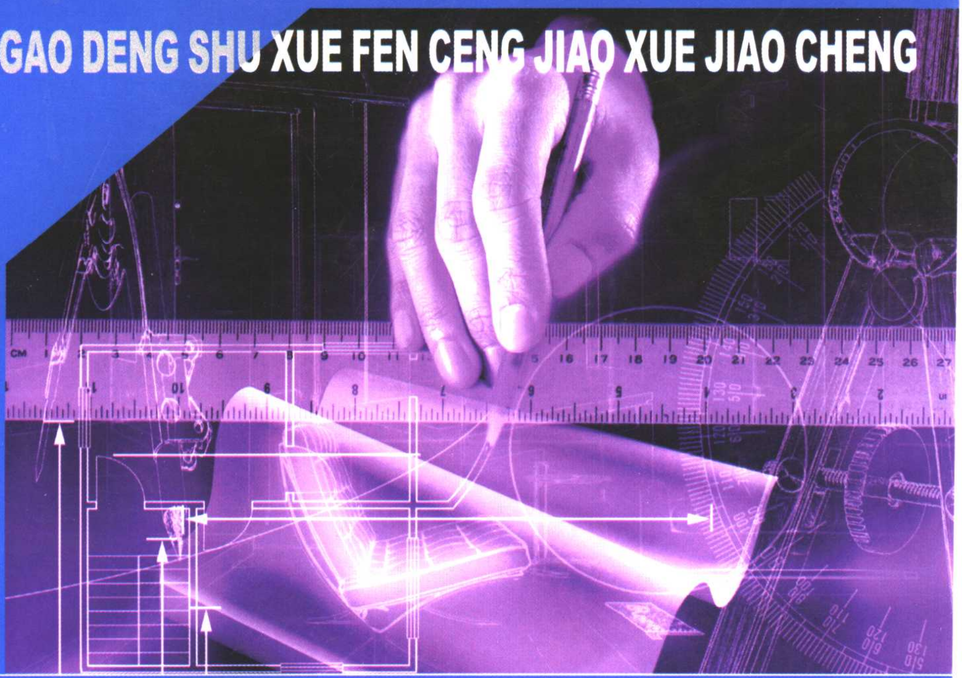
CENTURY 21

21世纪高职高专系列教材

21SHIJIGAOZHIGAOZHUANXILIEJIAOCAI

高等数学分层教学教程

GAO DENG SHU XUE FEN CENG JIAO XUE JIAO CHENG



李 瑞 主编

西北工业大学出版社

21世纪高职高专系列教材

高等数学
分层教学教程

主　编　李　瑞(苏州工业园区职业技术学院)
主　审　卫　国(美国北卡罗莱纳大学)
副主编　宋延奎(南京师范大学)
　　　　吴焕芹
编　者　李　瑞　宋延奎　吴焕芹
　　　　翁幼珍　柳　杰

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书共分11章，其中包括一元函数微积分学、多元函数微积分学以及线性代数、拉普拉斯变换等部分工程数学的教学内容。该教程的特点是分层教学，针对不同专业和学习基础的学生提供相应的教学内容，有利于教学和自学。书末附有希腊字母的英文读音对照表、常用数学符号的英文名称和习题答案。

本书在向读者介绍高等数学的同时，力求帮助读者建立起唯物主义的世界观，使读者能够用科学的思想方法和观点去从事科学研究和技术工作。

本教材适用于高职高专院校、成人高校的学生使用。对于普通高校的本、专科学生，也是一本很好的教学参考书。本书既可作为工科高等数学教材，也可作为经济、管理类高等数学教学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学分层教学教程/李瑞主编．—西安：西北工业大学出版社，2004.6
(21世纪高职高专系列教材)
ISBN 7-5612-1757-9

Ⅰ．高… Ⅱ．李… Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第019108号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 **邮编**：710072 **电话**：029-88493844
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西兴平市印刷厂印装
开　　本：787 mm×960 mm 1/16
印　　张：22.5
字　　数：397千字
版　　次：2004年6月第1版 2004年6月第1次印刷
印　　数：1～5 000册
定　　价：30.00元

