10^9\text{Pa} = 10^3\text{MPa}$ 。

## 二、应力的表示方法

为表达构件内部一点处的应力状况，通常取包围该点的一个边长分别为  $dx$ 、 $dy$ 、 $dz$  的六面体，将各界面上的应力按坐标轴方向分解，亦即为相应的应力分量，得到如图 1-4a 所示的单元体。

图中正应力由  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  表示，下标表示应力作用面的法线方向，规定拉应力为正，压应力为负。切应力由  $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{zy}$  表示，第一个下标表示应力作用面的法线方向，第二个下标表示应力分量的方向。关于切应力的符号规定将在应用时再讲授。可以证明如果已知上述 9 个应力分量，通过截面法可以计算任意斜截面上的应力。

需要说明的是：对于图 1-4a 中法线方向为  $x$  和  $-x$  的一对界面，表示同一点

处垂直于  $x$  轴截面的两个侧面，因而应具有相同的应力，其他成对界面亦然。

在材料力学中，多研究  $\sigma_z = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0$  的情形，亦即平面问题，此时非零的应力分量为  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_{xy}$ 、 $\sigma_{yx}$ ，典型单元体如图 1-4b 所示。

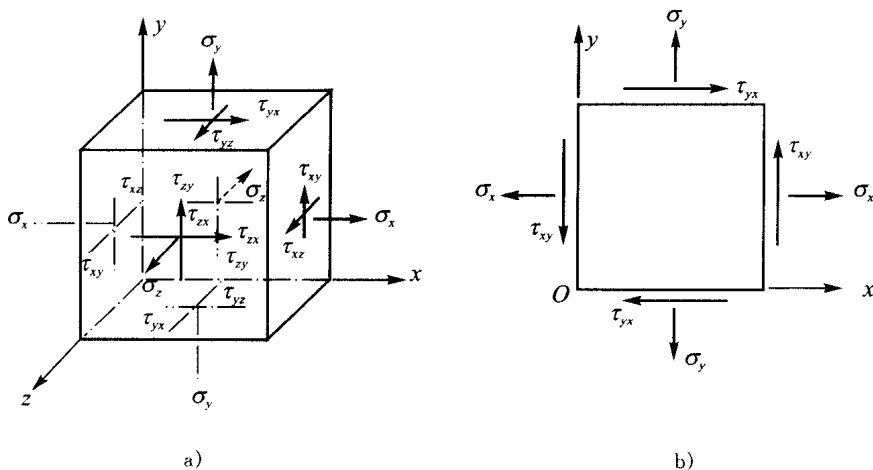


图 1-4

### 三、切应力互等定理

如图 1-4b 所示，取自受力平衡物体的平面问题单元体应是平衡的，显而易见，平衡方程  $\sum F_x = 0$ 、 $\sum F_y = 0$  会自动满足，第三个平衡方程给出

$$\sum M_O(F_i) = 0, \quad (\tau_{xy} \cdot dy \cdot t)dx - (\tau_{yx} \cdot dx \cdot t)dy = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1-1)$$

式中  $O$  为单元体的左下角点， $t$  为单元体厚度。式 (1-1) 是切应力互等定理的数学表达式。

切应力互等定理：受力平衡物体内部没有集中力偶作用的点处，互相垂直截面上的切应力数值相等，或指向截面的公共棱边，或背离该棱边。同理，对于图 1-4a 所示单元体，应有

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}、\tau_{xz} = \tau_{zx}、\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (c)$$

## 第五节 位移、变形和应变

物体受力后各质点的位置要发生相应的变化，亦即位移，从而引起物体原始构形的改变，亦即变形。为研究物体变形情况，通常在某点处取材料单元体，以该材料单元体的变形代表物体在该点处的变形。以平面问题为例，自被考察的物体内部选取典型的原始材料单元体  $abcd$ ，该单元体变形后移动到新的位置

$a'b'c'd'$ ，如图 1-5a 所示。

由图 1-5a 可以看出，单元体  $abcd$  由原始构形变化至  $a'b'c'd'$ ，可通过刚体平动、刚体转动及变形实现。消除刚体平动及转动后，得到图 1-5b。由该图可以发现单元体的变形包括：①边界长度的改变；②各边之间夹角的改变。定义  $x$  方向微线段  $\overline{ab}$  的变形为

$$\Delta l_x = \overline{a'b'} - \overline{ab} \quad (a)$$

相对变形

$$\epsilon_x = \lim_{\overline{ab} \rightarrow 0} \frac{\overline{a'b'} - \overline{ab}}{\overline{ab}} \quad (b)$$

称为  $a$  点处  $x$  方向的线应变。同理，可以定义  $a$  点处  $y$  方向微线段  $\overline{ad}$  的变形  $\Delta l_y$  和线应变  $\epsilon_y$ 。

