高中数学智能发展丛书

三角

北京教育出版社

(京) 新登字202号

高中数学智能发展丛书　三角

GAOZHONG SHUXUE ZHINENGFAZHAN

CONGSHU SANJIAO

刘　坤　常相舜　瞿宁远 编著

*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码：100011

北 京 出 版 社 总 发 行

新华书店北京发行所经销

北京市昌平环球科技印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　10.875印张　235 000字

1992年6月第1版　　1992年6月第1次印刷

印数 1-4680

ISBN 7-5303-0340-6/G·315

定价：4.05 元

出版说明

当今，国内外都把“发展智能，提高科学素质”作为数学教学的首要任务之一。

教育科学研究一再证明：“高智能的教材”加上“高智力参与程度的教学”是发展智能的必要条件。

为了在教学上创造这两个必要条件，我们课题组在北京四中和清华附中共同对中学数学教学进行了“整体优化实验研究”。这套丛书就是在这个研究的基础上几经设计、试教、修改写成的高中数学教材，整个工作历时十年。

为了体现“高智能教材”的特色，并为学生“高智力参与”提供必要的安排，本丛书在设计上着重把握了以下几点：

1． 为了形成学生的良好的认知结构，丛书的理论框图（整体逻辑结构）力求科学，简明；

2． 数学思想是“数学的核心”，对形成数学能力极为重要，因而在教材中应占有“中心的地位”。丛书在知识点的讲法上注重揭示知识的发生、发展和应用的过程，力求突出数学思想在过程中的核心作用和指导作用；

3． 学生的学习是个再创造再发现的过程，必须要主体积极参与才能实现这个过程。丛书为“引导发现”做了某些尝试；

4． 例、习题的选配力求典型、适量，成龙配套；

5． 丛书主要是为学生写的，力求使学生读得懂，有兴

味，越读越爱读。

丛书写成后，曾在北京四中、清华附中等几所重点学校进行了新一轮试教，受到师生的普遍欢迎。

本丛书可作为高中数学课的教材或学习通用数学教材的配套读物。相信它会成为同学们和老师们手中一本好的参考书。

由于我们水平有限，书中不当之处在所难免，恳请专家、教师、同学们提出宝贵意见。

编者于北京四中、清华附中

1992.1.

目　　录

第一章　从弧函数到角函数

本章是三角学的基础。它所展示的基本思想和方法贯穿于全书的各个部分，对以后的学习至关重要。本章在全书中的地位见下页的逻辑结构图。

1.1　预备知识——向量简介（见附录Ⅰ）

1.2　单位圆上的有向弧长

在单位圆上（圆心在原点，且半径为1的圆称为**单位圆**），动点从点A出发（图1-1），沿圆周运动。为了区分移动的方向（逆时针还是顺时针）和到达的位置引入有向弧长的概念是可行的。

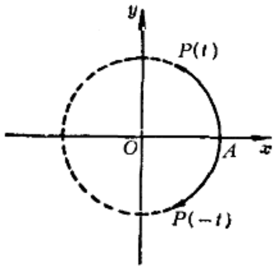
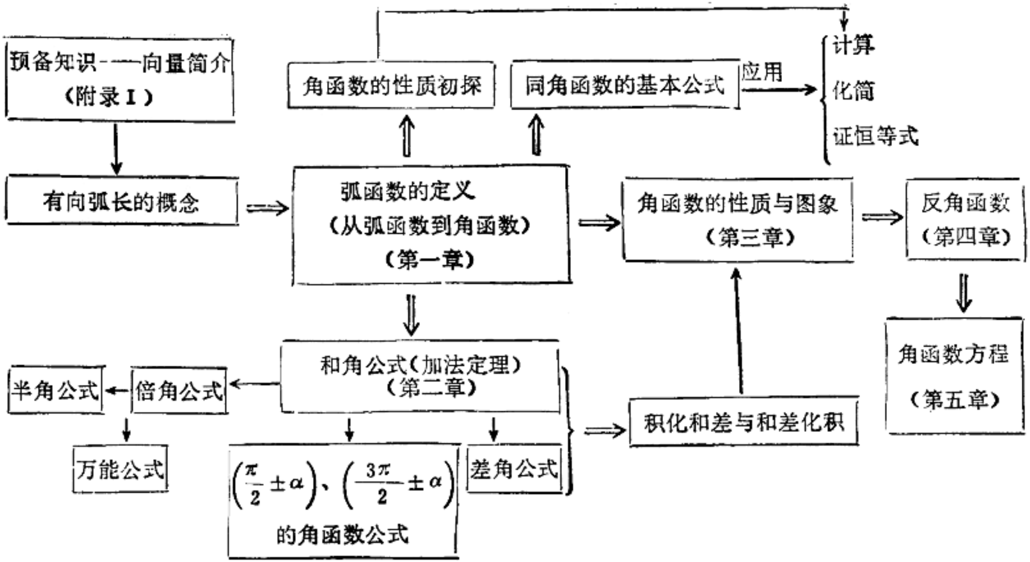