序

高等职业教育是在我国高等教育大发展的浪潮中崛起的一个新的教育类型，是职业教育的高等阶段，是高等教育的重要组成部分。高等职业教育以培养适应生产、建设、管理、服务第一线需要的高等技术应用型专门人才为根本任务，以适应社会需要为目标，以培养技术应用能力为主线来设计教材的内容、结构和培养方案。高等职业教育由于其毕业生应具有基础理论适度、技术和应用能力强、知识面较宽、素质较高等特点，因而在我国高等教育事业中占有重要的地位，在我国社会主义现代化建设事业中发挥着重要的作用。随着社会的发展、科技的进步，我国的高等职业教育必将进一步发展、壮大。

教材建设是高等学校建设的一项基本内容，培养和造就适应生产、建设、管理、服务第一线需要的高等技术应用性专门人才，要求我们必须重视高等职业教育教材改革与建设，编写和出版一批具有高等职业教育自身特色的高质量教材。

目前，我国的高等职业教育正在蓬勃发展，部分学校已经取得了一些成功的经验，并逐渐形成了自己的办学特色，但高等职业教育的教材建设明显跟不上发展的要求。针对高等职业教育教材的现状，根据教育部提出的近5年内“编写出版一批有特色的基础课程和专业主干课程教材”的工作目标，西北工业大学金叶信息技术学院和西北工业大学出版社密切配合，共同策划，在深入调查、认真研究的基础上，大胆创新，推出了一系列针对性强、难易适中、具有高等职业教育特色的教材。该系列教材具有如下特点。

1. 内容新颖，体现先进性

在研究国内外同类教材的基础上，汲取了有用的养料，并根据专业实际，适当介绍相关科技领域的新进展、新方法、新技术。

2. 体系独特,体现新观念

本系列教材以能力培养为主,所涉及的基础理论深浅适度。教材重在加强学生的基本实践能力与操作技能、专业技术应用能力与专业技能、综合实践能力与综合技能的培养,书中介绍的基础理论,以“必需、够用”为度。

3. 品种多样,体现全面性

本系列教材将教科书、教学参考书、实验教材和视听教材配套,便于教师教学,也便于学生自学。

4. 作者实力强大,体现高水平

西北工业大学金叶信息技术学院一直注重培养与高职教育相适应的“双师型”的教师队伍。本系列教材的作者均具有多年的施教经验,现在仍活跃在教学第一线。

5. 编写形式多样,体现新思路

网络化、电子化、数字化是当今社会的特色,本系列教材倡导电子讲稿和多媒体课件的配套出版,以给作者和读者提供一个更加广阔的发展空间。

该系列教材首批推出12种,所有书稿几经修改,并经同行专家审定,内容选材新颖、实用,重在对基本概念的启发、理解和提高高职生分析问题、解决问题的能力,因而我热情地向大家推荐这一系列教材,希望它能对广大读者的学习有所帮助,更期望它能在强化素质教育、推动高等职业教育方面起到积极的作用。

姜澄宇*

2003年1月

---

* 姜澄宇,西北工业大学校长,教授,博士生导师。

21世纪高职高专系列教材
编 委 会

目　录

第一部分　一元函数微积分学

第二部分　多元函数微积分学

第三部分 工程数学

第一部分

一元函数微积分学

牛顿(Newton，Isaac,1642—1727年),英国数学家、物理学家、天文学家

“如果我之所见比笛卡儿等人要远一点，那只是因为我是站在巨人肩膀上的缘故.”

