

GAOXIAOGONGGONGKECONGSHU

高校公共课丛书
陈慧玉 主编

微积分



上海财经大学出版社

微 积 分

主 编 陈慧玉

副主编 贝时春 罗万钧

上海财经大学出版社

微积分

WEIJIFEN

陈慧玉 主编

责任编辑 金福林

封面设计 周卫民

出版	上海财经大学出版社	(上海市中山北一路 369 号 邮编 200083)
发行	上海竟成印刷厂	
印刷	上海竟成印刷厂	
装订	上海竟成印刷厂	
开本	850mm×1168mm	1/32
印张	15.25	
字数	436 千字	
版次	1997 年 4 月第 1 版	2000 年 7 月第 3 次印刷
印数	10 001—14 000	
书号	ISBN 7-81049-108-3/O·06	
定价	24.00 元	

内 容 提 要

本书由上海财经大学基础课教学部数学教研室编写,系高等学校财经类专业使用的经济数学基础教材。

全书共分八章:函数与极限,导数与微分,中值定理与导数应用,不定积分,定积分及其应用,多元函数微积分,无穷级数,微分方程与差分方程简介。每章末均附有联系经济实际的习题,书末附有习题的参考答案。

本书可作为财经类大专院校的教材,也可作为财经类高等教育自学考试、函授、夜大学的教材以及财经管理人员的学习参考书。

前 言

本书是根据高等院校财经类专业核心课程教学大纲编写的,是经济数学基础系列教材之一。

现代科学技术和经济管理都离不开数学,作为经济数学基础的微积分更是必不可少。在本书的编写过程中,我们遵循教学大纲的指导思想和基本原则,结合多年的教学实践,强调微积分学的基本概念、基本理论和基本方法的科学性、系统性及应用性,并力求讲解深入浅出;同时,注重微积分学在经济理论研究和经济管理中的应用。本书还选配了适量的在经济领域应用中的例题和习题。

由于财经类本科和专科的教学时数不同,教师在使用本书时可根据教学要求适当选用有关内容。

本书由上海财经大学基础课教学部的教师编写,参加编写的成员有:陈慧玉(第一章);杨爱珍(第二、三章);卢慧芳(第四、五章);魏枫(第六章);王春归(第七章);罗万钧(第八章)。陈慧玉任主编,贝时春、罗万钧任副主编。

在编写中,我们参考了国内有关高等数学的教材,吸收了一些西方经济学的有关内容,并得到了孙立爱、王雅芬和张来泰等同志的具体帮助;成稿后,朱幼文教授仔细地审阅了全稿。在此我们一并表示衷心感谢。

本教材已在本科生中试用了三年,近期对内容作了个别修改,限于编者水平,对书中不妥之处,恳请数学界同仁与广大读者不吝赐教。

编 者

1996 年 12 月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
第一节 函数.....	(1)
第二节 极限.....	(12)
第三节 连续函数.....	(33)
习题一.....	(42)
第二章 导数与微分	(48)
第一节 导数概念.....	(48)
第二节 导数的基本公式与运算法则.....	(56)
第三节 高阶导数.....	(73)
第四节 微分.....	(76)
第五节 导数在经济分析中的应用.....	(85)
习题二.....	(92)
第三章 中值定理与导数应用	(99)
第一节 微分中值定理.....	(99)
第二节 洛毕达法则.....	(106)
第三节 函数单调性的判别.....	(113)
第四节 函数的极值及其求法.....	(117)
第五节 曲线的凹向与拐点.....	(122)
第六节 曲线的渐近线.....	(127)
第七节 函数的图形.....	(129)
第八节 函数的最值.....	(132)
习题三.....	(138)