图　1-1

通常，把动点逆时针移动走过的弧长叫做**正弧长**，顺时针移动走过的弧长叫做**负弧长**，动点未动所走过的弧长记为零。正弧长、负弧长和零统称为**有向弧长**。有向弧长的取值范围是$(-\infty, +\infty)$。

很明显，动点从始点A出发后，它在行进中的位置被有向弧长t唯一确定。即给出某个t值，单位圆上有且仅有唯一的点P与之对应。这个点我们记为$P(t)$。而且，动点从A出


预备知识——向量简介
（附录Ⅰ）
有向弧长的概念
角函数的性质初探
同角函数的基本公式
应用
计算
化简
证恒等式
弧函数的定义
（从弧函数到角函数）
（第一章）
角函数的性质与图象
（第三章）
反角函数
（第四章）
角函数方程
（第五章）
和角公式（加法定理）
（第二章）
半角公式
倍角公式
万能公式
$\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$、$\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$
的角函数公式
差角公式
积化和差与和差化积

全书的逻辑结构图

发后

逆时针转一圈$\Leftrightarrow t=2\pi$（称为周弧）；

顺时针转一圈$\Leftrightarrow t=-2\pi$。

练1 把动点从A出发，逆时针，第一次经过下列诸点（图1-2）时所走过的有向弧长标记出来。

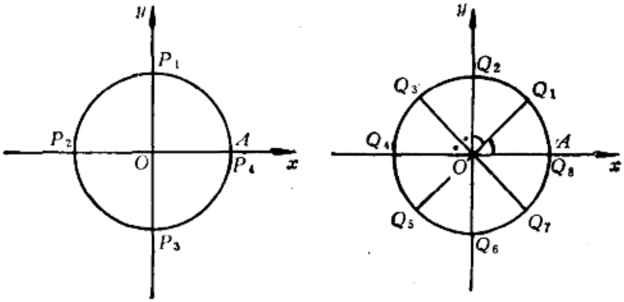


图 1-2

练2 分别在单位圆上标出下列各组动点的位置，它们对应的有向弧长依次是：

（1）$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，1，2，3；

（2）$-\frac{\pi}{2}$，$-\pi$，$-\frac{3\pi}{2}$，-1，-2，-3；

（3）3π，5π，7π，2π，4π，6π。

练3 已知点$P(t_1)$，试把与点$P(t_1)$重合的点$Q(t_2)$的一切可能的有向弧长t_2表示出来（图1-3）。

很明显，动点从点$P(t_1)$出发后，沿圆周当且仅当继续走过的弧长为“周弧”的整数倍时，它才能再与点$P(t_1)$重合。这样，就得到了

定理 $P(t_1)$ 与$Q(t_2)$ 重合$\Longleftrightarrow t_2=t_1+2\pi\cdot k(k\in Z)$。

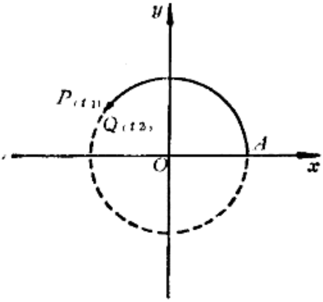


图 1-3

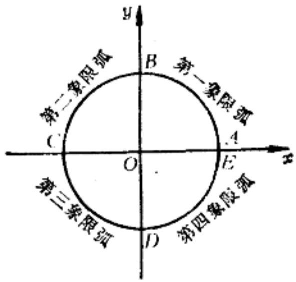


图 1-4

练4 填空：

动点从点A出发，沿单位圆运动：

当它落在 x 轴正方向上，则 t 的一切可能的值是______；

当它落在 x 轴负方向上，则 t 的一切可能的值是______；

当它落在 y 轴正方向上，则 t 的一切可能的值是______；

当它落在 y 负轴方向上，则 t 的一切可能的值是______；

当它落在x轴上，则t 的一切可能的值是______；

当它落在y轴上，则t 的一切可能的值是______。