——牛顿

牛顿出身于农民家庭，幼年颇为不幸：他是一个遗腹子，又是早产儿，3 岁时母亲改嫁，把他留给外祖父母，从小过着贫困孤苦的生活．他在条件较差的地方学校接受了初等教育，中学时也没有显示出特殊的才华．1661 年考入剑桥大学三一学院，由于家庭经济困难，学习期间还要从事一些勤杂劳动以减免学费．由于他学习勤奋，并有幸得到著名数学家巴罗教授的指导，认真钻研了加利略、开普勒、沃利斯、笛卡儿、巴罗等人的著作，还做了不少实验，打下了坚实的基础，1665 年获学士学位．

1665 年，伦敦地区流行鼠疫，剑桥大学暂时关闭．牛顿回到伍尔索普，在乡村幽居的两年中，终日思考各种问题、探索大自然的奥秘．他平生三大发明，微积分、万有引力定律、光谱分析，都萌发于此，这时他年仅 23 岁．后来牛顿在追忆这段峥嵘的青春岁月时，深有感触地说："当年我正值发明创造能力最强的年华，比以后任何时期更专心致志于数学和科学．"并说："我的成功当归功于精力的思索．""没有大胆的猜想就作不出伟大的发现．"

牛顿临终时说："我不知道世人对我怎样看法，但是在我看来，我只不过像一个在海边玩耍的孩子，偶尔很高兴地拾到几颗光滑美丽的石子或贝壳，但那浩瀚无崖的真理的大海，却还在我面前未曾被我发现．"

——摘自李心灿教授的《微积分的创立者及其先驱》

第1章　函数的极限与连续性

(Limits and Continuity of Functions)

本章分层教学要求

内容＼要求				级别	教学要求					
					理论部分			计算部分		
序号	教学内容	重点	难点		理解	了解	知道	熟练	掌握	会
1	极限的概念,函数有一点有极限的必要充分条件	√	√	B		√				
				A	√					
				A^+	√					
2	极限的四则运算法则和两个重要极限	√		B					√	
				A				√		
				A^+				√		
3	无穷小的概念,无穷小的性质			B		√			√	
				A	√				√	
				A^+	√			√		
4	无穷小与无穷大的关系,用二者的关系求极限			B			√		√	
				A		√			√	
				A^+		√		√		
5	函数在一点连续的概念,会用汉语描述函数连续性概念的本质	√	√	B		√				
				A	√					
				A^+	√					
6	函数间断点的概念,间断点的两个分类(计算)		√	B			√			
				A		√				√
				A^+	√				√	
7	闭区间上连续函数的性质	√		B			√			
				A		√				
				A^+	√					

【本章提示】 从数学的发展史来看，由初等数学到高等数学的转变，本质上是由常量概念到变量概念的转变．函数关系就是变量之间的相互依赖关系，而极限思想则给研究变量之间的相互关系提供了有力的方法．第一节中的大部分教学内容在中学都已学过，不论你中学阶段数学学得好不好，都要认真学习本节．特别要注意利用初等数学中的幂函数、对数函数、三角函数等的运算性质，熟练做出有关算式的恒等变形，其中的方法和技巧在高等数学课程中经常要用到．

1.1 初等函数回顾

(Review for Elementary Functions)

1.1.1 区间

1. 区间(interval)

区间就是实数轴上一些实数的集合．设 $a<b$ 且 $a,b\in\mathbf{R}$，则常见区间有以下四种：

(1) 开区间：$(a, b)=\{x\mid a<x<b\}$，这里 a 和 b 分别叫做区间 (a, b) 的左、右端点．$b-a$ 叫做区间的长度．

(2) 闭区间：$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$．

(3) 半开区间：$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 和 $[a, b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$．以上三种区间称为有限区间．

(4) 无穷区间：$(a, +\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$ 和 $(-\infty, b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$．

事实上，实数集 $\mathbf{R}$ 就可表示为 $(-\infty, +\infty)$，其中 ∞ 只是一个数学符号，由英国数学家沃利斯(Wallis,1616—1703 年)于 1655 年引入，读做“无穷大”(infinity)．注意，我们不能把它当做实数看，更不能拿它进行运算．

2. 邻域(neighborhood)