第四章 不定积分	(144)
第一节 不定积分的概念与性质.....	(144)
第二节 不定积分的计算.....	(147)
习题四.....	(167)
第五章 定积分及其应用	(170)
第一节 定积分的概念与性质.....	(170)
第二节 定积分与不定积分的关系.....	(180)
第三节 定积分的计算.....	(185)
第四节 广义积分.....	(190)
第五节 定积分的几何应用.....	(197)
第六节 积分的经济应用.....	(204)
习题五.....	(211)
第六章 多元函数微积分	(217)
第一节 空间解析几何简介.....	(217)
第二节 多元函数的基本概念.....	(232)
第三节 偏导数.....	(239)
第四节 全微分.....	(250)
第五节 多元复合函数及隐函数的求导法则.....	(256)
第六节 多元函数的极值与最值问题.....	(267)
第七节 最小二乘法.....	(277)
第八节 二重积分的概念与性质.....	(283)
第九节 二重积分的计算.....	(289)
习题六.....	(306)
第七章 无穷级数	(316)
第一节 无穷级数的概念和性质.....	(316)
第二节 正项级数及其敛散性判别.....	(324)
第三节 交错级数与绝对收敛.....	(339)

第四节 幂级数.....	(349)
第五节 函数展开成幂级数.....	(362)
习题七.....	(371)
第八章 微分方程与差分方程简介.....	(377)
第一节 微分方程的基本概念.....	(377)
第二节 一阶微分方程.....	(382)
第三节 可降阶的二阶微分方程.....	(395)
第四节 二阶常系数线性微分方程.....	(399)
第五节 差分与差分方程的概念.....	(417)
第六节 一阶常系数线性差分方程.....	(425)
第七节 二阶常系数线性差分方程.....	(432)
习题八.....	(438)
习题参考答案.....	(445)

第一章 函数与极限

函数是高等数学研究的主要对象,它从数量方面反映了一切客观事物之间的相互联系与相互影响;极限是高等数学的理论基础,它作为最基本的概念贯穿于高等数学的始终;连续性则反映了函数的重要性态之一。本章将介绍函数、极限以及函数的连续性等内容。

第一节 函 数

一、函数概念及其表示法

在任何一种自然现象或任何一个经济活动中,各个变量的变化不是孤立的,而是彼此联系并遵循着一定的变化规律,这种变量之间的依赖关系就是数学上要讨论的函数关系。我们先来看几个例子。

【例 1】圆的面积 S 与它的半径 r 之间的依赖关系,由公式 $S = \pi r^2$ 给定。当 r 在 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时,由公式就可以确定 S 的相应数值。

【例 2】某化肥厂生产某种化肥 1 000 吨,每吨定价 600 元。如果销售量不超过 700 吨,按此价格出售;如超过 700 吨,则超过部分打九折出售。此时销售总收入 y 与销售量 x 吨之间的依赖关系可用下式表示:

$$y = \begin{cases} 600x & (0 < x \leq 700) \\ 600 \cdot 700 + 600 \cdot 0.9 \cdot (x - 700) & (700 < x \leq 1\,000) \end{cases}$$

当 x 在 $(0, 1\,000]$ 内任意取定一个数值时,由 y 与 x 的关系式就可以确定 y 的相应数值。

尽管上述两例的具体意义不相同,变量之间联系的表达式也不一样,但它们却有着相同的本质:在某个过程中的两个变量是互相联系

的,当其中一个变量在某一范围内每取一个值时,另一个变量按照一定的规律,总有确定的值与它对应。两个变量间的这种关系就是函数的实质。

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y ,如果当变量 x 在某变化范围 D 内任取一个数值时,变量 y 按照一定的规律有唯一确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数。记作

$$y=f(x)$$

其中变量 x 称为自变量,它的取值范围 D 称为函数的定义域;变量 y 称为因变量,它的取值范围是函数的值域。

从函数的定义中不难看出,定义域与对应规律是确定函数关系的两个要素。

函数的定义域就是使函数表达式在实数范围内有意义的自变量的一切值。当然,如在实际问题中,尚须根据问题的实际意义来确定。

【例 3】 求下列函数的定义域:

$$(1)y=\frac{\sqrt{10-2x}}{3-x}. \quad (2)y=\lg(4-x^2)+\arcsin(2x-1).$$

解 (1)由 $\begin{cases} 10-2x \geq 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$

得公共部分为 $x \leq 5$ 且 $x \neq 3$,因此定义域为 $(-\infty, 3), (3, 5]$.

$$(2)由 \begin{cases} 4-x^2 > 0 \\ -1 \leq 2x-1 \leq 1 \end{cases}$$

得公共部分为 $0 \leq x \leq 1$,因此定义域为 $[0, 1]$.

