高等数学速成复习用书

高等数学解题方法与技巧

王益姝 翟连林 主编

北京出版社

高等数学解题方法与技巧

王益炼　　翟连林　编

北　京　出　版　社

内容简介

本书是一本帮助读者以较短的时间、用简捷的方法全面地复习高等数学的辅导读物．全书分三章，第一章介绍常用的九种证题方法；第二章总结十八类问题的解题方法与技巧；第三章是灵活运用解题方法，提高解题能力的示范题．全书选有310道具有报考研究生考题水平的题目，共介绍近1000种解法．

高等数学解题方法与技巧

Gaodeng Shuxue Jieti Fangfa yu Jiqiao

王益姝　翟连林　主编

*

北京出版社出版

（北京北三环中路6号）

新华书店北京发行所发行

安平印刷厂印刷

*

787×1092毫米　32开本　13.5印张　413,000字

1989年2月第1版　1989年2月第1次印制

印数1—5,400

ISBN 7-200-00491-X/G·138

定价：6.40元

前　　言

本书为帮助读者以较短的时间，用简捷的方式，全面地复习好高等数学、提高复习效率而编写．

本书分三章，第一章介绍高等数学中常用的九种证题方法；第二章“解题方法与技巧总结”是对十八类问题常用的解题方法与技巧加以总结；第三章“解题示例”所列的是灵活运用解题方法，提高解题能力的示范题．这些例题都具有中等以上的难度，与招考研究生考题的难易程度相当，并且有一部分题就是历年招收研究生的考题．

本书第三章共给出310道题，介绍了近1000种解法，有的例题多达八九种解法．每一种解法都有一定的技巧，但未必都是最简捷的解法．在本书中列出这些解法，不仅是为了启发读者勤于思考，反复推敲，从多方面寻找解题途径，而且为了对多种方法进行比较，了解各解法的优缺点、特点、技巧等，以帮助读者开阔思路，提高分析问题和解决问题的能力．

学好高等数学不仅要熟悉其各部分的基本概念及方法，还要掌握各部分之间的有机联系，对零散学得的高等数学知识有一个融会贯通的了解。本书中很多解法就是为此目的而给出的，它能帮助读者综合所学过的知识，加深理解各部分知识之间的联系，达到复习、巩固、提高之目的．

本书适宜报考理工科研究生的读者较快地复习好高等数

学；同时，也适于正在学习高等数学的各类大学生阅读，以及数学教师在教学中参考之用。

参加本书编写工作的有李培生、胡大志、刘殿臣、张永军、严思杰、肖继道、左善桥、谢兆芳、宋青等同志。本书的出版得到阎恒久、张宝光二同志的大力支持和帮助，在此一并表示谢意。

限于我们的水平，书中容有错误之处，诚恳地希望读者指正。

编　者

1988·3

目　录

第一章　常用的证题方法

高等数学中常用的证题方法有：分析法、综合法、构造法（辅助函数法）、穷举法（完全归纳法）、反证法、计算性证题法、数学归纳法、举反例证题法、换元证题法等.

一、分 析 法

分析法是先假设待证结论正确，由此出发，追究结论成立的原因，而原因中又有原因，逐步逆追，达到已确知的正确事实为止．这种方法又叫倒推法.

例 1　设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$f''(x)>0$,证明$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$在$[a,b]$上是单调增加的.

证明　设 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.欲证结论成立,就是要证明函数$F(x)$在$[a,b]$上单调增加,也就是要证明$F'(x)\geqslant 0$,故需对$F(x)$求导并进行分析.

$$F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2},\ (x>a) \qquad (1)$$

由于$x>a$时，$(x-a)^2>0$，所以欲证$F'(x)\geqslant 0$，只须证

$$f'(x)(x-a)-[f(x)-f(a)]\geqslant 0. \qquad (2)$$

(2) 式不易比较与观察，将其变形为

$$f'(x) \geqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \quad (x>a) \tag{3}$$

即只需证明（3）式成立，此处要借助拉氏定理．$f(x)$满足拉格朗日中值定理条件，故存在ξ，使

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi), \qquad (a<\xi<x) \tag{4}$$

成立．由（3）、（4），问题转化为证明

$$f'(x) \geqslant f'(\xi), \qquad (a<\xi<x) \tag{5}$$

因此，为使本例题结论成立，其原因的原因就只须证明（5）式成立．由题中所给的已知条件$f''(x)>0$及$a<\xi<x$，保证了（5）式成立，即由于$f''(x)>0$则有$f'(x)$单调上升，从而（5）式成立，以上推理过程步步可逆．从而获得了证明．

二、综 合 法

综合法与分析法的推理方向相反，它是从已知条件出发，推导出待证结论的方法．这种方法又叫顺推法．

例 2 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内二次可微，连结点$A(a, f(a))$与点$B(b, f(b))$的直线段与曲线$y=f(x)$相交于点$C(c, f(c))$，其中$a<c<b$，证明在(a, b)内至少存在一点ξ，使$f''(\xi)=0$．