若动点不落在轴上，则必落在某个象限中的弧上．为简便，今后把落在第Ⅰ象限中的弧上的点对应的有向弧长叫做**第Ⅰ象限弧**（图1-4），其余类推．但应注意，第Ⅰ象限弧有可能通过B、C、D、E点。

例1 下列动点各在第几象限，请标出其位置，并找出解这类问题的规律。

（1）$P\left(24\frac{1}{5}\pi\right)$；（2）$Q\left(-\frac{44}{3}\pi\right)$。

分析　困难在于$24\frac{1}{5}\pi$与$-\frac{44}{3}\pi$都是动点旋转了若干圈后所得到的弧长。若有向弧长$t\in[0,\ 2\pi)$时——今后称这样的t为**周内弧**，——$P(t)$点的位置立即可以断定。

解　（1）$24\frac{1}{5}\pi=24\pi+\frac{1}{5}\pi=2\pi\cdot 12+\frac{1}{5}\pi$，

根据上述定理，$P(24\frac{1}{5}\pi)$与$P'(\frac{1}{5}\pi)$重合（图1-5），

$\therefore$　点$P(24\frac{1}{5}\pi)$在第一象限。

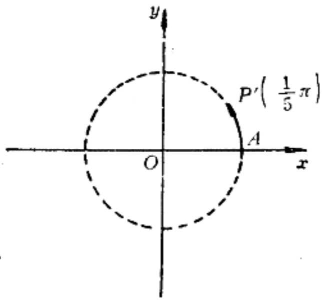


图 1-5

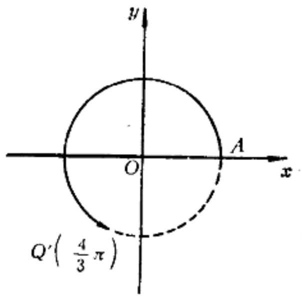


图 1-6

(2)　$-\frac{44}{3}\pi=-\frac{48\pi-4\pi}{3}=2\pi(-8)+\frac{4}{3}\pi$，

$\therefore$　点$Q\left(-\frac{44}{3}\pi\right)$与$Q'\left(\frac{4}{3}\pi\right)$重合（图1-6），

从而　　点$Q\left(-\frac{44}{3}\pi\right)$在第三象限。

由上概括出规律：把所给的有向弧长写成

有向弧长＝周弧·k＋周内弧（$k\in Z$）的形式，问题就解决了．

练5 填空：

t_1为第Ⅰ象限弧$\Leftrightarrow t_1\in$ ________，

t_2为第Ⅱ象限弧$\Leftrightarrow t_2\in$ ________；

t_3为第Ⅲ象限弧$\Leftrightarrow t_3\in$ ________；

t_4为第Ⅳ象限弧$\Leftrightarrow t_4\in$ ________．其中$k\in Z$；

例2 第Ⅱ象限弧的一半是第几象限弧？

解： ∵ 第Ⅱ象限弧t_2满足$\frac{\pi}{2}+2k\pi<t_2<\pi+2k\pi$ $(k\in Z)$，

∴ $\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{t_2}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in Z)$．

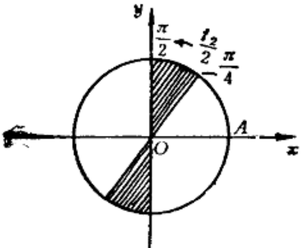


图 1-7

由此式可知，k为偶数时，$\frac{t_2}{2}$是第Ⅰ象限弧；k为奇数时，$\frac{t_2}{2}$是第Ⅲ象限弧(图1-7)．从而，第Ⅱ象限弧的一半是第Ⅰ或第Ⅲ象限弧．