【例 4】 设 $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=x^2-9$,试求 $f[g(x)]$ 的定义域。

解 $f[g(x)]=\sqrt{x^2-9}$

由 $x^2-9 \geq 0$,得 $x \geq 3$ 或 $x \leq -3$ 。因此,定义域为 $(-\infty, -3], [3, +\infty)$ 。

在函数的定义中,当自变量 x 在定义域内每取一个数值时,变量 y 有唯一确定的值与它对应,但并不要求当自变量变化时函数的值一定

要改变,因此所有 x 值都对应于一个 y 值也是允许的,即常数函数 $y=C$ (常数)。

函数的表示法通常有三种形式:解析法、表格法和图示法。其中以解析法表示函数最为简捷。除此之外,还有用语言叙述来表示函数的。

【例 5】 y 是不超过 x 的最大整数。它同样表示一个函数,记作 $y=[x]$,其定义域为一切实数。

在用解析法表示函数时,值得注意的是分段函数。分段函数仍旧是一个函数,只不过当自变量在不同范围时,对应规律不同而已。

【例 6】

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1\leq x<0) \\ 1 & (0\leq x<1) \\ 2x-1 & (1\leq x<2) \end{cases}$$

它是一个分段函数(图 1-1),其定义域为 $[-1,0)$, $(0,2)$ 。

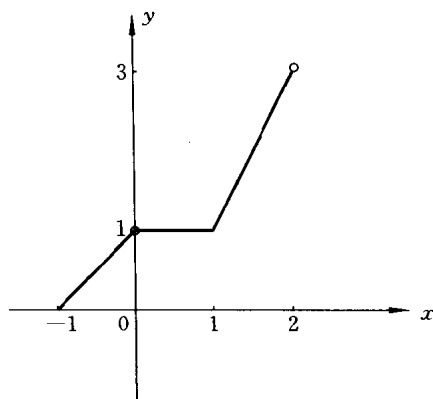


图 1-1

当自变量 x 取某一定值 x_0 时,对应函数值 $f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值。

【例 7】设 $f(x)=(x-1)^3$,求 $f(f(1))$ 。

解 $f(f(1))=f(0)=-1$

【例 8】 已知 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x+1)$.

解 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$

因此

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$f(x+1) = (x+1)^2 + 2$$

二、函数的几种主要性质

1. 函数的有界性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义, 若存在一个正数 M , 使得对于该区间上任意点 x , 均有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 在该区间上有界; 否则, 就称 $f(x)$ 在该区间上无界。

显然, 在某区间上有界函数 $f(x)$ 的图形一定在该区间上介于两条直线 $y = \pm M$ 之间。

【例 9】 函数 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都是有界的, 因为 $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$.

【例 10】 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 在定义域 $[-1, 1]$ 上是有界函数, 因为 $0 \leq y \leq 1$.

注意函数的有界性与所选的区间有关。

【例 11】 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但在 $(1, 2)$ 内有界。

2. 函数的单调性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在某区间上有定义, 若对于该区间上任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在该区间上单调增加; 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在该区间上单调减少。

单调增加与单调减少函数统称为单调函数, 它们的图形分别如图 1-2(a) 和 (b) 所示。

【例 12】 函数 $y = x^2$, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少, 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 而在 $(-\infty, +\infty)$ 内它不是单调函数。