在数轴上，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域．设 δ 为一正数，则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是 a 的一个邻域，叫做点 a 的 δ 邻域，如图 1.1(a) 所示，记为 $U(a, \delta)$，即 $U(a, \delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$，其中 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径．今后还要用到“去心邻域”的概念，即在上述邻域中除去邻域的中心点 a．如图 1.1(b) 所示．

1.1.2 函数概念

定义 1.1.1 设 D 和 W 是两个实数集，f 是一个确定的对应关系．如果对

于 D 中的每一个数 x，通过 f 在 W 中都有惟一确定的数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数(function)，记做 $y=f(x)$. 数集 D 叫做函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. 当 x 遍取 D 中的数值时，所得到的数集 $\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$ 叫做函数 f 的值域，如果 $\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}=W$，$f$ 就叫做一个满映射(surjective). 平面上由点集 $\{(x,\ f(x)) \mid x\in D\}$ 所构成的图像称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

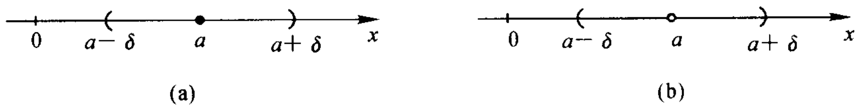


图 1.1

例 1.1.1 把一长为 a 宽为 b 的长方形铁板剪去四个角，做成一无盖铁盒，则铁盒的体积可表示为：$V=(a-2x)(b-2x)x$. 这里 x 是自变量，V 是因变量，定义域也就是 x 变化范围应取 $0<x\leqslant c,\ c=\min\left\{\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right\}$. $\min\{A,\ B,\ C\}$ 表示在 A,B,C 中选取最小的一个数值(相应地，用 $\max\{A,\ B,\ C\}$ 表示在 A,B,C 中选取最大的一个数值).

对于抽象算式所表达的函数，约定函数的定义域为使算式有意义的自变量的取值范围. 有如下原则：

(1) 对于分式函数，分母不能为零. 如 $y=\frac{x+1}{x-1},x\neq 1$.

(2) 偶次根号下的变量不能小于零. 如 $y=\sqrt{x-1},x\geqslant 1$.

(3) 对于对数函数 $y=\log_a x$，规定：底数 $a>0,a\neq 1$，真数 $x>0$.

(4) 对于正切函数 $y=\tan x$，规定：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，这里 $\mathbf{Z}$ 表示整数集.

(5) 对于余切函数 $y=\cot x$，规定：$x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(6) 对于反正弦和反余弦函数 $y=\arcsin x,\ y=\arccos x$，规定：$|x|\leqslant 1$.

例 1.1.2 求 $y=\frac{\sqrt{x}}{\sin x}$ 的定义域.

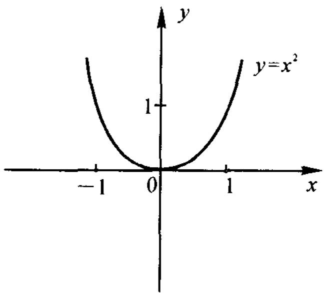
解 因为要求分子中的 $x\geqslant 0$，分母中的 $x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$，故定义域为 $0<x<+\infty$ 且 $x\neq n\pi,n\in\mathbf{N}$，这里 $\mathbf{N}$ 表示自然数集.

1.1.3 函数的几种特性

1. 奇偶性(odevity)

在函数 $y=f(x)$ 中，若用 $-x$ 换 x(假定 $-x,x$ 都在函数的定义域内)，函数值不变：$f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若函数的绝对值不变，

但符号相反：$f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数. 例如抛物线 $y=x^2$ 为偶函数，立方抛物线 $y=x^3$ 为奇函数. 偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于坐标原点. 如图 1.2 所示.