习 题 1

1. 下列动点各落在第几象限（或哪个坐标轴）上？

(1) $P\left(38\frac{3}{4}\pi\right)$；(2) $Q(101\pi)$；(3) $M\left(\frac{749}{6}\pi\right)$

(4) $N\left(-\frac{338}{3}\pi\right)$；(5) $S\left(-\frac{59}{2}\pi\right)$；(6) $T\left(-\frac{148}{5}\pi\right)$．

2. 第Ⅳ象限弧的一半是第几象限弧？

3. 若$(4k+1)\pi<t<(4k+1)\pi+\frac{\pi}{6}(k\in Z)$，则$t$，$\frac{t}{2}$，$2t$，$3t$各是第几象限弧？

4. 与$P\left(-\frac{26}{3}\pi\right)$重合的点的有向弧长等于________，其中最小的正弧等于________，最大的负弧等于________。

5. 在单位圆上标出下列各点：

$P\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$Q\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$M\left(\frac{\pi}{3}\right)$，$N\left(\frac{3}{4}\pi\right)$，$G\left(\frac{5}{4}\pi\right)$，$H\left(\frac{2}{3}\pi\right)$。

1.3 弧函数的定义

1. 定义 设$P(x, y)$是单位圆上有向弧长t对应的点（图1-8），显然x、y都是有向弧长t的函数。

y称为t的正弦，记为$\sin t=y$；

x称为t的余弦，记为$\cos t=x$；

$\frac{y}{x}$称为t的正切，记为$\mathrm{tg}\,t=\frac{y}{x}$；

$\frac{x}{y}$称为t的余切，记为$\mathrm{ctg}\,t=\frac{x}{y}$；

$\frac{1}{x}$称为t的正割，记为$\sec t=\frac{1}{x}$；

$\frac{1}{y}$称为t的余割，记为$\csc t=\frac{1}{y}$。

很明显，当有向弧长t确定以后，x、y都被唯一确定。

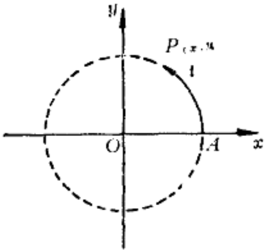


图 1-8

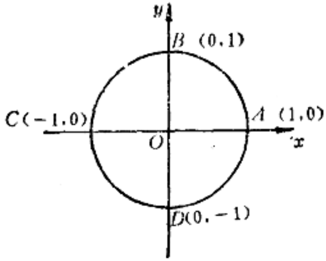


图 1-9

从而，上述六个代数式：y、x、$\frac{y}{x}$、$\frac{x}{y}$、$\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$的值除去分母有时为零以外都是唯一确定的。所以，它们都是t的函数。这六个t的函数统称**弧函数**（有的书称为**圆函数**）。

例1 求下列有向弧长t的六个弧函数值：

（1）0；（2）$\frac{\pi}{2}$；（3）π；（4）$\frac{3\pi}{2}$。

解 （1）$t=0$对应的点为A（$1,0$），即$x=1$，$y=0$（图1-9），

$\therefore$ $\sin 0=0$，$\cos 0=1$，$\operatorname{tg} 0=0$，

$\operatorname{ctg} 0$不存在，$\sec 0=1$，$\csc 0$不存在；

（2）$t=\frac{\pi}{2}$对应的点为B（$0,1$），即$x=0$，$y=1$，

$\therefore$ $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\cos\frac{\pi}{2}=0$，$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$不存在，

$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$，$\sec\frac{\pi}{2}$不存在，$\csc\frac{\pi}{2}=1$；

（3）$t=\pi$对应的点为C（$-1,0$），

$\therefore\quad \sin\pi=0$，$\cos\pi=-1$，$\operatorname{tg}\pi=0$，

$\operatorname{ctg}\pi$不存在，$\sec\pi=-1$，$\csc\pi$不存在；

(4) $t=\frac{3\pi}{2}$对应的点为$D(0, -1)$，

$\therefore\quad \sin\frac{3\pi}{2}=-1$，$\cos\frac{3\pi}{2}=0$，$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$不存在，