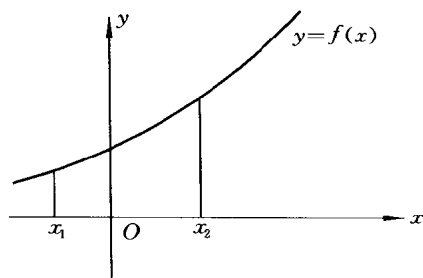
3. 函数的奇偶性

定义 1.4 如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 与 $-x$, 都满足 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 如果都满足 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数。

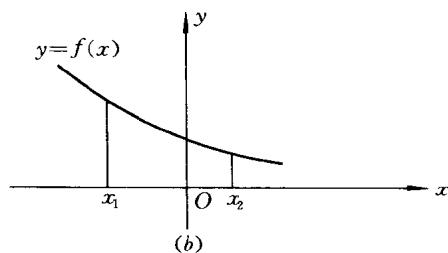
【例 13】 判断函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的奇偶性。

解 因为
$$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数。



(a)



(b)

图 1-2

【例 14】 判断函数 $f(x)=\begin{cases} x^3+1 & (x \geq 0) \\ -x^3+1 & (x < 0) \end{cases}$ 的奇偶性。

解 因为

$$f(-x)=\begin{cases} (-x)^3+1 & (-x \geq 0) \\ -(-x)^3+1 & (-x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} -x^3+1 & (x \leq 0) \\ x^3+1 & (x > 0) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -x^3+1 & (x < 0) \\ x^3+1 & (x \geq 0) \end{cases} \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为偶函数。

显然,偶函数的图形对称于 y 轴;奇函数的图形对称于原点,如图 1-3(a)和(b)所示。

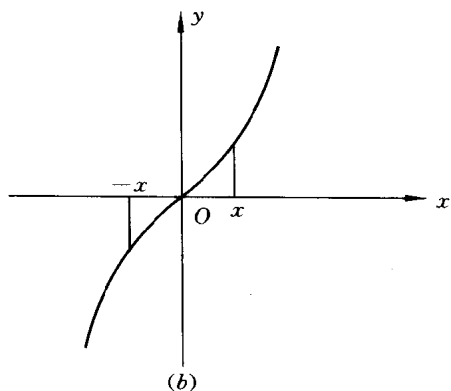
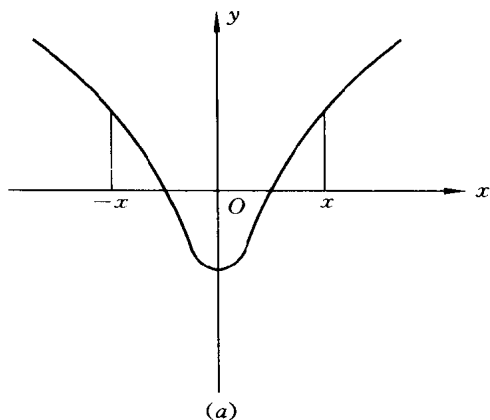


图 1-3

4. 函数的周期性

定义 1.5 对于函数 $f(x)$, 如果存在一个正数 T , 使得对于定义域内的任意 x , 恒有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数。使上式成立的最小正数 T 称为该周期函数的周期。

【例 15】 求函数 $f(x)=\operatorname{tg} \frac{x}{4}+\sin 2x$ 的周期。

解 对于 $y_1=\operatorname{tg} \frac{x}{4}$, 周期 $T_1=4\pi$; 对于 $y_2=\sin 2x$, 周期 $T_2=\pi$ 。

T_1 与 T_2 的最小公倍数 4π , 所以 $f(x)$ 的周期 $T=4\pi$ 。

【例 16】 求函数 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 的周期。

$$\begin{aligned}\text{解 } y &= \sin^4 x + \cos^4 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} \\ &= 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x\end{aligned}$$

因此, y 的周期为 $T = \frac{\pi}{2}$

三、初等函数

1. 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数:

(1) 幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为任意实数)

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)

(4) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x$ 等。

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctg x, y=\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ 等。