为完成证明，须先证$f''(x)$在(a, b)内至少有一个零点；由罗尔定理可知，若能存在$\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$，使$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，即可证得本题结论．$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$是否能成立呢？不妨画图进行分析，由图可以看出，存在ξ_1，ξ_2，使

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

根据拉格朗日定理的条件与结论，上式是不难证明的。依据这一分析，可以写出综合法证明。

证明 由$f(x)$在$[a, c]$上连续，在(a, c)内可导，由拉格朗日定理，至少存在$\xi_1\in(a, c)$使

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

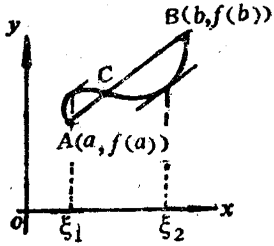

图 1

同理，存在$\xi_2\in(c, b)$，使

$$f'(\xi_2)=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

设直线AC的斜率为k_1，BC的斜率为k_2，则

$$k_1=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\quad k_2=\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

因为A，B，C三点共线，则$k_1=k_2$，即$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$。因为$f'(x)$在$[\xi_1, \xi_2]$连续，在(ξ_1, ξ_2)内可导，且$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，由罗尔定理可知，至少存在一点$\xi\in(\xi_1, \xi_2)$，使

$$f''(\xi)=0,\quad \xi\in(a, b).$$

用分析法与综合法证明的次序一正一反。分析是先行，综合是后继，所以，在证题时通常先在草稿纸上进行分析，最后略去分析再倒过来重新叙述。高等数学中的这种分析与综合的证明是最基本的一类论证方法。

三、构造法（辅助函数法）

有些问题的证明比较困难，或者为了使问题的概念更完整、更富有启发性、更为人所熟悉，有时先构造一个函数，

或者先建立一个辅助命题，希望通过它帮助我们去解决原来的问题．解决原来的问题是我们要达到的目的，而辅助问题或所构造的函数只是我们试图达到目的的手段．

例 3 试证：当$x\neq 0$时，$e^x>1+x$．

证法 1（用拉氏定理）构造函数

$$f(x)=e^x,$$

则$f(x)$在（$-\infty$，$+\infty$）内的任何有限区间上满足拉格朗日定理中的条件，任取$x\neq 0$，则$f(x)$在$[0, x]$或$[x, 0]$上满足拉氏定理条件，存在ξ，使ξ在0与x之间满足

$$\frac{e^x-e^0}{x-0}=e^{\xi}，即\quad e^x=xe^{\xi}+1．$$

当$x>0$时，$\xi>0$，则$e^{\xi}>1$，$xe^{\xi}>x$，从而

$$e^x>x+1．$$

当$x<0$时，$e^{\xi}=\dfrac{1}{e^{|\xi|}}<1$，$xe^{\xi}>x$，从而

$$e^x>x+1．$$

这就证明了当$x\neq 0$时

$$e^x>x+1．$$

证法2（用柯西定理）构造函数

$$\Phi(x)=e^x,\quad F(x)=x+1．$$

在（$-\infty$，$+\infty$）任取$x\neq 0$，则在$[0, x]$或$[x, 0]$内$\Phi(x)$，$F(x)$满足柯西定理条件，存在ξ，使

$$\frac{e^x-e^0}{x+1-1}=\frac{e^{\xi}}{1}，\xi在0与x之间．\tag{1}$$

当$x>0$时，$e^{\xi}>1$，由（1）得$\dfrac{e^x-1}{x}>1$，即

$$e^x>1+x．\tag{2}$$

当$x<0$时，$0<e^{\xi}<1$，由（1）得$\frac{e^x-1}{x}<1$，即

$$e^x-1>x. \tag{3}$$

综合（2）、(3)，即知当$x\neq 0$时，恒有

$$e^x>x+1.$$

证法3　（用单调性）构造函数

$$f(x)=e^x-x-1，则f'(x)=e^x-1.$$

当$x>0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调上升，而$f(0)=0$，故有

$$f(x)=e^x-x-1>0. \tag{1}$$

当$x<0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调下降，而$f(0)=0$，故有

$$f(x)=e^x-x-1>0. \tag{2}$$

综合（1）、(2)，即知当$x\neq 0$时，恒有

$$e_x>x+1.$$

从以上证明可以看出，解决该问题的关键，是构造一个函数，这个所构造的函数可以不止一个，需根据结论及所要采取的证法来决定．

例2也可用构造法证明，其证法如下：

直线AB的方程为

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

即　$$y=\frac{[f(b)-f(a)](x-a)}{b-a}+f(a).$$

因为点$(c, f(c))$在AB直线上，则

$$f(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)+f(a).$$

令　$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a).$$

有$F(a)=F(b)=F(c)=0$，$F(x)$在$[a,c]$，$[c,b]$上连续，在(a,c)，(c,b)内可导，且$F(a)=F(b)=F(c)$。由罗尔定理，至少存在$\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