$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}=0$，$\sec\frac{3\pi}{2}$不存在，$\csc\frac{3\pi}{2}=-1$。

评述 欲求t的弧函数值，应先在单位圆上找出t对应的动点的直角坐标，然后用定义即可[做这类题，画出单位圆，标出(x, y)，形象直观，不易出错]。

例2 在单位圆上标出有向弧长分别为$t_1=\frac{\pi}{6}$、$t_2=\frac{\pi}{4}$和$t_3=\frac{\pi}{3}$的点P、Q、M；确定它们的直角坐标；并写出它们的各个弧函数值。

解 $\frac{\pi}{6}$为有向弧长$\overset{\frown}{AB}=\frac{\pi}{2}$的$\frac{1}{3}$（图1-10），连$OP$，$\angle AOP=30°$，故有$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$。

$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$，$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\csc\frac{\pi}{6}=2$完全同样的：$t_2=\frac{\pi}{4}$对应的点为$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1,\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},\csc\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}.$$

$t_3=\frac{\pi}{3}$对应的点为$M\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},\sec\frac{\pi}{3}=2,\csc\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

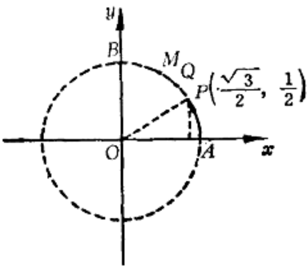


图 1-10

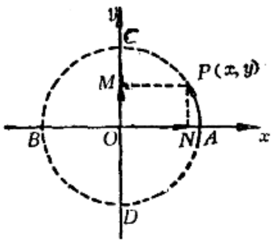


图 1-11

2. 弧函数值的几何表示——弧函数线

利用向量的知识给弧函数值以几何表示是非常有益的。

设有向弧长t对应的点为$P(x、y)$。过P点分别作$PM\perp y$轴，$PN\perp x$轴（图1-11）。设$\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$分别为x轴和y轴上的单位向量，则

$$\overrightarrow{OM}=y\vec{e}_y,\quad \overrightarrow{ON}=x\vec{e}_x.$$

因此，可以把$\overrightarrow{OM}$和$\overrightarrow{ON}$分别看作是正弦$\sin t=y$和余弦$\cos t$

$=x$的几何形式。今后把$\overrightarrow{OM}$叫做t的**正弦线**，把正弦线所在的直径CD叫做**正弦轴**。同样，把$\overrightarrow{ON}$叫做t的**余弦线**，把余弦线所在的直径AB叫做**余弦轴**。

问1 你能画出t的具有代表性的各种情况下的正弦线和余弦线吗？（提示：各有八种情况）

问2 当t从0增加到2π时，试根据正弦线$\overrightarrow{OM}$（余弦线$\overrightarrow{ON}$）变化的规律，说出正弦值（余弦值）增、减变化的规律。

现在研究正切值的几何形式。

t的正切 $\mathrm{tg}t=\frac{y}{x}$，欲用一个向量表示比值$\frac{y}{x}$是困难的。为此，先作变形：

$$\mathrm{tg}t=\frac{y}{x}=\frac{\overline{y}}{1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

从图1-12可以想到，只要能把$\overline{y}$表示出来，目标就达到了。由比例式（$*$）可以看出，过点A作圆的切线GG'，连OP并延长与GG'交于T，有

$$\frac{y}{x}=\frac{AT}{OA}=\frac{AT}{1}\Rightarrow AT=\overline{y}\Rightarrow\overrightarrow{AT}=\overline{y}\cdot\overrightarrow{e_y}.$$

由此，可以把$\overrightarrow{AT}$叫做t的**正切线**，$\overrightarrow{AT}$所在的圆的切线GG'叫做**正切轴**，其方向与y轴相同。应该注意的是$\overrightarrow{AT}$的始点是点A。终点T是OP或其反向延长线与正切轴GG'的交点。

问3 你能画出在各种情况下的具有代表性的正切线吗？（也有八种情况）

问4 当t从0增加到2π时，试根据$\overrightarrow{AT}$的变化规律说出正切值增、减变化的规律。