这些函数的性质和图形在初等数学中已作详细介绍, 在此不再重复。

2. 反函数

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$, 若将 y 作为自变量, x 作为因变量, 则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\phi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数。

习惯上, 以 x 作为自变量, y 作为因变量, 因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\phi(y)$, 可写为 $y=\phi(x)$, 也可用 $y=f^{-1}(x)$ 表示。

显然, $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数。

【例 17】 求 $y=1+\lg(x+2)$ 的反函数。

解 由 $y=1+\lg(x+2)$ 可确定出 $x=10^{y-1}-2$, 再改写得

$$y=10^{x-1}-2$$

即为所求的反函数。

容易证明, 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(图 1-4)。

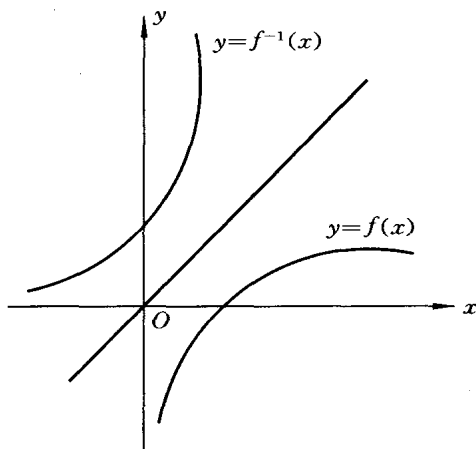


图 1-4

需要指出, 并非所有的函数都有反函数。例如, 函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不存在反函数。这是因为由 $y=x^2$ 得 $x=\pm\sqrt{y}$ 不符合函数定义了。但是, 如果函数 $y=f(x)$ 在某区间上是单调递增(减)函数, 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 一定存在, 且在对应区间上也是单调递增(减)函数。

【例 18】 求 $y=-\sqrt{x-1}$ 的反函数。

解 由 $y = -\sqrt{x-1}$ 可确定出 $x = y^2 + 1 (y \leq 0)$, 所求的反函数为

$$y = x^2 + 1 \quad (x \leq 0)$$

3. 复合函数

反映变量之间依赖关系的函数形式有时是比较复杂的。例如, x 表示单位产品的成本, u 表示单位产品的销售价格, y 为市场的销售量, 若暂不考虑其他因素, 显然可知价格 u 是成本 x 的函数, 而销售量 y 又是价格 u 的函数。于是, 对于每一个确定的 x 值, 通过 u 总对应着一个确定的 y 值。这种函数关系称为 y 是 x 的复合函数。

定义 1.7 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u = \phi(x)$, 且 $\phi(x)$ 的值域的全部或部分为 $f(u)$ 的定义域, 即 $\phi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域之交集非空, 则称 y 是 x 的复合函数。记作 $y = f[\phi(x)]$, 其中 u 称为中间变量。

有了复合函数的概念, 就可以把较复杂的函数分解为几个简单的函数。例如, 函数 $y = e^{\sin x}$ 是由 $y = e^u$ 与 $u = \sin x$ 复合而成; $y = \sqrt{\lg x}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = \lg x$ 复合而成。

中间变量的个数可以多于一个, 即可以由两个以上的函数经过复合构成一个函数。例如, 函数 $y = \cos^2 \sqrt{x}$ 是由 $y = u^2$ 与 $u = \cos v$ 以及 $v = \sqrt{x}$ 复合而成。

在分解复合结构时, 必须由表及里, 逐层分解。每一层都是基本初等函数。

必须注意: 并非任何两个函数都可构成一个复合函数。例如, $y = \lg u$ 与 $u = -x^2$ 就不能构成复合函数。因为函数 $u = -x^2$ 的值域是 $(-\infty, 0]$, 而 $y = \lg u$ 的定义域 $(0, +\infty)$ 。

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成, 并且用一个式子表示出来的函数, 称为初等函数。例如,

$$y = \sin \sqrt{x} + e^{-3x} - 1; y = \operatorname{tg} \frac{1}{x} + \lg(x^2 - 1)$$