线性代数

主　编　李世贵　肖喜燕
副主编　何　兰　郭仿平

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

石油工业出版社

线性代数

主　编　李世贵　肖喜燕
副主编　何　兰　郭仿平

石油工业出版社

内 容 提 要

本书内容包括：行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵的相似对角形、投入产出分析数学模型、Maple软件在线性代数中的应用。

本书可以作为高职高专学校的线性代数教材，也可作为职业大学、干部培训班等的选用教材，还可作为工程技术人员的自学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/李世贵等主编.
北京：石油工业出版社，2004.1
ISBN 7－5021－4543－5

Ⅰ.线…

Ⅱ.李…

Ⅲ.线性代数－高等学校：技术学校－教材

Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 125850 号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011）
网　址：www.petropub.cn
总　机：（010）64262233　发行部：（010）64210392
经　销：全国新华书店
印　刷：石油工业出版社印刷厂印刷

2004 年 1 月第 1 版　2004 年 1 月第 1 次印刷
850×1168 毫米　开本：1/32　印张：5.25
字数：140 千字　印数：1－6000 册

定价：10.00 元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）

前　言

线性代数是高职高专各专业的一门重要基础课程。为了满足高职高专培养高等技术应用型人才的需要，我们集全体教师多年高职高专教学经验，广采众家之长编写了本教材。

本教材的内容体现了“以应用为主，必须够用为度”的教学改革原则，在保证学科内容基本完整性的基础上，尽量讲清概念，减少理论证明，例题和练习题由浅入深、循序渐进，并且注意学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。本书最后把教学内容和计算机应用结合起来，使学生了解数学软件 Maple 在线性代数中的应用，努力体现高职高专特色。

本书是在重庆石油高等专科学校教务处、基础教学部的大力支持下，在数学教研室的组织下编写的，由重庆石油高等专科学校的李世贵副教授、肖喜燕副教授任主编，重庆工业高等专科学校的何兰、郭仿平老师任副主编。参加编写的有谢小渝、邹丽娜、陈小强、付苇等老师。陈元玖副教授和黎彬副教授对全书进行了耐心细致的审核工作，并提出了很多宝贵的意见。

本书在编写过程中，学习、参考了许多兄弟院校老师们的有关书籍、文献，在此向所有老师一并表示最诚挚的谢意！

由于我们水平有限，书中难免有一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

编者

2003 年 9 月

目　录

第一章 行 列 式

行列式最早产生于线性方程组的求解问题，然而它的应用却远不止于此，例如在向量代数、线性微分方程组的求解、正交变换中都会用到行列式。因此，行列式是一种重要的数学工具，也是线性代数的基本内容之一。

第一节 行列式的概念

一、二阶和三阶行列式

在初等数学中，解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

用消元法，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时有

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}b_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了便于使用与记忆，把上面方程组出现的四个数之间的特定算式记为

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1.1.2}$$

并称为**二阶行列式**。利用二阶行列式的概念，二元一次方程组(1.1.1)的未知数系数组成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

时，(1.1.1)有唯一解，可简洁地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

类似地，为了便于记忆和表达三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

的解，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

称为三阶行列式，a_{ij} 为行列式第 i 行第 j 列的元素。

上述定义表明三阶行列式含有 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规律遵循图 1.1 所示的对角线法则：图中有三条实线看作是平行于主对角线的联线，三条虚

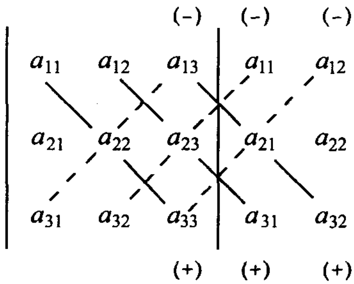

图 1.1

线看作是平行于次对角线的联线，实线上三个元素的积冠以正号，虚线上三个元素的积冠以负号。

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0+72-5-0-60-32=-25$

利用三阶行列式的概念，三元一次方程组（1.1.3）的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，其解可简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$， $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$

$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

二、*n* 阶行列式

为了定义 n 阶行列式，我们先引入行列式中的元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式的概念。在行列式 D 中我们划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素后，由剩下的元素按原来的位置组成的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。元素 a_{ij} 的余子式再乘以 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 。

例如，在三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中，关于元素 a_{23} 的余

子式为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$，代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

定义 1 由 n^2 个元素排成 n 行 n 列，并在左右两边各加一竖线，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1.5}$$

称为 ***n* 阶行列式**，简记为 det (a_{ij})。n 阶行列式也是代表一个由确定的运算关系所得到的数。当 $n=2$ 时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \tag{1.1.6}$$

当 $n>2$ 时

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1.1.7}$$

A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式。

例如，四阶行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+4\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=-9-6-4(4+6-3+2+9+4)$$

$$=-15-4\times 22=-103$$

根据 n 阶行列式的定义，可以知道 n 阶行列式仍代表一个数值，而这个数值可以利用定义由第一行的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和而得到。通常这个定义简称为按第一行展开。

n 阶行列式（1.1.5）按第一行展开后有多少项，而每一项又由哪些元素构成？为了回答这个问题，我们先考虑把 n 个不同元素排成一列，共有多少种排法？

把 n 个不同元素排成一列，叫做这 n 个元素的**全排列**（也简称**排列**）。

n 个不同元素的所有排列的总数，通常用 P_n 表示，由排列知识可知：

$$P_n = n!$$

对于 n 个不同元素，先规定各元素之间有一个标准次序（例如 n 个不同自然数，可规定从小到大为标准次序），于是在 n 个不同元素的任一个排列中，当两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说这个排列有 1 个逆序，一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**。

逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**。

下面讨论计算逆序数的方法。

为了不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 到 n 个自然数，并规定从小到大为标准次序，设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 的逆序数为 t_i。全体元素的逆序数的总和

$$\tau = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数。

例如，排列 321 的逆序数 $\tau(321) = 0 + 1 + 2 = 3$。

为了研究 n 阶行列式的结构，先来研究三阶行列式的结构。由式（1.1.4）容易看出：

（1）式（1.1.4）右边的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素位于不同行、不同列。因此，式（1.1.4）右端的任一项除正负号外，可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$。第一个下标（行标）排成标准次序 123，而第二个下标（列标）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 三个数的某种排列。这个排列共有 6 种，对应的式（1.1.4）共有六项。

（2）各项的正负号与列标的排列对照：

带正项的三项列标排列是：123，231，312，都是偶排列；

带负项的三项列标排列是：132，213，321，都是奇排列。

总之，三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 τ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和。

仿此，可以得到 n 阶行列式的另一个定义。

定义 2　n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \quad (1.1.8)$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数。由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而式（1.1.8）共有 $n!$ 项，每一项都是来自左端不同行和不同列的 n 个元素的乘积。

三、几种特殊的行列式

1. 对角形行列式

主对角线以外的元素全为零的行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1.9}$$

称为**对角形行列式**。其值等于主对角线上元素之积，即 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

2. 三角形行列式

主对角线以上元素全为零的行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{即 } a_{ij}=0(i<j\text{ 时}) \tag{1.1.10}$$

称为**下三角形行列式**，其值等于主对角线上元素之积，即 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

主对角线以下元素全为零的行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{即 } a_{ij}=0(i>j\text{ 时}) \tag{1.1.11}$$

称为**上三角形行列式**，其值等于主对角线上元素之积，即 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。

上、下三角形行列式统称为**三角形行列式**。

3. 对称行列式

如果 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{满足 } a_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.12}$$

则称 D 为**对称行列式**。

4. 反对称行列式

如果 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{满足 } a_{ij} = -a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.13}$$

则称 D 为**反对称行列式**，显然，当 $i = j$ 时，$a_{ii} = 0$。

第二节 行列式的性质

为了应用行列式处理问题并简化行列式本身的计算，现介绍行列式的性质。

$$\text{设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则把行列式 D 中的行和列按原来的顺序互换后所得的行列式称为 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

对于二阶行列式可由行列式的定义直接验证，至于 n 阶行列式可由数学归纳法加以证明，此处从略，其它性质也是如此。

性质 1 说明对于行列式来讲，行与列无本质区别，凡是行列式对行成立的性质对列也成立。

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式的值仅改变符号。

推论 如果行列式某两行（列）的对应元素相等，则行列式值等于零。

因为把行列式的两行相同的元素互换后，有 $D=-D$，所以有 $D=0$。

性质 2 的意义在于，按定义似乎行列式的第一行处于一种特殊的位置，而性质 2 告诉我们，只要适当调整符号，任何一行均能换至第一行的位置，因此说明第一行并不特殊，由此可得下面重要性质 3。

性质 3 n 阶行列式等于任一行（列）所有元素与其对应的代数余子式的乘积，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按第 i 行展开，得

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.1}$$

按第 j 列展开，得

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.2}$$

简言之，行列式可按任一行（列）展开，这个性质称为**拉普拉斯定理**，式（1.2.1），（1.2.2）称为**拉普拉斯展开式**。

性质 3 是考虑行列式某一行（列）中各元素分别与它们的代数余子式的乘积的和。如果行列式某一行中各元素分别与另一行相应元素的代数余子式作乘积，则其值为零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad (i\neq j) \tag{1.2.3}$$

事实上，我们考虑行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将其第 j 行的元素换成第 i 行的元素后，得到行列式

$$D_1=\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

由性质 2 的推论知 $D_1=0$；另一方面将 D_1 按第 j 行展开，由于 D_1 和 D 只有第 j 行的元素不同，其余的各行完全一样，故有

$$D_1=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$$

性质 4 如果行列式中有一行元素全为零，则此行列式值为零。

性质 5 n 阶行列式任一行（列）中各元素的公因子 k 可提到行列式的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 某数乘行列式等于这个数乘以行列式的某一行（列）。

性质 6 行列式中如果有两行（列）的对应元素成比例，则行列式的值为零。

性质 7 如果行列式的某一行（列）所有元素都是两个数的和，则该行列式可以写成下列两个行列式的和。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 8 以数 k 乘行列式的某一行（列）的所有元素，然后加到另一行（列）的对应元素上，则行列式的值不变。

数 k 乘 i 行（列）的每个元素加到第 j 行（列）的对应元素上，记作 $kr_i+r_j(kc_i+c_j)$，这时 r_i 代表第 i 行，c_j 代表第 j 列。

通过本节的学习就是要掌握行列式的性质，并会利用行列式的定义和性质进行行列式的计算。而计算行列式的基本方法是选择零元素最多的行（列），然后按这一行（列）展开。当然，在展开之前可利用行列式性质把某一行或列的元素尽量化为零，然后再按该行（列）展开。

例 1 计算四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$