$F'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，在(ξ_1,ξ_2)内可导，且$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)$，由罗尔定理，至少存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\in(a,b)$，使$F''(\xi)=0$，又$F''(x)=f''(x)$，所以必有一点$\xi\in(a,b)$，使

$$f''(\xi)=0.$$

四、穷举法

有些问题不能在整体上立即进行证明，但若能把问题中可能出现的各种情况都予以证明，也就等于问题获得证明。穷举法即是把所有的情况都列举出来并加以证明的方法。此法也称为完全归纳法。许多数学结果是首先由归纳法发现，以后再加以证明的。

例 4 （罗尔定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内具有导数，且在区间端点的函数值相等，即$f(a)=f(b)$，那么，在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使得函数$f(x)$在该点的导数等于零，即$f'(\xi)=0$。

证明 由于$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，根据闭区间上连续函数的最大值和最小值定理，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上必定取得它的最大值M和最小值m，这样只有两种可能情形：

（1）$M=m$，这时$f(x)$在$[a,b]$上必取相同的数值M。$f(x)=M$，则$f'(x)=0$，因此可取(a,b)内任一点作为ξ，使$f'(\xi)=0$。

（2）$M>m$，由 $f(a)=f(b)$，M与m中至少有一个不等于 $f(a)$。设 $M\neq f(a)$（如果设 $m\neq f(a)$，证法完全类似），则在 (a,b) 内有一点 ξ，使 $f(\xi)=M$。

下面再证明 $f'(\xi)=0$。因为 ξ 是 (a,b) 内的点，且由假设可知 $f'(\xi)$存在，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}$$

存在，则

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}.$$

由于 $f(\xi)=M$ 是 $f(x)$在$[a,b]$上的最大值，则有

$$f(\xi+\Delta x)-f(\xi)\leqslant 0.$$

当$\Delta x>0$时，$\dfrac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0$，则

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0.$$

同理，当 $\Delta x<0$ 时，有

$$f'(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

从而必有　　$f'(\xi)=0$.

五、反证法

欲证“若 A 则 B”，先给出否定结论 B（记作$\overline{B}$），然后从$\overline{B}$出发，经过正确的逻辑推理而得出矛盾，说明$\overline{B}$不对，从

而 B 对，这种证题方法就叫反证法。

例 5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\int_0^1 f(x)dx=0$，$\int_0^1 xf(x)dx=1$，求证存在一点 x，$0\leqslant x\leqslant 1$，使 $|f(x)|>4$。

证明 用反证法。若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f(x)|\leqslant 4$ 则

$$1=\left|\int_0^1 xf(x)dx-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\right|$$

$$=\left|\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\ |f(x)|\ dx\ \leqslant 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx$$

$$=4\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx\right]=1.$$

因此 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\ |f(x)|\ dx=4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|dx$，

即 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|[4-|f(x)|]dx=0$.

因此有 $|f(x)|=4$，即 $f(x)=4$，或 $f(x)=-4$，$x\in[0,1]$。此条件与题设 $\int_0^1 f(x)dx=0$ 矛盾，故存在一点 x，$0\leqslant x\leqslant 1$，使 $|f(x)|>4$。

说明：本例也可以证明如下：

若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f(x)|\leqslant 4$．因为 $f(x)\equiv 4$或$f(x)\equiv -4$显然不可能，则至少有〔0，1〕的子区间存在，使在其上 $|f(x)|<4$．设在$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$上有子区间〔$\delta_1$，$\delta_2$〕，使在其上$|f(x)|<4$，于是由积分第一中值定理有

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{\delta_1}+\int_{\delta_1}^{\delta_2}+\int_{\delta_2}^{1}$$

$$\leqslant 4\int_{\frac{1}{2}}^{\delta_1}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+f(\xi)\int_{\delta_1}^{\delta_2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$+4\int_{\delta_2}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$<4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\leqslant\delta_1<\xi<\delta_2\leqslant 1\right)$$

则 $$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx<1. \quad (1)$$

但 $$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx-\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx=1, \quad (2)$$

（1）与（2）矛盾，故必存在一点 x，$0\leqslant x\leqslant 1$，使

$|f(x)|>4$。

六、计算性证明法

通过对所给已知条件或式子进行计算，从而达到证明结论的目的，这种方法即是计算性证明法。

例 6 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 都是常数，且 $|a|\neq|b|$，求证 $f(x)=-f(-x)$。

证明 将

$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}, \qquad (1)$$

中的 x 换成 $\frac{1}{x}$，有

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx. \qquad (2)$$

把 $f(x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$ 看作未知数，解联立方程组（1），（2），且由 $|a|\neq|b|$，得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right),$$

则 $$-f(-x)=-\frac{1}{a^2-b^2}\left(-\frac{ac}{x}+bcx\right)=f(x).$$

七、数学归纳法

一个有关自然数 n 的命题，如果先验证当 n 取第一个值 $(n=1)$ 时命题成立；然后在当 $n=k>1$ 时命题成立的假设