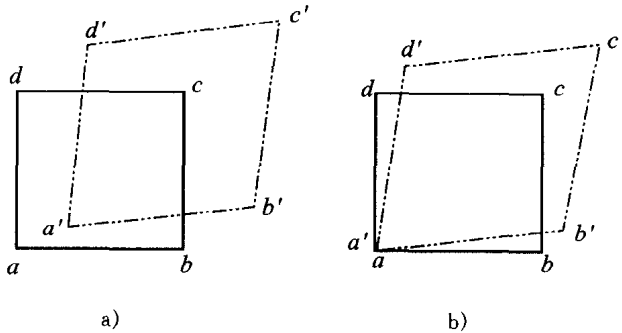


图 1-5

$x$  及  $y$  方向微线段  $\overline{ab}$  和  $\overline{ad}$  的夹角由  $\pi/2$  变为  $\angle b'a'd'$ ，减少了  $(\angle d'ad + \angle b'ab)$ ，定义  $a$  点处的切应变为

$$\gamma_{xy} = \lim_{\substack{\overline{ab} \rightarrow 0 \\ \overline{ad} \rightarrow 0}} \left( \frac{\pi}{2} - \angle b'a'd' \right) = \lim_{\substack{\overline{ab} \rightarrow 0 \\ \overline{ad} \rightarrow 0}} (\angle d'ad + \angle b'ab) \quad (c)$$

当  $x$  及  $y$  方向线段之间夹角的变化为减小时，切应变为正，反之为负。线应变  $\epsilon$  和切应变  $\gamma$  是度量物体一点处变形程度的基本物理量。由式 (b)、式 (c) 可知，它们都是无量纲的量。相应的可定义线应变  $\epsilon_y$ 、 $\epsilon_z$  和切应变  $\gamma_{yz}$  和  $\gamma_{zx}$ 。

单元体  $abcd$  的刚体平动和转动，是周围材料变形积累的结果，与单元体变形与否无关，称为单元体的位移。

## 第六节 胡克定律

考察如图 1-6a 所示承受单向拉伸应力的  $\sigma_x$  作用单元体  $abcd$ ，变形前  $\overline{ab} = dx$ ， $\overline{ad} = dy$ ，变形后  $\overline{a'b'} = (1 + \epsilon_x) dx$ ， $\overline{a'd'} = (1 + \epsilon_y) dy$ 。实验研究表明：



当应力  $\sigma_x$  不超过某一数值时, 有如下的关系:

1) 横向应变  $\epsilon_y$  和纵向应变  $\epsilon_x$  之比为常数, 亦即

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\mu \quad (1-2)$$

式中常数  $\mu$  称为泊松比。泊松比  $\mu$  是无量纲量, 它是为纪念科学家泊松 (Poisson, S. D.) 而命名的。

2) 应变  $\epsilon_x$  和应力  $\sigma_x$  成正比, 比例常数记作  $1/E$ , 于是

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (1-3)$$

将式 (1-3) 代入式 (1-2) 式可有

$$\epsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma_x \quad (1-4)$$

其次, 考察如图 1-6b 所示承受切应力  $\tau$  作用的单元体。实验研究表明, 当切应力  $\tau$  不超过某一数值时, 切应变  $\gamma$  和切应力  $\tau$  成正比, 比例常数记作  $1/G$ , 于是

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (1-5)$$

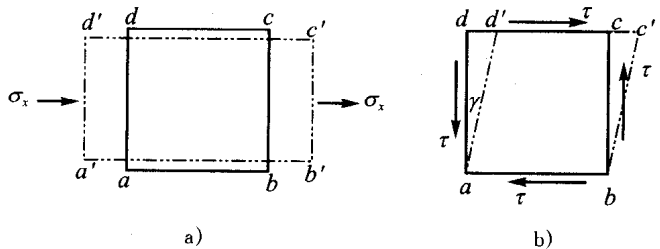


图 1-6

式 (1-3)、式 (1-4)、式 (1-5) 表达了弹性应变和应力之间的定量关系, 称为胡克 (Hooke, R.) 定律。式中  $E$  称为弹性模量,  $G$  称为切变模量, 也称为刚量模量。它们表征了材料抵抗弹性变形的能力, 单位均为 MPa。为纪念英国科学家托马斯·杨 (Young, T.) 的卓越学术成就, 弹性模量  $E$  又称为杨氏模量。

综合式 (1-3)、式 (1-4) 和式 (1-5) 式, 对于图 1-4b 所示的单元体, 可有

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式 (1-6) 称为两向的 (或广义) 胡克定律。

$E$ 、 $G$ 、 $\mu$  是表征材料力学行为的三个弹性系数, 对各向同性材料, 实验和