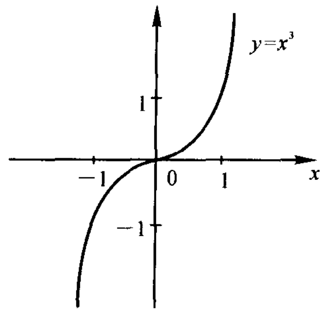


图　1.2

2. 周期性(periodicity)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在数 $l\neq 0$，使对一切 $x\in D$ 总有 $f(x+l)=f(x)$ 成立($x+l\in D$)，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 叫做 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期是指最小正周期. 如 $y=\sin x$ 就是周期函数，它的周期是 2π. 在周期为 l 的函数的定义域内，每个以 l 为长度的区间上，函数的图形都是相同的.

3. 单调性(monotonicity)

设有函数 $y=f(x)$，$x\in(a,b)$，对任意的 x_1，$x_2\in(a,b)$，若当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是递增(递减)的. 递增和递减函数统称为单调函数(monotonic function). 如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增的单调函数.

4. 有界性(boundedness)

对于函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在 $M>0$，使对一切 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 内是有界的，否则称 $f(x)$ 在 D 内是无界的. 例如双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上是无界的(请读者思考为什么?)，在 $[1,+\infty)$ 上是有界的. 如图 1.3 所示.

1.1.4　反函数(Inverse Function)

定义 1.1.2　设有函数 $y=f(x)$，$(x\in D,\ y\in W)$. 如果对于 W 中的每一个值 $y=y_0$ 都有 D 中惟一的值 $x=x_0$ 与之对应，使得 $f(x_0)=y_0$，我们

就说在 W 上确定了 $y=f(x)$ 的反函数，记做 $x=f^{-1}(y)\ (y\in W)$.

显然，反函数的定义域为 W，值域为 D. 相对于反函数 $x=f^{-1}(x)$ 来说，把 $y=f(x)$ 叫做直接函数. 习惯上仍用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$，但这时的函数对应关系已经改变了.

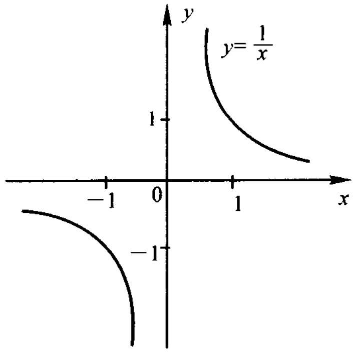


图 1.3

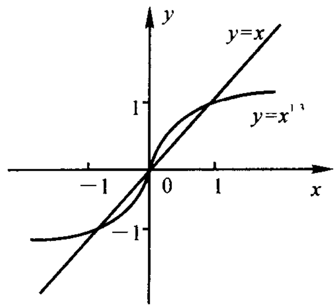


图 1.4

例 1.1.3 求立方抛物线 $y=x^3$ 的反函数.

解 函数 $y=x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 两边开立方得，$x=y^{\frac{1}{3}}$，故反函数是 $y=x^{\frac{1}{3}}$. 直接函数与反函数的图形对称于直线 $y=x$，图 1.4 是它的反函数的图形.

1.1.5 复合函数、初等函数

1. 复合函数(composite function)

定义 1.1.3 设 $y=f(u)\ (u\in U)$，$u=\varphi(x)\ (x\in D,\ u\in U_1)$，若 $U_1\subset U$，则称 $y=f[\varphi(x)]\ (x\in D)$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数，u 称为中间变量(intermediate variable).

例 1.1.4 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $u=1-x^2$ 和 $y=\sqrt{u}$ 复合而成的. 这里我们形象地称 $y=\sqrt{u}$ 为“外层函数”，称 $u=1-x^2$ 为“内层函数”. 根据复合函数的定义，内层函数的值域应落在外层函数的定义域内，故 $|x|\leqslant 1$.

2. 初等函数(elementary function)

(1) 基本初等函数：以下五类函数称为基本初等函数.

1) 幂函数(power function)：$y=x^\mu$(μ 是常数). 幂函数的定义域要由常数 μ 来确定，但该函数在$(0,+\infty)$内总有定义. $y=x^2$，$y=x^3$ 这两个幂函数图形简单且比较典型，可用来说明函数的很多性态，读者应熟记它们的图形及其特点.